

数理物理学特論* — 第一部：臨界現象の定性的理論 —

原 隆

名古屋大学 多元数理科学研究科

e-mail: hara@math.nagoya-u.ac.jp

ver.1-3, 1994-2000

ver.4.1.2, 2002.04.07

概要

これは名古屋大学における大学院の講義「数理物理学特論」(2002年度秋学期)の前半部分の講義覚書である。後半部分は「第二部」として別に公開する。この講義の概要、およびこの第一部の要約は以下の通り。

「場の理論」と統計力学における「臨界現象」は数学的に深く関係しており、共に確率論の非常に興味深いテーマとなっている。この講義では主に「強磁性古典スピン系」の臨界現象を数学的に厳密に理解することを目的とした。しかし、臨界現象の数学的理解にはまだまだ不十分な点が多く、有効な解析手段もかなり限られているのが実状である。その中で、講義の前半では主に「相関不等式」を用いた、かなり一般的な議論に基づき、臨界現象の定性的側面を理解することに重点を置いた。その内容がこの講義ノート(第一部)である。講義の後半では、「くりこみ群」の理論を用いた定量的な議論を心がけた。

さて、この第一部の構成は大体、以下のようにになっている(無定義用語が続出するが、これらは対応する節できちんと解説される予定である)。まず、考えるモデルを定義すると共に、「臨界現象」として予測されていること、その面白さなどを簡単に述べる(1節)。続いて、そのようなモデルの統計力学を考える上で必要不可欠な「熱力学的極限」の存在について吟味する(2節)。その後、系の温度が高温である場合と低温である場合のそれぞれの極端な場合を考察し、この2つが別々の「相」に属することを見る(3節)。この別々の相が移り変わる場所が「相転移点」であるが、第4節では、系がこの相転移点で「臨界現象」を示すことを述べる。最後に、5節で、この相転移点が非常に良い性質を持っていること(いわゆる相転移点の一貫性)について述べる。

この第一部の解析の要になる「相関不等式」については Appendix でまとめて述べることにする。

(最後に言い訳)なお、これはあくまで「講義の覚え書き」であって、時間的制約もあって不完全なまま公開するものである。勿論、これを読んだだけでよくわかり、かつ書き漏らしもないようなものを公開するのが理想であるが、そこまでやるのは限られた時間の最も有効な使い方とは言えないと思うので、暫定版の公開に留める。もっと正直に言うと、現在、名大多元では「教育の見直し」に力を入れており、その結果、新学期の講義内容も当初の僕の想定と大幅に変わることとなった。そのために新しい講義ノートの準備に全力で取り組む必要が生じたので、この講義ノートはこのくらいの状態で公開せざるを得なくなったのである。なお、この講義内容に密接に関連した題材をそのうち書籍の形にまとめる予定であるので、興味のある方は1年後くらいに原の web page を覗いていただければ幸いである。

目次

1	統計力学における臨界現象：何がおもしろいのか	2
1.1	モデルの定義(有限体積)	2
1.2	何を知りたいのか?	5
1.3	臨界現象とは	6
2	熱力学的極限の存在	8
2.1	自由エネルギーの無限体積極限	9
2.2	期待値の熱力学的極限に関する基本的なアイデア	15
2.3	諸量の単調性	16
2.4	FBC, +BC の期待値の無限体積極限の存在	17
2.5	PBC の熱力学極限 — 対角線論法	18

*名大での「数理物理学特論」講義ノートに基づく(まだ、もしかしたらいつまでも、暫定版)

3	相転移の存在	18
3.1	高温側の振る舞い (一般の mixing がマダ)	18
3.2	低温側の振る舞い	19
3.3	相転移の存在	23
4	臨界現象の存在	23
4.1	帯磁率の発散	23
4.2	Correlation Length の定義と基本的性質	27
4.3	χ と ξ の比較	29
5	相転移点の一意性	32
A	相関不等式	32
A.1	お約束	33
A.2	Griffiths の不等式	33
A.3	Lebowitz の不等式	36
A.4	Simon の不等式	36
B	Random Walk Representation	37
B.1	Random Walk Representation	37
B.2	Lebowitz の不等式	41
B.3	Simon の不等式とその仲間	42

1 統計力学における臨界現象：何がおもしろいのか

まず、この講義の主題である「スピン系」を定義する。その後で今後へのイントロとして、スピン系の示す「相転移と臨界現象」について非常に簡単な概略を述べ、どのような現象に着目するのか説明する。

1.1 モデルの定義 (有限体積)

我々の舞台は d -次元 (超) 立方格子 $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{Z}\}$ である。これは座標が整数であるような d -次元 Euclid 空間の点全体の集合であり、「結晶」をモデル化したものと考えられる¹。我々の目的はこの格子上的「スピン系」を定義し、その「統計力学」を考えることにある (統計力学は数学的には確率論の一分野ととらえることができる)。我々の出発点は \mathbb{Z}^d 上のスピン系を定義するところにあるが、初めから無限の格子を考えていくのは困難であり、かつ危険である — 実際に定義ができていないか怪しいことが多い。そこで、まず有限な集合上でモデルを定義し、適当な極限操作によって無限格子上的モデルを定義することにする²。

まず $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ を \mathbb{Z}^d の有限部分集合とし、この Λ 上のスピン模型を定義する。 Λ としては (超) 直方体をとることが多い³。すなわち、 $L_j > 0$ を整数として ($j = 1, 2, \dots, d$)、

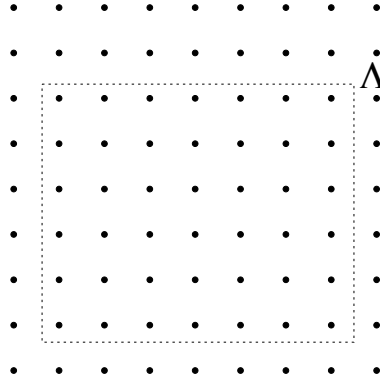
$$\Lambda \equiv ([1, L_1] \times [1, L_2] \times \dots \times [1, L_d]) \cap \mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq x_j \leq L_j\} \quad (1.1.1)$$

¹現実の結晶にはもっと複雑な構造のものが多々ある。しかし、この講義で扱う「臨界現象」は結晶の細かい構造にはよらないだろうと思われる (その理由については追々)。そこで、初めから数学的に一番簡単であろう立方格子のみを考えていくことにする

²(物理的背景についての注)我々の究極の目標は現実の物理系 (結晶など) を扱うことなのに、なぜ無限系を扱っているのか、疑問に思う人もいるかも知れないので簡単に説明しておく。我々の扱いたい結晶などは確かに有限個の原子や分子からなる有限系である。しかし、その構成原子数が非常に大きい (アボガドロ数程度、 10^{23} のオーダー)、数学的にはほとんど無限系と思っても良い場合が多い (本当によいかどうかも勿論、確かめるべきであるが、finite size scaling など、いくつかの理論が存在して、大体良いらしいことがわかっている。) ところで、そのような「構成粒子数が非常に多い」有限系への第ゼロ近似として、無限系を考えるわけである。もちろん、構成粒子数がもっとも少ない系 (いわゆるメソスコピック系など) では有限系であることの効果が強く見られるため、安易に無限系で近似することは意味がない

³より一般のものも考えることができるが (後の節を参照)、あまり一般化しても仕方ないのでこの程度にしておく

ととるのである．



このとき， Λ 上のスピン系の統計力学とは，数学的には以下のように要約できる： Λ の各点 $x \in \Lambda$ （これをサイト (site) とする）にはスピンと呼ばれる確率変数 φ_x が載っている．このスピンの分布 $\rho_\Lambda(\{\varphi_x\}_{x \in \Lambda})$ を与えた上で，このスピンの確率論を展開する — 特に ρ_Λ によって定義される期待値 (F はスピン変数の関数)

$$\langle F(\{\varphi_x\}) \rangle_{\rho_\Lambda} \equiv \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \rho_\Lambda(\{\varphi_x\}) F(\{\varphi_x\}) \quad (1.1.2)$$

を研究する — のが統計力学である．なお，一々 $\{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$ と書くのはうるさいので，以下では

$$\Phi = \Phi_\Lambda \equiv \{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}, \quad d\Phi = d\Phi_\Lambda \equiv \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \quad (1.1.3)$$

と書くことが多い．

ではまず， ρ_Λ を与えよう．この講義では以下の形の ρ_Λ を考える．

$$\rho_\Lambda(\Phi_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{BC}}} \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta_x(\varphi_x) \right] \exp \left[-\mathcal{H}_\Lambda(\Phi_\Lambda) - \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi_\Lambda) \right] \quad (1.1.4)$$

各項については以下に説明する．すぐ述べるように，上のような表し方には任意性がある — つまり，同じ ρ_Λ を別の $\eta, \mathcal{H}_\Lambda, \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}$ に分解することも可能である．しかし，物理的背景を考え，このように分解しておく．

規格化定数： 簡単なものからいこう． Z_Λ は $\rho_\Lambda(\Phi_\Lambda)$ を確率測度にするための規格化定数である．つまり

$$\int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \rho_\Lambda(\{\varphi_x\}) = 1 \quad (1.1.5)$$

となるようにとる定数である．この意味で (1.1.4) の本質的部分は Z_Λ 以外のところにある．

Single site measure: $\eta(\varphi_x)$ は single site measure と呼ばれ，各サイト x でのスピンの分布（他のスピンの関係ない部分）を表す．我々は特に

Ising model: このモデルでは φ_x は ± 1 の値のみを同確率でとる．つまり，

$$\eta_x(\varphi) = \delta(\varphi^2 - 1) \quad (1.1.6)$$

ϕ^4 model: 定数 $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\eta_x(\varphi) = \exp \left[-\frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \frac{\mu}{2} \varphi^2 \right] \quad (1.1.7)$$

の2つを考えることが多い．なお，より一般の場合を考えて η_x は各サイト毎に変われるように設定してあるが，実際には上の例のように η_x は x によらず一定のものを採用することが多い．

Hamiltonian: 次に \mathcal{H}_Λ はハミルトニアン⁴で ($\mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}$ とともに) スピン同士の相互作用を表す ($\mathcal{H}_\Lambda = \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}} \equiv 0$ ならばスピン変数は互いに独立であることに注意). この講義では主に⁵

$$-\mathcal{H}_\Lambda(\Phi_\Lambda) \equiv \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} J_{xy} \varphi_x \varphi_y + \sum_{x \in \Lambda} h_x \varphi_x \quad (1.1.8)$$

の形のもののみを扱う. ここで J_{xy} は x, y にあるスピン同士の相互作用を表す定数であるが $J_{xy} \geq 0$ の場合を強磁性型相互作用 (ferromagnetic interaction) と呼ぶ. また, $h_x \in \mathbb{R}$ は磁場と呼ばれるパラメーターである. この講義では主に $h_x > 0$ がサイトによらず, かつ最近接相互作用 (nearest-neighbour interaction, n.n.)

$$J_{xy} = \begin{cases} J & (|x-y|=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \text{つまり} \quad -\mathcal{H}_\Lambda(\Phi_\Lambda) = \frac{J}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \quad (1.1.9)$$

の場合を考える.

Boundary condition: $\mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}$ は境界条件 (Boundary Condition) を表す項である. これは \mathcal{H}_Λ の仲間であり, この2つへの分け方はある程度恣意的であるが, 物理的理由から敢えて2つに分けて書いている⁶.

この講義では主に以下の3つの場合を考える.

FBC (自由境界条件): $\mathcal{H}_{\text{BC}} \equiv 0$ ととる. この場合, Λ 内のスピンは境界からの影響を全く受けない.

+BC (+境界条件):

$$-\mathcal{H}_{\text{BC}} = \sum_{\substack{u \in \Lambda \\ v \in \Lambda^c}} J_{uv} \varphi_u \quad (1.1.10)$$

と定義する. これは Λ の境界 (で Λ の外側) の点にもスピンがあると思って, でも, それらのスピンは $\varphi_v \equiv +1$ に固定されている状況に相当する. J_{uv} も指定しないと上の定義は意味が無いが, 通常は (1.1.9) のような場合を考えておく (ここで, これらは「磁場」のように見えるが, あくまでこの「磁場」は境界だけに入っていること, 従って, 普通の磁場項とは (表面積/体積) のオーダーだけ小さいこと, を強調しておく.)

PBC (周期的境界条件): これは Λ を無理矢理トーラスと見る立場である. ただし, Λ としては超直方体のもののみ, また相互作用としても最近接の場合 (1.1.9) のみを考える. 具体的には

$$-\mathcal{H}_\Lambda - \mathcal{H}_\Lambda^{\text{PBC}} \equiv \frac{J}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ |x-y|_{\text{PBC}}=1}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \quad (1.1.11)$$

とする. ここで

$$|x-y|_{\text{PBC}} \equiv \left\{ \sum_{j=1}^d (|x_j - y_j| \bmod L_j)^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.1.12)$$

ともかく, FBC, +BC では全体のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = - \sum_{x,y \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x, \quad J_{xy} \geq 0, \quad h_x \geq 0 \quad (1.1.13)$$

の形に書けることに注意しておこう.

Remarks:

⁴この講義内容を動機づけるためには物理的背景をある程度知っておくことが望ましい. しかし, 当座は Hamiltonian とは単に物理での jargon の一つだと思っておいても問題はない

⁵ハミルトニアン自身は \mathcal{H} であるが, 指数関数の肩に乗っているのは $-\mathcal{H}$ である. 確率が大きくなる方が見やすいように, $-\mathcal{H}$ で書いている

⁶我々の考える無限系は実際には有限である結晶などの第ゼロ近似である. この場合, 結晶は「一つのスピン毎にこのようなハミルトニアンを持つ」ものにとらえており, 自然にハミルトニアン (\mathcal{H}_Λ の部分) を考えることができる. しかし, 無限系は有限系の極限として定義する必要があり, その際に境界条件を明確にすることが必要となる. この意味で境界条件は極限の定義を明確化するための余分なもの, と言う見方も出来るが, 後に見るように, 境界条件は単なる数学的形式以上の意味を持つ

1. Ising Model は φ^4 -model において, $\mu = -\frac{\lambda K^2}{6}$ として $\lambda \uparrow \infty$ の極限をとったものである.
2. n.n. φ^4 -model では4つのパラメーター (J, μ, λ, H) があるが, φ の大きさを一斉に変える trivial な変換

$$\varphi \Rightarrow \varphi' \equiv a\varphi \quad (1.1.14)$$

の下では

$$(J, \mu, \lambda, H) \Rightarrow (J', \mu', \lambda', H') \equiv (a^2 J, a^2 \mu, a^4 \lambda, aH) \quad (1.1.15)$$

と対応させると両者は全く同じものになる. この意味で, 4つの内, 一つは余分なものである.

3. 上の J は (相互作用の強さ/ (kT)), H は (磁場/ (kT)) という物理的意味を持つ.

この節を終える前に, 我々が主に考える Ising model と φ^4 model の FBC での期待値を具体的に書き下してこう.

$$\langle F(\Phi_\Lambda) \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{\varphi_x = \pm 1} F(\Phi_\Lambda) \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y + H \sum_x \varphi_x \right] \quad (\text{Ising model}) \quad (1.1.16)$$

$$\langle F(\Phi_\Lambda) \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \int \left[\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right] F(\Phi_\Lambda) \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y + H \sum_x \varphi_x - \sum_x \left\{ \frac{\lambda}{4!} \varphi_x^4 + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 \right\} \right] \quad (\varphi^4 \text{ model}) \quad (1.1.17)$$

1.1.1 無限体積極限の“定義”(予告)

無限体積系は期待値に関して Λ を \mathbb{Z}^d にする極限を考えることにより定義する:

$$\langle \dots \rangle_\rho \equiv \text{“} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \text{”} \langle \dots \rangle_{\rho_\Lambda} \quad (1.1.18)$$

上記の極限は (相転移が存在するような場合など) 一般には存在しない. しかし, 境界条件などを指定することで, 収束部分列をとることは可能である. これらの微妙な点については後の2節で詳しく述べる. 以下では上記の期待値を単に $\langle \dots \rangle$ とも書く.

1.2 何を知りたいのか?

まず, 後々のために:

Definition 1.2.1. 一般に期待値 $\langle \dots \rangle$ が与えられたとき, 確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の truncated expectation を形式的には以下で定義する:

$$\langle X_1; X_2; \dots; X_n \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \dots \frac{\partial}{\partial h_n} \log \left\langle \exp \left[\sum_{i=1}^n h_i X_i \right] \right\rangle \Bigg|_{h_1=h_2=\dots=h_n=0} \quad (1.2.1)$$

上で「形式的」と言ったのは, $\left\langle \exp \left[\sum_{i=1}^n h_i X_i \right] \right\rangle$ という期待値は X_i の指数次のモーメントの存在を要求するが, そのような強い条件がない場合でもこの定義を用いたいからである. 形式的ではない定義は,

$$\langle X_1 X_2 \dots X_n \rangle = \sum_{\mathcal{P}} \prod_{p=(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathcal{P}} \langle X_{i_1}; X_{i_2}; \dots; X_{i_p} \rangle \quad (1.2.2)$$

と言う関係により, 帰納的に truncated expectation を定義することになる. ここで \mathcal{P} とは $1, 2, \dots, n$ をいくつかのグループに分ける分け方.

Definition 1.2.2. Definition 1.2.1 にて, 特に $X_i = \varphi_{x_i}$ のときを n -点 Ursell function (connected correlation function) と言い,

$$u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \varphi_{x_1}; \varphi_{x_2}; \dots; \varphi_{x_n} \rangle \quad (1.2.3)$$

と書く.

以上の準備の元に, どのような量に興味があるのかを説明することが出来る. 我々の見たい量は以下の諸量である (これらはパラメーター (J, μ, λ, H) の関数であるがその依存性は陽には書かない):

$$G(x, y) \equiv \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle \equiv \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle - \langle \varphi_0 \rangle \langle \varphi_x \rangle \quad \text{2点関数 (two point function)} \quad (1.2.4)$$

$$M_s \equiv \lim_{H \searrow 0} \langle \varphi_0 \rangle \quad \text{自発磁化 (spontaneous magnetization)} \quad (1.2.5)$$

$$\chi \equiv \sum_x \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle \quad \text{帯磁率 (susceptibility)} \quad (1.2.6)$$

$$\frac{1}{\xi} \equiv \lim_{n \nearrow \infty} \frac{-\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n} \quad \xi \text{を相関距離 (correlation length)} \quad (1.2.7)$$

(1.2.7) で, e_1 は座標軸の第一方向の単位ベクトルである. (1.2.7) の極限の存在は勿論自明ではないが, 例えば reflection positivity [1] のある系では保証される. また, 後の 4.2 節では, Ising model に対して, 少し別のやり方でこの極限の存在を示す.

更に,

$$\overline{u_4} \equiv \sum_{x, y, z} \langle \varphi_0; \varphi_x; \varphi_y; \varphi_z \rangle \equiv \sum_{x, y, z} \{ \langle \varphi_0 \varphi_x \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \} \quad (1.2.8)$$

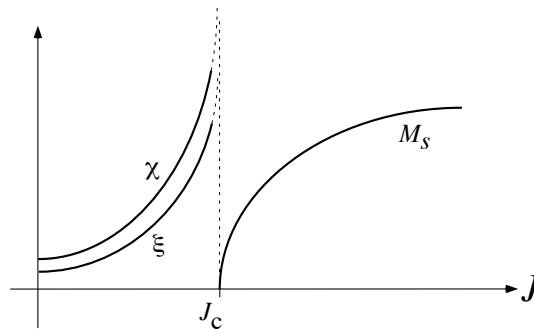
も考える (上の 2 つめの等式は $H = 0$ の時のみ成立.)

1.3 臨界現象とは

この節では, これからやる事への準備として, 相転移や臨界現象の概略を説明する.

1.3.1 Ising Model: 高温側, 低温側の振る舞いと臨界現象

ここでは以下への予告編として, Ising model の相転移と臨界現象について概観する. 以下の章で追々見ていくように, Ising model (1.1.16) にて J を変化させた場合, 以下が成立することがわかっている (ここでは結果のみ引用する. 証明は例えば, Simon[2] にあるが, 以下の講義でも概略を示す).



Theorem 1.3.1. $d > 1$ では d によって決まる有限の J_c が存在して,

- まず高温側 $J < J_c$ では φ は単に大体独立な確率変数とみなせるから,

$$G(0, x) \leq C e^{-m|x|}, \quad (\exists C(J), \exists m(J) > 0) \quad (1.3.1)$$

$$M_s = 0, \quad \chi < \infty, \quad \xi < \infty \quad (1.3.2)$$

が成立.

- 一方低温側 $J > J_c$ では,

$$G(x, y) \geq \exists \epsilon(J) > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^d) \quad (1.3.3)$$

$$\chi = \infty, \quad \xi = \infty, \quad M_s > 0, \quad (1.3.4)$$

が成立.

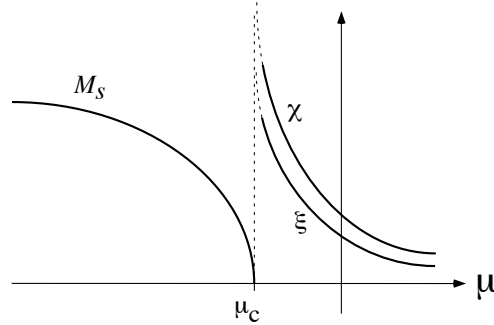
- 更に

$$\chi, \xi \nearrow \infty \quad \text{as} \quad \mu \searrow \mu_c \quad (1.3.5)$$

このようにあるパラメーター (今は J) を変えていった時にある値 (今は $J = J_c$) で相関距離などが発散する場合, 上の J_c を「臨界点」, J_c 近傍での系の振る舞いを「臨界現象」(critical phenomena, critical behaviour) という. この定理については以下で証明していく.

1.3.2 φ^4 -モデル: 高温側, 低温側の振る舞いと臨界現象

φ^4 -model (1.1.17) においても Ising model と同様の臨界現象が見られる. $J > 0, \lambda > 0$ を固定して μ を変化させて考えよう. この時, 以下が成立する (ここでは結果のみ引用する. 証明は例えば, Simon[2] にあるが, 以下の講義でも示していく).



Theorem 1.3.2. $d > 1$ では J, λ によって決まる有限の $\mu_c(J, \lambda)$ が存在して,

- まず高温側 $\mu > \mu_c(J, \lambda)$ では φ は単に大体独立な確率変数とみなせるから⁷,

$$G(0, x) \leq C e^{-m|x|}, \quad (\exists C(\mu, J, \lambda), \exists m(\mu, J, \lambda) > 0) \quad (1.3.6)$$

$$M_s = 0, \quad \chi < \infty, \quad \xi < \infty \quad (1.3.7)$$

が成立.

- 一方低温側 $\mu < \mu_c(J, \lambda)$ では⁸,

$$G(x, y) \geq \exists \epsilon(\mu, J, \lambda) > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^d) \quad (1.3.8)$$

$$\chi = \infty, \quad \xi = \infty, \quad M_s > 0, \quad (1.3.9)$$

が成立.

- 更に

$$\chi, \xi \nearrow \infty \quad \text{as} \quad \mu \searrow \mu_c \quad (1.3.10)$$

⁷ $\mu \gg 1$ の時, $a^2 = 1/\mu$ として先のスケール変換を行うと, パラメーターは $(J/\mu, 1, \lambda/\mu^2) \rightarrow (0, 1, 0)$ となり, これは $\rho(\Phi) \approx \prod_x \exp(-\varphi_x^2/2)$ という product measure を意味する

⁸今度は $a^2 = -\mu/(2\lambda)$ ととってみると, 今度はパラメーターは $(\frac{J|\mu|}{2\lambda}, \frac{-|\mu|^2}{2\lambda}, \frac{|\mu|^2}{4\lambda})$ となり, これはイジングモデルの極低温に近い (Peierls argument)

1.3.3 臨界現象に関する予想

以上で Ising, φ^4 , 2つのモデルを見たが, この結果は「定性的にはこの2つは同じ臨界現象を示す」と要約できよう. ところが, 話はこれで終わらない. 定量的にも同じであろうと予想されている. より詳しく言うと, 以下のようになる.

臨界現象に関する 予想 は以下の通り (幾つかは証明済み)

(1) 臨界指数 (critical exponents) $\gamma, \nu, \beta, \eta, \delta, \Delta_4$ が存在して

$$\chi(\mu) \approx (\mu - \mu_c)^{-\gamma}, \quad \xi(\mu) \approx (\mu - \mu_c)^{-\nu}, \quad |\bar{u}_4| \approx (\mu - \mu_c)^{-(2\Delta_4 + \gamma)} \quad (\mu \downarrow \mu_c; H \equiv 0) \quad (1.3.11)$$

$$M_s(\mu) \approx (\mu_c - \mu)^\beta, \quad (\mu \uparrow \mu_c; H \equiv 0) \quad (1.3.12)$$

$$G(0, x) \approx |x|^{-d+2-\eta} \quad (|x| \uparrow \infty; \mu \equiv \mu_c, H \equiv 0) \quad (1.3.13)$$

$$\langle \varphi_0 \rangle_H \approx H^{1/\delta} \quad (H \downarrow 0; \mu \equiv \mu_c) \quad (1.3.14)$$

と書ける. ここで $x \rightarrow a$ の時に $f(x) \approx g(x)$ とは, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1$ なることを意味する.

(2) これらの臨界指数は系のごく「基本的」な情報で決まる. 具体的には, 上のイジングモデル, φ^4 なら系の次元 d のみで決まる. 特に φ^4 モデルはパラメーターを4つ持っているにも関わらず, 臨界指数の値はこれらによらない (臨界現象が起こる限り). より一般的には, 臨界指数の値は系の次元と対称性で殆ど決まる⁹.

このような現象を (実際に起これば) 臨界指数の「普遍性」(universality) と言う.

(3) $d > 4$ ではこれらの指数は簡単な値 (Mean Field Values):

$$\gamma = 1, \quad \nu = \beta = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \delta = 3, \quad \Delta_4 = \frac{3}{2} \quad (1.3.15)$$

をとる.

(4) 更にこれらの間には

$$(2 - \eta)\nu = \gamma, \quad \gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1) \quad (\text{scaling law, 全ての } d \text{ で成立}) \quad (1.3.16)$$

$$d\nu = 2\Delta_4 - \gamma = \gamma + 2\beta \quad (\text{hyperscaling law, } d < 4 \text{ のみで成立}) \quad (1.3.17)$$

などが成り立つ. 臨界指数の値そのものは系の次元や対称性で変わるのにもかかわらず, これらの恒等式は成り立つのである.

(1) だけではそんなに面白くないが, 上の(2)や(4)は, 背後にかなり深いものを感じさせる. これが臨界指数や臨界現象が大変興味深いものである理由であり, この講義の主目的はその「背後の深いもの」を理解することにある.

2 熱力学的極限の存在

この節では熱力学的極限 (体積無限大の極限) を正確に定義し, その極限がどのような場合には定義できているのか, などを考える.

前節で有限体積の系を定義した. また, 系の体積が無限大に行った極限に興味があり, その極限では「相転移」「臨界現象」がおこる (だろう) ことを結果だけ示した. これからいよいよ, これらのことを数学的に証明して行く. まず最初にこの節では, 体積無限大の極限が (適当な条件の下で) 存在することを示そう.

この節では single site measure η_x は x によらず, また相互作用 J_{xy} は並進対称, つまり J_{xy} は $x - y$ のみによるもの, とする. ただし, 基本的には nearest neighbour Ising model を先に考える. 他のモデル (n.n. でなければ

⁹これとは対照的に, 臨界点の値そのものは系の詳細による. 例えば, 系の相互作用の形を少し変えただけで臨界点の値は変化する. だから, 臨界指数と臨界点の値の間には本質的な違いが存在する (らしい) ことが示唆される

どうか？ Ising でなく φ^4 ならどうか？）については n.n. Ising の後でコメントする事にする．結果を先に言えば，これらの拡張を行っても — ある程度の条件を満たさせれば — この節の結果は全て成立する．しかし，このような一般的な場合には非常に話がややこしくなり，本質部分を逃す可能性があるので，これらの一般化については原則として結果のみ述べることにする．

2.1 自由エネルギーの無限体積極限

我々の知りたいのは種々の期待値 $\langle \dots \rangle_\Lambda$ の極限である．しかし，これから見ていくように，この期待値そのものの極限はなかなか厄介である．そこでまず，「自由エネルギー」と呼ばれる量を定義し，この量の熱力学的極限が存在することを示す．

2.1.1 自由エネルギーとは？

有限体積 Λ と境界条件 BC が与えられたとき，1 サイトあたりの自由エネルギー f_Λ^{BC} を，

$$f_\Lambda^{\text{BC}} \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{\text{BC}} = \frac{1}{|\Lambda|} \log \int \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \right] \exp \left[-\mathcal{H}_\Lambda(\Phi_\Lambda) - \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi_\Lambda) \right] \quad (2.1.1)$$

により定義する．

この量の意味を少し考えておこう．今，典型的な例として (1.1.16) や (1.1.17) の Ising, ϕ^4 モデルを考える．(1.1.16) や (1.1.17) は本当は BC の項を含むが，以下では H のかかった項が特に問題になる．そこで $\mathcal{H}_\Lambda + \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}}$ のなかから H のかかった項を引っ張り出して

$$-\mathcal{H}_\Lambda - \mathcal{H}_\Lambda^{\text{BC}} = -\mathcal{H}' + H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \quad (2.1.2)$$

と書くことにする．さらに以下を見やすくするために非積分関数の中で H によらない項をまとめて

$$\tilde{\rho}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi) \equiv \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \right] \exp \{ -\mathcal{H}'(\Phi) \} \quad (2.1.3)$$

と書くことにしよう．こうすれば Z_Λ^{BC} は

$$Z_\Lambda^{\text{BC}} = \int \tilde{\rho}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi) \exp \left(H \sum_x \varphi_x \right) \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \quad (2.1.4)$$

と書けることになる．

さて， f_Λ^{BC} を H で微分してみよう．今の場合， Z_Λ^{BC} は (2.1.4) のように有限次元積分で定義されており，非積分関数は H の正則関数である — H -依存性は H の指数関数だから．従って Z_Λ^{BC} も H の正則関数になる． f_Λ^{BC} は $\log Z_\Lambda^{\text{BC}}$ として定義されているが， \log の中身は正である．従って f_Λ^{BC} も H の正則関数になることがわかる．このような理由から f_Λ^{BC} を H で，何回でも微分することができる．

ともかく (2.1.4) を微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} f_\Lambda^{\text{BC}} &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{BC}}} \frac{\partial}{\partial H} Z_\Lambda^{\text{BC}} = \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{BC}}} \frac{\partial}{\partial H} \int \tilde{\rho}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi) \exp \left(H \sum_x \varphi_x \right) \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{BC}}} \int \tilde{\rho}_\Lambda^{\text{BC}}(\Phi) \exp \left(H \sum_x \varphi_x \right) \left[\sum_x \varphi_x \right] \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_x \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}} = \left\langle \frac{1}{|\Lambda|} \sum_x \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

となる．つまり， $\frac{\partial}{\partial H} f_{\Lambda}^{\text{BC}}$ は1サイトあたりのスピンの平均値を表している．これを更に H で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial H^2} f_{\Lambda}^{\text{BC}} &= \frac{1}{|\Lambda|} \left[\frac{1}{Z_{\Lambda}^{\text{BC}}} \frac{\partial}{\partial H} \int \tilde{\rho}_{\Lambda}^{\text{BC}}(\Phi) \exp\left(H \sum_x \varphi_x\right) \left[\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right] \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(Z_{\Lambda}^{\text{BC}})^2} \frac{\partial}{\partial H} Z_{\Lambda}^{\text{BC}} \times \int \tilde{\rho}_{\Lambda}^{\text{BC}}(\Phi) \exp\left(H \sum_x \varphi_x\right) \left[\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right] \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right] \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \left[\frac{1}{Z_{\Lambda}^{\text{BC}}} \int \tilde{\rho}_{\Lambda}^{\text{BC}}(\Phi) \exp\left(H \sum_x \varphi_x\right) \left[\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right]^2 \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(Z_{\Lambda}^{\text{BC}})^2} \left\{ \int \tilde{\rho}_{\Lambda}^{\text{BC}}(\Phi) \exp\left(H \sum_x \varphi_x\right) \left[\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right] \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right\}^2 \right] \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \left[\left\langle \left[\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right]^2 \right\rangle_{\Lambda}^{\text{BC}} - \left\{ \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_{\Lambda}^{\text{BC}} \right\}^2 \right] \tag{2.1.6}
\end{aligned}$$

となり，これは $\sum_x \varphi_x$ の分散（を $|\Lambda|$ で割ったもの）になっている．並進対称性を仮定するとこれは更に

$$= \sum_x \left[\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle - \langle \varphi_0 \rangle \langle \varphi_x \rangle \right] \tag{2.1.7}$$

となり，これは帯磁率である．このように「自由エネルギー」を H で微分すると見たい量がどんどん出てくるので，これは基本的な量となっている（ただし，このような綺麗な関係がいつも成り立つのは有限体積に限られ—無限体積系では注意が必要である．）

2.1.2 FBC の Free Energy の熱力学的極限 — 超立方体の場合

さて，この自由エネルギーについてはかなり緩い条件の下で熱力学的極限が存在し，かつ，極限が BC によらないことが言える．これを段階を追って見ていくことにする．

この節では Ising Model に話を限る

Lemma 2.1.1. *Ising model* を考える．一辺 L の超立方体からなる Λ 上での FBC での free energy を

$$f_L^{\text{FBC}} \equiv \frac{1}{L^d} \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x, \quad \eta(\varphi) = \delta(\varphi^2 - 1) \tag{2.1.8}$$

と定義する．このとき， L のものと $2L$ のもの間には

$$0 \leq f_{2L}^{\text{FBC}} - f_L^{\text{FBC}} \leq \frac{dJ}{2L} \tag{2.1.9}$$

が成り立つ．

Proof. $2L$ の量を，できるだけ L の量から作ってみることを考える．一辺 $2L$ の超立方体は真ん中で切ると，一辺 L の超立方体 2^d 個に別れるので，この一辺 L の超立方体を B_i ($i = 1, 2, \dots, 2^d$) と書くことにする（図1 (a) 参照）．一辺 $2L$ の系でのハミルトニアンは大体 B_i での系のハミルトニアンを寄せ集めてできるが，少し違いもある．実際，

$$-\mathcal{H}_{2L}^{\text{FBC}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} J_{xy} \varphi_x \varphi_y \tag{2.1.10}$$

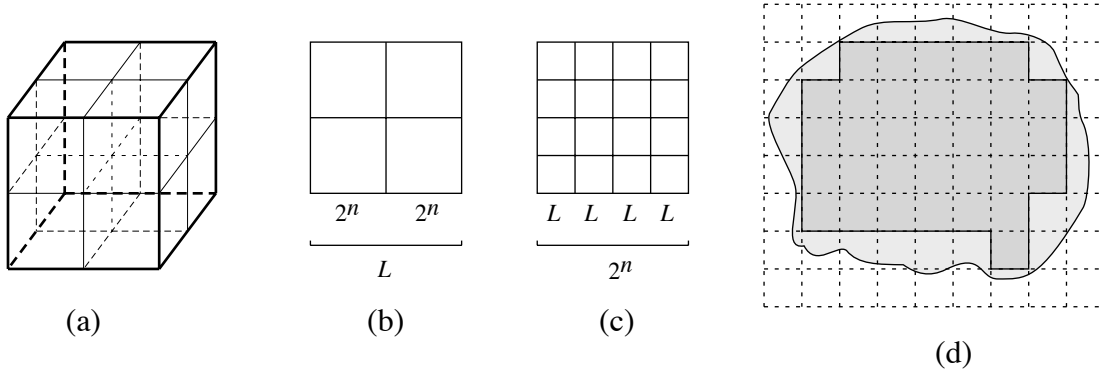


図 1: (a) 一辺 $2L$ の立方体を 2^d 個に分ける . (b) 一辺 $2^n L$ のものを一辺 2^n のもの L^d 個に分ける . (c) 一辺 $2^n L$ のものを一辺 L のもの $(2^n)^d$ 個に分ける . (d) 一般の Λ の場合 .

であるが , $x, y \in \Lambda$ を , x, y 共に何かの B_i に入っているものと , 2つの B_i, B_j にまたがっているものに分けて書いてみると

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{2^d} \sum_{x, y \in B_i} J_{xy} \varphi_x \varphi_y + \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{x \in B_i \\ y \in B_j}} J_{xy} \varphi_x \varphi_y \right] = \sum_{i=1}^{2^d} \mathcal{H}_{B_i}^{\text{FBC}} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{x \in B_i \\ y \in B_j}} J_{xy} \varphi_x \varphi_y \\
&\equiv - \sum_{i=1}^{2^d} \mathcal{H}_{B_i}^{\text{FBC}} + \Delta \mathcal{H}
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

となる (最後の式は単に $\Delta \mathcal{H}$ の定義) . 従って ,

$$(2L)^d f_{2L} = \log \int e^{-\mathcal{H}_{2L}} \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x = \log \int e^{-\Delta \mathcal{H}} \prod_{i=1}^{2^d} \left[e^{-\mathcal{H}_{B_i}} \prod_{x \in B_i} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] \tag{2.1.12}$$

となる . さて , n.n. Ising model では , $\varphi_x = \pm 1$ であり , また J_{xy} は $|x - y| = 1$ 以外ではゼロ . 従って

$$|\Delta \mathcal{H}| = \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{x \in B_i \\ y \in B_j}} J_{xy} \varphi_x \varphi_y \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{x \in B_i \\ y \in B_j}} J_{xy} = \frac{J}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{x \in B_i \\ y \in B_j}} I[|x - y| = 1] \tag{2.1.13}$$

となる . ここで $I[E]$ は E が実現されていれば 1 , それ以外は 0 なる関数 (事象 E の indicator function) . 最後の和 (その前の $\frac{1}{2}$ 込み) は要するに B_i と B_j を結ぶ n.n. bonds の数を数えていることになる . この数は以下のように考えれば求められる .

1. 一辺 $2L$ の立方体を一辺 L のものに分けるには各座標軸に垂直に d 通りの超平面で切る必要がある .
2. 各超平面の両側にはそれぞれ 2^{d-1} 個の L -cube が並んでいる .
3. 一つの L -cube はその面に L^{d-1} 個の pair を持つ .

この3つを掛け合わせて

$$|\Delta \mathcal{H}| \leq J \times d \times 2^{d-1} \times L^{d-1} = d(2L)^{d-1} J \tag{2.1.14}$$

を得る . これを (2.1.12) に用いると

$$\begin{aligned}
\exp \left[(2L)^d f_{2L} \right] &= \int e^{-\Delta \mathcal{H}} \prod_{i=1}^{2^d} \left[e^{-\mathcal{H}_{B_i}} \prod_{x \in B_i} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] \leq e^{d(2L)^{d-1} J} \prod_{i=1}^{2^d} \left[e^{-\mathcal{H}_{B_i}} \prod_{x \in B_i} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] \\
&= e^{d(2L)^{d-1} J} \prod_{i=1}^{2^d} \left[L^d f_{B_i} \right] = e^{d(2L)^{d-1} J} \left[L^d f_L \right]^{2^d}
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

を得る．同様に $-\Delta\mathcal{H}$ の lower bound を使うと

$$\exp\left[(2L)^d f_{2L}\right] \geq e^{-d(2L)^{d-1}J} \left[L^d f_L\right]^{2^d} \quad (2.1.16)$$

を得る．これらの log をとって

$$-d(2L)^{d-1}J + 2^d L^d f_L \leq (2L)^d f_{2L} \leq d(2L)^{d-1}J + 2^d L^d f_L, \quad (2.1.17)$$

すなわち

$$f_L - \frac{Jd}{2L} \leq f_{2L} \leq f_L + \frac{Jd}{2L} \quad (2.1.18)$$

が得られた．

Jensen の不等式を用いると，もう少しうまく評価できるが，地道なものを紹介した．

□

これから直ちに一辺 $2^n L$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の超立方体の列については $n \rightarrow \infty$ の極限があることがすぐにわかる．

Lemma 2.1.2. やはり *Ising model*, *FBC* を考える．一辺 $2^n L$ の超立方体を考えると ($n = 1, 2, 3, \dots$) $f_{2^n L}$ の $n \rightarrow \infty$ の極限は存在する．つまり

$$f_\infty^{\text{FBC}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2^n L} \quad (2.1.19)$$

なる極限を定義することができる．

Proof. $g_n \equiv f_{2^n L}$ と略記すると先の補題より $|g_{n+1} - g_n| \leq \frac{Jd}{2^{n+1}L}$ が成り立ち，特に $\{g_n\}$ は Cauchy 列であることがわかる．よって，この極限は存在． □

では $2^n L$ ではなく，一般の L についてはどうか？これも O.K.

Lemma 2.1.3. やはり *Ising model*, *FBC* を考える．一辺 L の超立方体を考えると f_L の $L \rightarrow \infty$ の極限は存在し，極限は当然上の f_∞^{FBC} と一致する．つまり，

$$f_\infty^{\text{FBC}} = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L \quad (2.1.20)$$

Proof. 一辺 $2^n L$ の (大きな) 超立方体を考え，これを 2 通りに分割する．

1. 一辺 L の立方体を $(2^n)^d$ 個つくる (図 1 (c))
2. 一辺 2^n の立方体を L^d 個つくる (図 1 (b))

Lemma 2.1.1 の証明と同様に考えると，1 の分け方では

$$|\Delta\mathcal{H}| \leq Jd \cdot (L2^n)^{d-1} 2^n \quad (2.1.21)$$

また，2 の分け方では

$$|\Delta\mathcal{H}| \leq Jd \cdot (L2^n)^{d-1} L \quad (2.1.22)$$

となる．従って

$$\left| f_{2^n L}^{\text{FBC}} - f_L^{\text{FBC}} \right| \leq \frac{Jd \cdot (L2^n)^{d-1} 2^n}{(2^n L)^d} = \frac{Jd}{L} \quad (2.1.23)$$

および

$$\left| f_{2^n L}^{\text{FBC}} - f_{2^n}^{\text{FBC}} \right| \leq \frac{Jd \cdot (L2^n)^{d-1} L}{(2^n L)^d} = \frac{Jd}{2^n} \quad (2.1.24)$$

を得る．よって

$$\left| f_L^{\text{FBC}} - f_{2^n}^{\text{FBC}} \right| \leq \frac{Jd \cdot (L2^n)^{d-1} 2^n}{(2^n L)^d} = Jd \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{2^n} \right) \quad (2.1.25)$$

となつて，まず $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\left| f_L^{\text{FBC}} - f_\infty^{\text{FBC}} \right| \leq \frac{Jd \cdot (L2^n)^{d-1} 2^n}{(2^n L)^d} = \frac{Jd}{L} \quad (2.1.26)$$

を得る．これは $L \rightarrow \infty$ で f_L^{FBC} が f_∞^{FBC} に収束することを意味する． □

2.1.3 FBC の Free Energy の熱力学的極限 — 一般の場合

さて、今度は Λ が立方体とは限らない場合を考えよう。ただ、あまり無茶苦茶をやっても仕方ないから以下のように制限して考える。まず、 \mathbb{R}^d 中に十分滑らかな境界をもつ単連結領域 Ω を固定し、これを $a \gg 1$ 倍したものを Ω_a 、また Ω_a と \mathbb{Z}^d の intersection を Λ とする：

$$\Omega_a \equiv a\Omega, \quad \Lambda_a = a\Omega \cap \mathbb{Z}^d \quad (2.1.27)$$

それで我々は極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}}$ が存在するかどうかを問題にしたい。

さて、 $L \ll a$ なる L を固定し、 Λ_a を一辺 L の立方体で埋め尽くすことを考えよう（図 1 (d) 参照）。一辺 L の立方体のうち、完全に Λ_a の中に入っているものを N 個、不完全に引っかかっているものを n 個としよう。そして、完全に Λ_a の中に入っている L^d でできた部分を Λ'_a と書くことにする（図 1 (d) の影をつけた部分）。

さて、

Lemma 2.1.4. $\Lambda_a, \Lambda'_a, L^d$ のそれぞれでの *free energy* について、以下の関係式が成り立つ。

$$|f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}}| \leq 2dJ + |H| \quad (\text{これは } \Lambda'_a \text{ や } L^d \text{ でも成り立つ}) \quad (2.1.28)$$

$$|f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - f_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}}| \leq \frac{|\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|}{|\Lambda'_a|} \times (3dJ + |H|) \quad (2.1.29)$$

$$|f_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}} - f_{L^d}^{\text{FBC}}| \leq \frac{4dJ}{L} \quad (2.1.30)$$

(2.1.29) と (2.1.30) をあわせると

Lemma 2.1.5.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|}{|\Lambda'_a|} = 0 \quad (2.1.31)$$

となるような Ω の選び方については、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} = f_{\infty}^{\text{FBC}} \quad (2.1.32)$$

が成立する。ここで f_{∞}^{FBC} とは超立方体の極限として定義された、(2.1.20) の *free energy* である。

Proof. 簡単である。(2.1.29) と (2.1.30) から

$$|f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - f_{L^d}^{\text{FBC}}| \leq \frac{|\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|}{|\Lambda'_a|} \times (3dJ + |H|) + \frac{4dJ}{L} \quad (2.1.33)$$

が得られるが、ここで $a \rightarrow \infty$ として

$$\left| \lim_{a \rightarrow \infty} f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - f_{L^d}^{\text{FBC}} \right| \leq \frac{4dJ}{L} \quad (2.1.34)$$

を得る（本当は極限があるかどうかはわからないから上の書き方は少しウソだが、要するに $f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}}$ の部分列の全てについてこの式が成り立っているということ）。ここで $L \rightarrow \infty$ を考えると Lemma を得る。□

Proof of Lemma 2.1.4.

まず、(2.1.28) について。

$$f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} \equiv \frac{1}{|\Lambda_a|} \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x, \quad \eta(\varphi) = \delta(\varphi^2 - 1) \quad (2.1.35)$$

の定義を思い出そう。個々のスピンについての和 $\eta(\varphi) d\varphi$ は規格化されているから、*free energy* を定義する積分は単にハミルトニアンの上限、下限さえ押さえれば評価できる。つまり、

$$f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} \leq \frac{1}{|\Lambda_a|} \log \exp\left(\sup_{\Phi} -\mathcal{H}^{\text{FBC}}(\Phi)\right) = \frac{1}{|\Lambda_a|} \sup_{\Phi} \left(-\mathcal{H}^{\text{FBC}}(\Phi)\right) \leq dJ + |H| \quad (2.1.36)$$

となる。最後のところでは実際に Λ_a 中のハミルトニアンが最大になる場合を考えた。下限についても同様である。

次に, (2.1.29) について. 定義 (2.1.35) を見ると, $f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}}$ と $f_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}}$ の違いは2つの部分から来ることがわかる: (1) それぞれの積分の違いと (2) 分母の体積の違い, である. 細かい計算に入る前に, Λ_a 中のサイトの数は大体

$$|\Lambda_a| \approx |\Omega_a| = a^d |\Omega| \quad (2.1.37)$$

であり ($|\Omega|$ は \mathbb{R}^d 中での Ω の体積), また一辺 L の立方体の中心が L 毎に並んでいることを考えると,

$$N \approx \left\lfloor \frac{a}{L} \Omega \right\rfloor, \quad \frac{n}{N} \approx \frac{|\partial(\frac{a}{L}\Omega)|}{|\frac{a}{L}\Omega|} \quad (2.1.38)$$

であることに注意しておこう.

(2) の方から行こう. Λ_a と Λ'_a はフチのギザギザの部分が入っているかないかの違いであるから,

$$0 \leq \frac{|\Lambda_a|}{|\Lambda'_a|} - 1 = \frac{|\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|}{|\Lambda'_a|} \approx \frac{n}{N} \approx \frac{|\partial(\frac{a}{L}\Omega)|}{|\frac{a}{L}\Omega|} \quad (2.1.39)$$

この量は $\frac{a}{L} \rightarrow \infty$ の限り, ゼロに行く.

(1) の方とは言う, $\eta(\varphi)d\varphi$ が規格化されているので, 積分の違いは非積分関数, 特に \mathcal{H}^{FBC} の違いのみから出ることにまず注意しよう. それで \mathcal{H}^{FBC} の違いと言うのは Λ_a と Λ'_a の違いの部分から出るが, 今は n.n. model を考えているので,

$$|\mathcal{H}_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - \mathcal{H}_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}}| \leq 2dJ \times |\Lambda_a \setminus \Lambda'_a| \quad (2.1.40)$$

がどのような spin configuration についても成り立つ. 従って, Λ_a と Λ'_a の非積分関数同士の比は $\exp(\pm 2dJ \times |\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|)$ で押さえられ, その積分同士の比もこれで押さえられる. \log を取った形で書くと,

$$\Delta I \equiv \left| \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x - \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda'_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right| \leq 2dJ \times |\Lambda_a \setminus \Lambda'_a| \quad (2.1.41)$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} \left| f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - f_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}} \right| &\leq \left| \frac{1}{|\Lambda_a|} - \frac{1}{|\Lambda'_a|} \right| \times \left| \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right| \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda'_a|} \left| \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x - \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda'_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right| \\ &= \left| 1 - \frac{|\Lambda_a|}{|\Lambda'_a|} \right| \times \left| f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} \right| + \frac{1}{|\Lambda'_a|} \Delta I \\ &\leq \frac{|\Lambda_a \setminus \Lambda'_a|}{|\Lambda'_a|} \times (dJ + |H| + 2dJ) \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

となる. 最後のところでは (2.1.28), (2.1.39), (2.1.41) を用いた.

最後に (2.1.30) について. アイディアは今までと同じで, Λ'_a と, これを一辺 L の立方体に分けたものの差を考える. すると,

$$\begin{aligned} \left| f_{\Lambda'_a}^{\text{FBC}} - f_{L^d}^{\text{FBC}} \right| &\leq \frac{(L^d \text{ ブロックの隣り合った面の数})}{(L^d \text{ ブロックの数})} \times \frac{2JL^{d-1}}{L^d} \\ &\leq 2d \times \frac{2J}{L} = \frac{4dJ}{L} \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

が相変わらず成立する. ここでどのような場合でも, 一つのブロック辺りの隣接面の数は $2d$ より小さいことを用いた (この数は大抵の場合, d よりも小さいが, 変態な形の場合を考えて多く見積もった.) \square

2.1.4 一般の BC に対する free energy の極限の存在

最後に, 一般の BC を考えよう. 状況は 2.1.3 節と同じで, ただ, BC が一般になっている. 実はこの場合に要求されるのは (2.1.29) の証明 (の一部) と同様の議論である.

今は考えている領域の体積は同じだから，free energy の違いは積分の違いからのみ生じるが，これはハミルトニアンの違い，つまり \mathcal{H}^{BC} の存在の有無から生じる．そこで \mathcal{H}^{BC} を評価することになるが，PBC でも +BC でも，

$$|\mathcal{H}^{\text{BC}}| \leq 2dJ \times |\partial\Lambda_a| \quad (2.1.44)$$

が成立する．この式は (2.1.40) に相当するものであるので，(2.1.41) を導出したときと同じようにして

$$\left| \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{FBC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x - \log \int e^{-\mathcal{H}^{\text{BC}}} \prod_{x \in \Lambda_a} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right| \leq 2dJ \times |\partial\Lambda_a| \quad (2.1.45)$$

を得る． $|\Lambda_a|$ で割ると

$$\left| f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} - f_{\Lambda_a}^{\text{BC}} \right| \leq 2dJ \times \frac{|\partial\Lambda_a|}{|\Lambda_a|} \quad (2.1.46)$$

となるので，

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{|\partial\Lambda_a|}{|\Lambda_a|} = 0 \quad (2.1.47)$$

である限り $f_{\Lambda_a}^{\text{FBC}}$ と $f_{\Lambda_a}^{\text{BC}}$ は同じ極限值を持つことが証明された．

以上をまとめて

Theorem 2.1.6. *N.N. Ising model* に対しては，free energy の無限体積極限は，FBC, PBC, +BC の全てについて存在し，かつ極限は等しい．この場合，考える Λ も非常に一般的なものでよく，例えば (2.1.31) を満たせば十分である．

なお，以上の証明を見ると，上の定理は非常に広範なモデルについて証明できることが納得できるであろう．

2.2 期待値の熱力学的極限に関する基本的なアイデア

ヤヤコシイ話に入る前に，問題を整理すると共に，どのような手段で熱力学的極限に迫っていくのか，その概略を述べておこう．

考えたいのは例えば FBC での熱力学的期待値である．特に ($A \subset \Lambda$ に対して $\varphi^A \equiv \prod_{x \in A} \varphi_x$ と書く)

$$\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda}^{\text{BC}} \equiv \frac{\int d^{\Lambda}\Phi \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) e^{-\mathcal{H}_{\Lambda} - \mathcal{H}_{\Lambda}^{\text{BC}}} \varphi^A}{\int d^{\Lambda}\Phi \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) e^{-\mathcal{H}_{\Lambda} - \mathcal{H}_{\Lambda}^{\text{BC}}}} \quad (2.2.1)$$

を考え，これの $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ の極限が存在するか否かを問題にしたい．勿論， $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ とは言っても色々な行き方があるから，その行き方も含めて考えなければならない．なお，この極限は A や BC にはよるだろうと思われる．実際 (あるパラメーター領域では) BC に依存することを後の章で見るとある．

さて，この問題に対する武器は大きく分けて2つある：

1. $|\Lambda|$ に関して一様に $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda}^{\text{BC}}$ が押さえられていること，つまり $|\Lambda|$ によらない定数 C_A^{BC} が存在して (C_A^{BC} は A や BC にはよってもよい)

$$|\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda}^{\text{BC}}| \leq C_A^{\text{BC}} \quad (2.2.2)$$

が成立すること (大抵の場合，定数 C_A^{BC} は BC にはよらないことがしめされるが，別に BC によっても問題はない)

2. FBC, または +BC については $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda}^{\text{BC}}$ が Λ について単調である，つまり $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ の場合，

$$\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}} \leq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{\text{FBC}}, \quad \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{+\text{BC}} \geq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{+\text{BC}} \quad (2.2.3)$$

が成り立つこと．

さて、まず FBC の場合 . (2.2.2) から期待値は有界であるが、これは同時に (2.2.3) から単調増加列である — 少なくとも $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_n \dots$ なる Λ_i の列については $a_i \equiv \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_i}^{\text{FBC}}$ は単調非減少になっている :

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \quad (2.2.4)$$

有界な単調列は必ず収束するから、少なくともこの Λ_i の列については

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_i}^{\text{FBC}} \quad (2.2.5)$$

が存在することがわかる . 勿論、別の Λ_i の列をとれば極限がどうなるかが気になるところであるが、これも単調性から極限が一意であることがわかる (詳細は後の ?? 節) .

+BC についても (単調増加が単調減少になるだけで) 全く同じ .

最後に PBC についてコメントしよう . 実は PBC については有界性しか言えていない (言えていないだけではなく、 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_n \dots$ の取り方によっては実際に単調性が壊れていると思われる) . だからこれまでの議論だけでは一意的な極限の存在は言えない . 言えるのはせいぜい $\{\Lambda_i\}$ の中から適当な収束部分列を抜き出すと極限が存在する、と言った程度のことである (この際、全てのパラメーター値について同じ部分列をとりたい . そのためには「対角線論法」を用いる必要がある . 後述 .)

2.3 諸量の単調性

では、我々の武器の一つである、諸量の単調性について考える . このためには「相関不等式」と呼ばれる、相関関数の間に成立する不等式が重要な働きをする . 相関不等式の証明は今まで (およびこれから) の議論と独立に行えるので、相関不等式については Appendix でまとめて扱うことにして、ここでは結果だけを引用する .

この節では GKS II 不等式 (Theorem A.2.2) から FBC (+BC) での correlations が体積の単調増加 (減少) 列であることを示す . まず、基本的な単調性から見ていこう .

Proposition 2.3.1. 有限体積の期待値を考える . $J_{xy}, h_x \geq 0$ の場合、 $\langle \varphi^A \rangle$ は J_{xy}, h_x のそれぞれについて単調非減少である . また、有限体積での free energy f_Λ^{BC} も J_{xy}, h_x のそれぞれについて単調非減少である .

Proof. 単純に $\langle \varphi^A \rangle$ を J_{xy} や h_x で微分してみて、導関数が非負であることを見ればよい . ただし、無限体積極限での期待値 $\langle \varphi^A \rangle$ を直接微分できるかどうかは明らかではないので、有限体積における期待値 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ を微分してその単調性をまず証明する (すると、無限体積での期待値は有限体積でのものの極限だから、これも単調であることはすぐにでる .)

さて、 $x, y \in \Lambda$ のとき、

$$\frac{\partial}{\partial J_{xy}} \langle \varphi^A \rangle_\Lambda = \langle \varphi^A; \varphi_x \varphi_y \rangle_\Lambda, \quad \frac{\partial}{\partial h_x} \langle \varphi^A \rangle_\Lambda = \langle \varphi^A; \varphi_x \rangle_\Lambda \quad (2.3.1)$$

であるが、これらは Griffiths II 不等式 (Theorem A.2.2) により、非負である . 従って、 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が非減少であることが結論できる . Free energy の方はもっと簡単で、

$$\frac{\partial}{\partial J_{xy}} f_\Lambda^{\text{BC}} = \frac{1}{|\Lambda|} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_\Lambda^{\text{BC}}, \quad \frac{\partial}{\partial h_x} f_\Lambda^{\text{BC}} = \frac{1}{|\Lambda|} \langle \varphi_x \rangle_\Lambda^{\text{BC}} \quad (2.3.2)$$

となるが、これらは Griffiths I 不等式 (Theorem A.2.1) により非負 . □

Proposition 2.3.2. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$ の場合について、 $A \in \Lambda_1$ なる A に対して、 $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_j}^{\text{BC}}$, ($j = 1, 2$) を比較すると

$$\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}} \leq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{\text{FBC}} \quad (2.3.3)$$

$$\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{+\text{BC}} \geq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{+\text{BC}} \quad (2.3.4)$$

である .

Proof. FBC の場合に $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}}$ と $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{\text{FBC}}$ を比較するには, $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}}$ を少し書き換えてみる. もともと, $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}}$ は Λ_1 上のスピンの FBC を課して考えたものである. しかし, ここで Λ_2 上のスピン全体に対してそのハミルトニアンは Λ_1 上の FBC のもの, つまり

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{\substack{u,v \in \Lambda_1 \\ |u-v|=1}} \varphi_u \varphi_v \quad (2.3.5)$$

とした期待値を考え, これを $\langle \cdot \rangle_0$ と書くと, $A \in \Lambda_1$ の限り, $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}} = \langle \varphi^A \rangle_0$ が成り立つ. と言うのも, Λ_1 の外側のスピンは Λ_1 内のスピンとなんの相互作用もしていないので, この部分のスピンについての和は期待値の定義式の分子でうち消しあうからである.

すなわち, $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{\text{FBC}}$ に現れている相互作用に $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ の部分の相互作用 (J_{uv}, h_u) を付け加えたものが $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{\text{FBC}}$ なのである. 従って, Proposition 2.3.1 の単調性により, (2.3.3) が結論される.

+BC の時も同様に考える. $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_1}^{+\text{BC}}$ は, $\langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_2}^{+\text{BC}}$ において, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ の部分の磁場を無限大にしたものと考えることができる (磁場を無限大にすると $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ にあるスピンの値は +1 になってしまうので). 従って, Proposition 2.3.1 の単調性により, (2.3.4) が結論される. \square

2.4 FBC, +BC の期待値の無限体積極限の存在

前節で FBC または +BC での $\langle \varphi^A \rangle$ が, 体積に関して単調である事を見た. 一方, Ising model に関しては $\varphi_x = \pm 1$ であるから,

$$0 \leq \langle \varphi^A \rangle \leq 1 \quad (2.4.1)$$

がいつも成立する (lower bound は Griffiths I 不等式より).

Ising に限らず, 少しだけ一般的に議論するために, 以下を仮定する. 言うまでもなく, 以下は Ising model に対しては成り立っている.

Assumption 2.4.1. A によって決まる定数 C_A (Λ にはよらない) があって,

$$0 \leq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda} \leq C_A \quad (2.4.2)$$

が全ての有限格子 Λ で成立する.

さて, (2.4.1) またはその一般化の (2.4.2) が成立していると, これから直ちに,

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \subset \cdots \quad (2.4.3)$$

なる単調列については

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_n} \quad (2.4.4)$$

が (各単調列, 各境界条件ごとに) 存在することがわかる (なぜなら, これは有界, かつ単調な数列になるから.) 問題はこの極限の一意性であるが, これには増大列 $\{\Lambda_n\}$ の取り方を少し制限する必要がある.

あまり一般的にやっても仕方ないから \mathbb{R}^d 内の有界領域 Ω を固定し, $a \gg 1$ に対して

$$\Lambda_a \equiv a\Omega \cap \mathbb{Z}^d \quad (2.4.5)$$

として Ω を引き伸ばした形の格子領域を定義する. Ω への条件としては Ω が (いくら小さくても良いがともかく半径が正の) d -次元球を含んでいることを要求する. この定義に関して $\lim_{a \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}$ が FBC, +BC 毎に存在し, かつこれは Ω の取り方によらないことをこれから示す.

まず, reference として, 超立方体の極限として作った期待値を

$$\langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{\text{BC}} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{\text{BC}} \quad (2.4.6)$$

と書くことにする．ここで $\langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{\text{BC}}$ は BC の下での，一辺 L の超立方体における期待値である．この極限があることは上で見たとおり．これは特に，

$$\forall \epsilon > 0 \exists L_0 \text{ s.t. } L \geq L_0 \text{ implies } \begin{cases} 0 \leq \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{\text{FBC}} - \langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{\text{FBC}} < \epsilon \\ 0 \geq \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{+\text{BC}} - \langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{+\text{BC}} > -\epsilon \end{cases} \quad (2.4.7)$$

ということを意味する．

さて， Ω を一つ固定して Λ_a を作り， $a \rightarrow \infty$ とすることを考える．任意に小さい $\epsilon > 0$ をとり，この ϵ に対して (2.4.7) が成り立つような L_0 を単に L と書く．今， a を十分に大きくとると，この L ，および適当に大きくとった N に対して

$$(L)^d \subset \Lambda_a \subset (NL)^d \quad (2.4.8)$$

とする事ができる（左側の不等式は Ω が小さな d -次元球を含むことから．右側の不等式は Ω が有界なことから）．FBC と +BC の単調性からこれは

$$\langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{\text{FBC}} \leq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} \leq \langle \varphi^A \rangle_{(NL)^d}^{\text{FBC}}, \quad \langle \varphi^A \rangle_{L^d}^{+\text{BC}} \geq \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{+\text{BC}} \geq \langle \varphi^A \rangle_{(NL)^d}^{+\text{BC}} \quad (2.4.9)$$

ということである．すなわち，

$$0 \leq \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{\text{FBC}} - \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} < \epsilon \quad 0 \geq \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{+\text{BC}} - \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{+\text{BC}} > -\epsilon \quad (2.4.10)$$

が成立し，従って

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{\text{FBC}} = \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{\text{FBC}}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \langle \varphi^A \rangle_{\Lambda_a}^{+\text{BC}} = \langle \varphi^A \rangle_{\infty}^{+\text{BC}} \quad (2.4.11)$$

が成り立つ．つまり，FBC, +BC に関しては自然な無限体積極限が存在することが示された．

2.5 PBC の熱力学極限 — 対角線論法

講義では時間の関係上，詳しく触れることが出来なかった．要するに，部分列をとって極限を構成するのである．こここのところをもっと詳しく説明したかったのだが，時間切れのようだ．興味のある方は [3][Theorem 3.2.2] をご覧いただきたい．

3 相転移の存在

この節では，高温側と低温側では定性的に異なった振る舞いが見られる事を説明し，「相転移」の概念を導入する．

3.1 高温側の振る舞い（一般の mixing がマダ）

高温側では相関関数が exponential decay していて性質が非常に良い，ことを示す．言いたいことの例としては以下がある．

Proposition 3.1.1. FBC または +BC の *n.n.* Ising 系で， $H = 0$ の場合を考える．

$$J < J_{MF} \equiv \frac{1}{2d} \quad (3.1.1)$$

である限り，以下が成り立つ．

(i) 帯磁率は有限である．つまり， $\chi(J) < \infty$ ．

(ii) $\langle \varphi_x \varphi_y \rangle$ は指数関数的に減少する．すなわち $m > 0$ が存在して，

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \text{const. } e^{-m|x|}. \quad (3.1.2)$$

この定理には色々な証明方法があるが，以下では相関不等式を用いた簡単な方法を紹介する．

3.1.1 「Simon 不等式」を使う方法

「Simon 不等式」にはいくつかの version があるが、ここでは (A.4.2) を用いることにする。さて、(A.4.2) の状況に於いて、 $A = \{x\}$, $C = \Lambda \setminus A$ ととってしまう事にする。すると (A.4.2) は

$$J_{xz} \equiv \begin{cases} J & (|x - z| = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

なる n.n. model に対して、 $x \neq y$ である限り、

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_z J_{xz} [\langle \varphi_x \varphi_x \rangle \langle \varphi_z \varphi_y \rangle + \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle] = J \sum_{z:|z-x|=1} [\langle \varphi_z \varphi_y \rangle + \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle] \quad (3.1.4)$$

が得られる。これは更に

$$\leq J \sum_{z:|z-x|=1} [\langle \varphi_z \varphi_y \rangle + \langle \varphi_x \varphi_y \rangle] \leq 2dJ \max_{z:|z-x|\leq 1} \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \quad (3.1.5)$$

と押さえることが出来る。さて、右辺に出てきた $\langle \varphi_z \varphi_y \rangle$ については $z \neq y$ である限り上と同じ議論を行うことが出来る。その結果、

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq 2dJ \max_{z:|z-x|\leq 1} \left[2dJ \max_{z':|z'-z|\leq 1} \langle \varphi_{z'} \varphi_y \rangle \right] \leq (2dJ)^2 \max_{\|z'-x\|_1 \leq 2} \langle \varphi_{z'} \varphi_y \rangle \quad (3.1.6)$$

が得られる。以下、これをくり返してやりたいのだが、 $\|x - y\|_1 = \ell$ とすると、最低 ℓ 回、くり返すことが出来る ($\ell - 1$ 回目までの結果では右辺に出てくる $z' \neq y$ が保証されているから)。従って、

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq (2dJ)^\ell \max_{\|z-x\|_1 \leq \ell} \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \leq (2dJ)^\ell \quad (3.1.7)$$

を得る (最後のところでは $\langle \varphi_z \varphi_y \rangle \leq 1$ を用いた)。つまり、 $2dJ < 1$ の限り、 $\langle \varphi_x \varphi_y \rangle$ が $\ell \equiv \|x - y\|_1$ について指数関数的に減少することが言えた。また、(3.1.7) を y について和をとって、

$$\chi(J) \equiv \sum_y \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_y (2dJ)^{\|x-y\|_1} < \infty \quad (3.1.8)$$

と、帯磁率の有限性も言える。以上で Proposition 3.1.1 の (i), (ii) が証明された。

3.2 低温側の振る舞い

ここでは低温側を考える。十分低温ならば「自発磁化」が存在することが目標である。

Theorem 3.2.1. *N.n.* イジングモデルを考える。 $d \geq 2$ では有限の $J_0(d)$ があって、 $J > J_0(d)$ では

$$M_s \equiv \lim_{H \searrow 0} \langle \varphi_0 \rangle^{\text{PBC}} \geq \frac{1}{2} \quad (3.2.1)$$

が成立。ここで $J_0(d) = 0.71$ ととって良い。

Remark. 証明を見ればわかるが、キーになるのはスピンのポテンシャルに二山あって、+ を向いているのと - を向いているのエネルギー差が $O(J)$ くらい、ということである。であるから、 φ^4 モデルでも (もっと頑張れば) 同様の証明は可能である。また、n.n. でない場合も、finite range interaction でありさえすれば同様の証明が可能。

Remark. ただし、スピンの成分が 2 以上になった場合は話が別。この場合、ポテンシャルの二山と言う感じが使えず、結果的に証明はできない。実際、 $d = 2$ の多成分系ではこのタイプの相転移はないことが証明されている。

3.2.1 +BC での自発磁化

証明の細部に入る前に、大体のアイデアを説明しよう — energy vs entropy — (1次元では相転移がないことも含めて)。

Lemma 3.2.2. *N.N. Ising, $d \geq 2, J \geq 0.71$ を考える。 $H \geq 0$ に対しては,*

$$\langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC} \geq \frac{1}{2} \quad (3.2.2)$$

が $a \in \Lambda$ の限りいつでも ($|\Lambda|$ によらず) 成り立つ。

Proof. まず, Griffiths II より $H \geq 0$ で

$$\langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, H) \Big|_{d\text{-dim}} \geq \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, H) \Big|_{2\text{-dim}} \geq \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, 0) \Big|_{d\text{-dim}} \quad (3.2.3)$$

であることに注意。右辺の $d = 2, H = 0$ を下から押さえれば十分なので、以下では2次元のみを考える。さて、 Λ の boundary を $\partial\Lambda$ と書くと、つまり

$$\partial\Lambda \equiv \{x \in \Lambda \mid \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |x - y| = 1\} \quad (3.2.4)$$

とすると、注目の期待値は

$$Z_{\Lambda}^{+BC} \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, 0) = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \varphi_a \exp\left(\frac{J}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y + J \sum_{x \in \partial\Lambda} \varphi_x\right) \quad (3.2.5)$$

と書ける。

これから、spin configuration $\{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$ と “contour” の間に関係をつけていく。Spin configuration $\{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$ を一つ固定しよう。各スピンは ± 1 であるので、 $+1$ と -1 の間に線を引いていくことにする。今、 Λ の外はすべて $+1$ だから (+BC)、これらの線はすべて閉じたループになる。

ここで、線をつないで closed loops を作る場合、ambiguity は残る。つまり、... これらの線を contour と呼ぼう。

こうすると、spin configuration から contour の集まりへの mapping が作れる。一方、 Λ の外はすべて $+1$ であることを考えに入れると、contour configuration から spin configuration を再現することもできる — 要するに、boundary の $+1$ から出発して、contour をまたぐ毎にスピンの符号をひっくり返せば良い。

と言うわけで、spin configuration と contour configuration を 1対1 に対応させることができた。以下、spin configuration の代わりに contour configuration を考えていく。すると、 c で一つの contour configuration を表すことにして (φ_a の値も c によるので、それを $\varphi_a(c)$ と書く)

$$\langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, 0) = \frac{\sum_{\mathbf{c}} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})} \varphi_a(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})}} = \frac{\sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=+1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})} - \sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=-1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})}}{\sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=+1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})} + \sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=-1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})}} \quad (3.2.6)$$

と書くことができる。以下、記号を簡単にするため、 $\varphi_a(\mathbf{c}) = +1$ なる contour configuration を c_+ 、 $\varphi_a(\mathbf{c}) = -1$ なる contour configuration を c_- と書くことにする。すると、

$$\langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{+BC}(J, 0) = \frac{\sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=+1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})} - \sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=-1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})}}{\sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=+1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})} + \sum_{\mathbf{c}: \varphi_a(\mathbf{c})=-1} e^{-\mathcal{H}(\mathbf{c})}} = \frac{1 - \frac{\sum_{c_-} e^{-\mathcal{H}(c_-)}}{\sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)}}}{1 + \frac{\sum_{c_-} e^{-\mathcal{H}(c_-)}}{\sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)}}} \quad (3.2.7)$$

となるので、要するに

$$\frac{\sum_{c_-} e^{-\mathcal{H}(c_-)}}{\sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)}} \stackrel{??}{\ll} 1 \quad (3.2.8)$$

などが言えれば十分なわけである．以下，(3.2.8) を目指す．

さて，(3.2.8) の分子に現れている c_- を任意の一つとる．ここでは $\varphi_a(c_-) = -1$ だから，+BC から a に行くまでに奇数個の contour を通過するはずである．特に， a を囲む contour が少なくとも一つある．そこで， a を囲む，最も内側の contour を C_a と書くことにしよう．

さて， c_- から C_a を抜いた contour configuration を考えると，これは c_+ の一つになっている．(なぜなら，contour configuration であることには変わりなく，かつ $\varphi_a(c_- \setminus C_a) = +1$ だから．この場合，contour が一つもない configuration，つまり全てのスピンの $+1$ の configuration，も c_+ の一つとみなす．) つまり，

$$c_- \mapsto c_- \setminus C_a \quad (3.2.9)$$

と言うのは， $\{c_-\}$ から $\{c_+\}$ への(多対一の)写像になっているわけ¹⁰．そこで，この「多対一」のところまで考えに入れると，以下の等式が成り立つ：

$$\sum_{c_-} (\dots) = \sum_{c_+} \sum_{C_a} (\dots) \quad (3.2.10)$$

ここで C_a は「 a を囲む contour で，でも c_+ の一番内側の contour よりも内側にあるもの」についての和を表す．以上をもう一回まとめると， c_- についての和を「一番内側の C_a 」と「その外側の c_+ 」の和に分解した訳だ．

後はこの公式に $(\dots) = e^{-\mathcal{H}}$ を入れて計算すればよい． $c_- = c_+ \cup \{C_a\}$ の場合，

$$\mathcal{H}(c_-) = \mathcal{H}(c_+ \cup C_a) = \mathcal{H}(c_+) + 2J|C_a| \quad (3.2.11)$$

が成り立つ．なぜなら， $\mathcal{H}(c_-)$ は $\mathcal{H}(c_+)$ よりも C_a の分だけエネルギーを損しているから．このエネルギーの損はボンド一個あたり $2J$ なのだ．それで結局，

$$\sum_{c_-} e^{-\mathcal{H}(c_-)} = \sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)} \sum_{C_a} (\dots) e^{-2J|C_a|} \quad (3.2.12)$$

となる．ここで C_a についての和には (3.2.10) と同じ条件が付いている．しかし，ここでこの条件を取り払って「 a を囲む全ての contour」について和をとることにすると，これは upper bound になる．つまり，

$$\leq \sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)} \sum_{C_a: a \text{ を囲む}} e^{-2J|C_a|} = \left(\sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)} \right) \left(\sum_{C_a: a \text{ を囲む}} e^{-2J|C_a|} \right) \quad (3.2.13)$$

が得られる．すなわち，

$$\frac{\sum_{c_-} e^{-\mathcal{H}(c_-)}}{\sum_{c_+} e^{-\mathcal{H}(c_+)}} \leq \sum_{C_a: a \text{ を囲む}} e^{-2J|C_a|} \quad (3.2.14)$$

となった．と言うわけで，(3.2.14) の右辺が小さければ (3.2.8) が成り立つ事になる．

最後に，(3.2.14) の右辺の和を評価し，どのような場合にこいつが小さいのか考えよう． C_a の長さで分類して書くと，

$$\sum_{C_a: a \text{ を囲む}} e^{-2J|C_a|} = \sum_{\ell=4}^{\infty} e^{-2J\ell} \#\{a \text{ を囲む長さ } \ell \text{ の contour}\} \quad (3.2.15)$$

と言うことである． a を囲む contour で最小のものは一辺 1 の正方形だから， ℓ の和は 4 から始まっている．さて， a を囲む長さ ℓ の contour の数はと言うと，

- ある点から出発する SAW の数は $4 \times 3^{\ell-1}$
- 今は a を囲む contour なので，出発点は ℓ^2 個ぐらいある．同じ周の長さなら円の場合に内部の点の数は最大で，この場合， $\pi \times \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4\pi}$ 個の点を含みうる．しかし，今は格子上の contour を考えているので，最も多くの内部点含めるのは正方形の場合である．このとき，正方形の一辺は $\ell/4$ であるから，出発点の数は $(\ell/4)^2 = \ell^2/16$ 以下であることは間違いない．

¹⁰多対一というのは， c_- の一番中側の contour がどうであれ，同じ c_+ に写像されてしまうから

- ただし, 同じ contour でもその contour 上のどの点から出発するかで ℓ 通り, 重複して数えている

ことから

$$4 \times 3^{\ell-1} \times (\ell^2/16)/\ell = \frac{1}{12} 3^\ell \cdot \ell \quad (3.2.16)$$

と評価できる. 従って (ℓ は偶数しかないことも考えに入れて)

$$\begin{aligned} \sum_{C_a: a \text{ を囲む}} e^{-2J|C_a|} &\leq \sum_{\ell \geq 4, \text{even}} e^{-2J\ell} \times \frac{1}{12} 3^\ell \cdot \ell = \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-4Jn} 9^n 2n = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{\infty} (9e^{-4J})^n n \\ &= \frac{1}{6} \frac{(9e^{-4J})^2 (2 - 9e^{-4J})}{(1 - 9e^{-4J})^2} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

これが $1/3$ より小さいためには $9e^{-4J} < 0.5391888728$, つまり $J > 0.7037284834$ なら十分. なお, ギリギリまで J_c を評価したいなら, 上の < 1 となる条件を求めれば良いわけで, このときの J の閾値は 0.6454351008 くらいとなる. \square

3.2.2 PBC での自発磁化

ここで free energy の熱力学的極限が大きな役割を果たす. まず,

Lemma 3.2.3.

$$f_\Lambda^{\text{BC}} \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda^{\text{BC}}(J, H) \quad (3.2.18)$$

は, H の関数として *convex* (下に凸) である.

Proof. 単に H で微分すればよい.

$$\frac{\partial f_\Lambda}{\partial H} = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_\Lambda \geq 0 \quad (\text{Griffiths I により}) \quad (3.2.19)$$

$$\frac{\partial^2 f_\Lambda}{\partial H^2} = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x; \sum_{y \in \Lambda} \varphi_y \right\rangle_\Lambda \geq 0 \quad \left(\sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \text{ の variance } \right) \quad (3.2.20)$$

と言うわけ. \square

さて, $f_\Lambda^{\text{BC}}(J, H)$ が H に関して *convex* なことから $H_0 > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}}(J, 0) &= \frac{\partial f_\Lambda^{\text{BC}}(J, H)}{\partial H} \Big|_{H=0} \\ &\leq \frac{f_\Lambda^{\text{BC}}(J, H_0) - f_\Lambda^{\text{BC}}(J, 0)}{H_0} \\ &\leq \frac{\partial f_\Lambda^{\text{BC}}(J, H)}{\partial H} \Big|_{H=H_0} = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}}(J, H_0) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

が FBC, PBC, +BC のどれでも成立. そこで, ここで $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ を考えると, f_Λ 自身は BC に関係なく, 共通の f_∞ に行く. 左右両辺は (必要なら部分列をとって) それぞれの熱力学的期待値に行く. つまり,

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}}(J, 0) &= \frac{\partial f_\infty(J, H)}{\partial H} \Big|_{H=0} \\ &\leq \frac{f_\infty(J, H_0) - f_\infty(J, 0)}{H_0} \leq \\ \frac{\partial f_\Lambda^{\text{BC}}(J, H)}{\partial H} \Big|_{H=H_0} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_\Lambda^{\text{BC}}(J, H_0) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

この形になると、もはや左辺と右辺で別々の BC を使うことも可能であり、一般に別々の BC と BC' についても

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_{\Lambda}^{\text{BC}}(J, 0) \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle_{\Lambda}^{\text{BC}'}(J, H_0) \quad (3.2.23)$$

が成り立つことがわかった．そこで左辺には +BC, 右辺には PBC を使ってみよう．Lemma 3.2.2 により、有限の Λ で一様に ($x \in \Lambda$ の限り)

$$\langle \varphi_x \rangle_{\Lambda}^{+\text{BC}} \geq \frac{1}{2} \quad (3.2.24)$$

が成り立つ事が保証されている．従って、左辺は $\frac{1}{2}$ より大きい．一方、右辺の PBC では並進不変性から $\langle \varphi_x \rangle_{\Lambda}^{\text{PBC}} = \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{\text{PBC}}$ であって、右辺は正に $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{\text{PBC}}$ になっている．すなわち、

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \varphi_a \rangle_{\Lambda}^{\text{PBC}}(J, H_0) = \langle \varphi_a \rangle_{\infty}^{\text{PBC}}(J, H_0) \quad (3.2.25)$$

が得られた（無限系の PBC での期待値を — 必要なら subsequence をとって — $\langle \dots \rangle_0$ で表した）．ここで $H_0 \searrow 0$ とすると、右辺は PBC での自発磁化に行く．つまり

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{H_0 \searrow 0} \langle \varphi_a \rangle_{\infty}^{\text{PBC}}(J, H_0) = M_s^{\text{PBC}}(J) \quad (3.2.26)$$

を得た．これは正に Theorem 3.2.1 の結論そのものである． □

なお、今までのやり方では FBC での結果が出ないが、時間切れなのでこのままにしておく．

3.3 相転移の存在

以上から、 J の値によって、以下のように定性的に異なる振る舞いが見られることがわかった．

- 高温側、特に $0 < J \leq \frac{1}{2d}$ では、帯磁率は有限、自発磁化はゼロであり、かつ 2 点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は $|x|$ とともに指数関数的に減少する．
- 低温側、特に $J > 0.71$ では、帯磁率は無限大、自発磁化は正である．

帯磁率や自発磁化の値は実験で観測できる量であるから、これらが上のように異なった振る舞いをするのは、系の巨視的性質（我々が観測できる性質）が違ふことを意味する．そこで、上のような巨視的性質で系の状態を分類したものを相と言うことにすると、上の性質は Ising model が J の大きいところと小さいところでは異なる相に属する、ことを主張している．

更に、この中間のどこかの J の値でこれら 2 つの相が入れ替わっているはずである¹¹．このような相の移り変わりを相転移、移り変わる点を相転移点と言う．具体的に相転移点を定義することは次の節で行う．

4 臨界現象の存在

これまで、2 次元以上では相転移が存在するを見た．この節ではもう一歩進んで、相転移点近傍での系の振る舞いを詳しく調べる．特に、相転移点に近づくにつれて帯磁率などが発散すること（臨界現象）を示す．

4.1 帯磁率の発散

まず、相転移点近傍で帯磁率が発散することを示そう．大ざっぱに言うと、これは以下のような筋道で行われる．

¹¹理論的にはこれら 2 つの相の間に第 3, 第 4 の相が挟まっている可能性も否定できない．この可能性は 5 節で否定される

- 高温側の結果 (3.1 節) から, 十分高温では $\chi < \infty$ である.
- 低温側の結果 (3.2 節) から, 十分低温では $\chi = \infty$ である.
- 以上から $1/\chi(J)$ という関数は, $J \ll 1$ では正, $J \gg 1$ ではゼロである.
- 一方, Lebowitz 不等式から $1/\chi$ の温度微分が有界であることがわかる.
- 言うまでもなく, Griffiths II 不等式から $\chi(J)$ は単調増加.
- 以上から, 特に $1/\chi$ の温度微分が有界であることから, 途中で $1/\chi$ が連続的にゼロに行くしかない, ことがわかる.

では, 詳しく説明しよう. 考えるモデルは nearest neighbour Ising model に限る (より広いモデルでも成り立つが, それはあとでコメント). このモデルでは

$$-\mathcal{H} \equiv \frac{J}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y \quad (4.1.1)$$

である. また, 見たい量は

$$\chi_\Lambda^{\text{BC}} \equiv \sum_{x \in \Lambda} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{\text{BC}}, \quad \chi_\infty^{\text{BC}} \equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \chi_\Lambda^{\text{BC}} \quad (4.1.2)$$

である. PBC なら極限が存在するかどうかはわからないが, その場合は部分列をとって考える.¹² このとき, 我々の目標は以下の定理である.

Theorem 4.1.1. 上の *n.n. Ising model* について, $d > 1$ では, 有限な正の $J_c(d)$ が存在して, FBC, PBC に対して以下が成り立つ:

- (1) χ_∞^{BC} は $J < J_c(d)$ で有限であり, かつ
- (2) χ_∞^{BC} は $J \nearrow J_c(d)$ につれて発散する.

この定理は 2 段階に分けて証明する. まず第 1 段で, χ_∞^{PBC} が定理の主張通りに発散することを示す. 次に χ_∞^{FBC} が同じ $J_c(d)$ で発散することを示す.

Theorem 4.1.1 の第一段の証明

証明は本質的に χ の J に関する微分に基づく. しかし, 無限体積での量を直接微分することが出来るかどうかは自明ではない. そこで, まず有限体積の量について議論し, 最後に無限体積極限をとる.

1. まず, 今までにわかったことを復習しよう. 記号を簡単にするために

$$f_\Lambda(J) \equiv \frac{1}{\chi_\Lambda^{\text{PBC}}(J)} \quad (4.1.3)$$

と書くことにする. 前節から,

- 十分小さい J に対しては $\chi_\Lambda^{\text{PBC}} < \infty$
- 十分大きい J に対しては $\chi_\Lambda^{\text{PBC}} = \infty$

がわかっている. 従って f_∞ で見ると, 十分小さい J では $f_\infty(J) > 0$, 十分大きい J では $f_\infty = 0$ なのである. Griffiths II 不等式 (Theorem A.2.2) から χ_Λ^{BC} は J の単調非減少関数であるから, f_Λ は J の単調非増加関数である. 従って

$$J_c \equiv \sup\{J : f_\infty(J) > 0\} \quad (4.1.4)$$

を定義すると, これは正で有限である. 我々が示したいのは $f_\infty(J)$ が $J \nearrow J_c$ につれて連続的にゼロに行く ($f_\infty(J)$ が $J \nearrow J_c$ の近傍で連続である) ことである.

¹²ただし, 後の Proposition 4.1.4 によると, $J < J_c$ では FBC と PBC の無限体積極限は一致することがわかる.

2. この目的のために $f_\infty(J)$ の微分を考えよう．厳密には $f_\infty(J)$ が J で微分できるかどうかは自明でない（実際， $J = J_c$ で導関数が存在しない可能性が高い）ので，まず，有限体積での量 $\chi_\Lambda^{\text{PBC}}$ を J で微分する：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dJ} \chi_\Lambda^{\text{PBC}}(J) &= \sum_{x \in \Lambda} \frac{d}{dJ} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{\text{PBC}}(J) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} \frac{1}{2} \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_x; \varphi_y \varphi_z \rangle_\Lambda^{\text{PBC}} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

ここで Lebowitz の不等式 (Theorem B.2.1) を用いると (以下，うるさいので Λ や PBC の添え字を時々，略)，

$$\langle \varphi_0 \varphi_x; \varphi_y \varphi_z \rangle = \langle \varphi_0 \varphi_x \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \leq \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle + \langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \quad (4.1.6)$$

が得られる．これを (4.1.5) に使うと，

$$\frac{d}{dJ} \chi_\Lambda^{\text{PBC}} \leq \sum_{x \in \Lambda} \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle = \chi_\Lambda^{\text{PBC}} \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle = 2d \chi_\Lambda^{\text{PBC}} \sum_y \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle = 2d (\chi_\Lambda)^2 \quad (4.1.7)$$

すなわち，

$$0 \geq \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) = \frac{d}{dJ} \left(\frac{1}{\chi_\Lambda^{\text{PBC}}} \right) \geq -2d \quad (4.1.8)$$

が成立することがわかる (最左辺は $f_\Lambda(J)$ が単調非増加であることから)．

3. これで必要な材料はそろった． $f_\infty(J)$ が $J = J_c$ で不連続だったとしてみよう． $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} f_\Lambda = f_\infty$ であるから，これは十分大きな Λ に対しては $\left| \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) \right|$ が $2d$ を超えることを意味する (詳細は以下に)．これは (4.1.8) に矛盾するので，あり得ない．つまり， $f_\infty(J)$ は $J = J_c$ で連続であり， $\chi_\infty^{\text{PBC}}(J)$ は $J \nearrow J_c$ で発散する．

(上で省略した部分の説明) 上の議論は一見，微分と極限の順序を交換しているように見えるから，もう少し詳しく説明しておこう． $f_\infty(J)$ が $J = J_c$ で不連続ということを具体的に，

$$\lim_{J \rightarrow J_c - 0} f_\infty(J) = \alpha > 0 \quad (4.1.9)$$

だとしてみよう． $f_\infty(J)$ が単調非増加であるから，これは特に全ての $J < J_c$ に対して $f_\infty(J) \geq \alpha > 0$ を意味する．さて， $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} f_\Lambda(J) = f_\infty(J)$ であるから，十分大きな Λ をとると， $J = J_c - \frac{\alpha}{8d}$ および $J = J_c + \frac{\alpha}{8d}$ において $|f_\Lambda(J) - f_\infty(J)| < \frac{\alpha}{8d}$ を満たさせることができる．これは具体的に書くと

$$f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) > \alpha - \frac{\alpha}{8d} = \frac{7\alpha}{8d} \quad \text{かつ} \quad f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) < \frac{\alpha}{8d} \quad (4.1.10)$$

ということであるから，特に

$$f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) - f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) \geq \frac{3\alpha}{4d} \quad (4.1.11)$$

を意味している．しかし，

$$f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) - f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) = \int_{J - \alpha/(8d)}^{J + \alpha/(8d)} dJ \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) \quad (4.1.12)$$

に注意すると，(4.1.8) と (4.1.11) は矛盾することがわかる，と言うわけ (省略部分の補足終わり) \square

では第 2 段に進む．このためには Simon-Lieb の不等式を用いるのが便利である．ここでは天下一りに引用する．証明については Proposition B.3.3 を参照．

Lemma 4.1.2 (Simon-Lieb inequality). Λ 上の $n.n.$ Ising model を考える ($J > 0$)．任意の $V \subset \Lambda$ に対して

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{BC}} \leq J \sum_{\substack{y \in V, z \in V^c \\ |y-z|=1}} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \langle \varphi_z \varphi_x \rangle^{\text{BC}} \quad (4.1.13)$$

が成立する．ここで $\langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}}$ は V 内での FBC に関する期待値を表す．

Lemma 4.1.3. *N.N. Ising model* にて J を固定して考える．このとき

$$\chi_\infty^{\text{FBC}} < \infty \iff \chi_\infty^{\text{PBC}} < \infty \quad (4.1.14)$$

である．また，このどちらかの条件の下では， $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\infty^{\text{PBC}}$ は $|x|$ とともに指数関数的に減衰する．

Proof. Griffiths II 不等式から $\chi_\Lambda^{\text{FBC}} \leq \chi_\Lambda^{\text{PBC}}$ が成り立つ（なぜなら前者に相互作用を付け加えると後者になるから）．従って，これらの極限に対しても $\chi_\infty^{\text{FBC}} \leq \chi_\infty^{\text{PBC}}$ が成立する．よって示すべきは $\chi_\infty^{\text{FBC}} < \infty \implies \chi_\infty^{\text{PBC}} < \infty$ である．

いま， $\chi_\infty^{\text{FBC}} < \infty$ を仮定する．また，記号を簡単にするために，

$$\partial V \equiv \{y \in V \mid \exists z \in V^c, |z - y| = 1\} \quad (4.1.15)$$

$$\partial V^c \equiv \{z \in V^c \mid \exists y \in V, |z - y| = 1\} \quad (4.1.16)$$

を定義しておく．以下の証明は 3.1.1 節での，2 点関数の減衰を示した議論とほとんど同じである．

さて， V を一辺 $2L$ (L は大きいけど固定した数) の立方体として Simon-Lieb 不等式を書くと，

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} &\leq J \sum_{\substack{y \in V, z \in V^c \\ |y-z|=1}} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \langle \varphi_z \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \leq \left(\sup_{z \in \partial V^c} \langle \varphi_z \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \right) \times \left(J \sum_{\substack{y \in V, z \in V^c \\ |y-z|=1}} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \right) \\ &\leq 2dJ \left(\sup_{z \in \partial V^c} \langle \varphi_z \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \right) \times \left(\sum_{y \in \partial V} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

となる．右辺に出ている z, x は， $z \in \partial V$ である事から $|z - x| \geq |x| - L$ を満たしている．そこで右辺の \sup を与える z を改めて z と書き，今度は z を中心にして，上の Simon-Lieb 不等式の議論をくり返してみる．この過程は \sup を与える z と x の距離が L 以上である限りくり返すことができ，結果として

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \leq \langle \varphi_z \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \times \left(2dJ \sum_{y \in \partial V} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \right)^{\lfloor |x|/L \rfloor} \leq \left(2dJ \sum_{y \in \partial V} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \right)^{\lfloor |x|/L \rfloor} \quad (4.1.18)$$

の形の評価が得られる．ここで z は Λ 内の一点であるが，それがどこかはさして重要ではないのは最右辺のように，この期待値を 1 で押さえ込んでしまうからである．なお，ここで $\lfloor |x|/L \rfloor$ は $|x|/L$ を超えない最大の整数を表す．

ここで右辺にでている

$$\sum_{y \in \partial V} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} = \sum_{y: \|y\|_\infty = L} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_V^{\text{FBC}} \equiv c_L \quad (4.1.19)$$

について考える． χ_∞^{FBC} は上の c_L を用いて $\chi_\infty^{\text{FBC}} = \sum_{L=0}^{\infty} c_L$ と書ける．しかし一方で我々は $\chi_\infty^{\text{FBC}} < \infty$ を仮定している．従って (和が有限な級数の各項はゼロに行く) 十分大きな L に対しては $c_L < 1/2$ とすることが出来る．すなわち，(4.1.18) は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{PBC}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\lfloor |x|/L \rfloor} \quad (4.1.20)$$

を意味する — 要するに $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{PBC}}$ は $|x|$ に関して指数的に減少するのである．また，これを x について和をとって $\chi^{\text{PBC}} \leq \infty$ を得る．

最後に， $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle^{\text{FBC}}$ の減衰についてであるが，これは FBC での期待値が PBC での期待値を超えないことからすぐに出る． \square

Theorem 4.1.1 の第二段の証明

上の Lemma そのものである． \square

これで定理の証明は終わったが，最後に一つ，熱力学的極限の存在についての「自然な」結果を証明しておく．

Proposition 4.1.4. $J < J_c(d)$ では

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\infty^{\text{PBC}} = \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\infty^{\text{FBC}} \quad (4.1.21)$$

Proof. 気がつけば簡単である．有限体積 Λ での期待値を考え，ともかく両者をうまく外挿するような相互作用を考える．FBC を PBC にするためには FBC を定義している Λ の境界の対面をつなぐような相互作用を入れればよい．そこでこのような対面をつなぐ相互作用を強さ t ($0 \leq t \leq 1$) で入れた系を考え，この期待値を $\langle \cdot \rangle_\Lambda^t$ で表すことにする．言うまでもなく， $\langle \cdot \rangle_\Lambda^{t=0} = \langle \cdot \rangle_\Lambda^{\text{FBC}}$ ， $\langle \cdot \rangle_\Lambda^{t=1} = \langle \cdot \rangle_\Lambda^{\text{PBC}}$ である．さて，この約束の下で，

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{\text{PBC}} - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{\text{FBC}} = \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{t=1} - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^{t=0} = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^t = \frac{J}{2} \sum_{\substack{|y-z|=1 \\ \text{トーラスの対面}}} \int_0^1 dt \langle \varphi_0 \varphi_x; \varphi_y \varphi_z \rangle_\Lambda^t \quad (4.1.22)$$

となる（「トーラスの対面」とはそのような y, z に限定しての和）．ここで Lebowitz の不等式を用いると，

$$\leq \frac{J}{2} \sum_{\substack{|y-z|=1 \\ \text{トーラスの対面}}} \int_0^1 dt \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda^t \langle \varphi_y \varphi_z \rangle_\Lambda^t \times 2 \quad (4.1.23)$$

を得る．更に $\langle \cdot \rangle^t \leq \langle \cdot \rangle^{\text{PBC}}$ を用いて

$$\leq J \sum_{\substack{|y-z|=1 \\ \text{トーラスの対面}}} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle_\Lambda^{\text{PBC}} \langle \varphi_x \varphi_z \rangle_\Lambda^{\text{PBC}} \quad (4.1.24)$$

となる．ここで Lemma 4.1.3 による指数減衰を用いると

$$\begin{aligned} &\leq \text{const.} \sum_{\substack{|y-z|=1 \\ \text{トーラスの対面}}} \exp(-m|y| - m|x-z|) \\ &\leq \text{const.} |\partial\Lambda| \exp\{-m \text{dist}(0, \partial\Lambda) - m \text{dist}(x, \partial\Lambda)\} \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

ということになる（ $\exists m > 0$ ）．最後のところでは非常に大ざっぱに， $|y|$ や $|x-z|$ の最小値を用いて指数関数を評価し，また，和を全体の項数で評価した．

さて， $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ を考える． Λ の一辺を ℓ とでもすると，固定した $0, x$ に対しては， $\text{dist}(0, \partial\Lambda)$ と $\text{dist}(x, \partial\Lambda)$ は共に ℓ のオーダーであり， $|\partial\Lambda|$ は ℓ^{d-1} のオーダーである．従って， $\ell \rightarrow \infty$ に際しては (4.1.25) はゼロに行く．これが言いたかった事であった． \square

4.2 Correlation Length の定義と基本的性質

講義では spectral representation を用いる方法を示したが，ここでは Griffiths II 不等式を用いる方法を述べる．この節は Ising model に話を限る（Griffiths II 不等式で議論するための制約）．この制約をはずすと spectral representation を使うしかないような気がする．Spectral representation は非常に強力なのであるが，考えている格子と相互作用に非常に強い制限が付くのが難点である．

この節では，correlation length ξ を定義し，その基本的性質を述べる．Correlation length とは， e_1 を 1-軸方向の単位ベクトルとして

$$\frac{1}{\xi} \equiv - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle \quad (4.2.1)$$

という極限（存在すれば）で定義するものである．この極限の存在，およびその意味は以下の命題で与えられる．

Proposition 4.2.1. *Ising model* については，(4.2.1) で定義される ξ は区間 $[0, \infty]$ に存在する（0 や ∞ の可能性もある）．更に，任意の x に対して，

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq e^{-\|x\|_\infty / \xi} \quad (4.2.2)$$

も成立する．ただし， $\|x\|_\infty \equiv \max_j |x_j|$ ．

Proof. Griffiths II 不等式から

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = \langle \varphi_0 \varphi_x \varphi_y \varphi_y \rangle \geq \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_y \varphi_x \rangle \quad (4.2.3)$$

は正しい ($\forall y \in \Lambda$) . であるからして, $f(n) \equiv \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle$ を考えると,

$$f(n+m) \geq f(n) f(m) \quad (m, n \geq 0) \quad (4.2.4)$$

ではある (supermultiplicative) . 従って¹³ $0 < \xi \leq \infty$ が存在して,

$$e^{-1/\xi} \equiv \exists \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^{1/n} \quad (4.2.5)$$

と書くことができる (これが correlation length の定義) . かつ, supermultiplicative より,

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle = f(n) \leq e^{-n/\xi} \quad (4.2.6)$$

となる . これで Proposition の主張が $x = ne_1$ の形の場合に証明された .

問題は x が 1-軸方向にない場合の事であるが, それは以下のように考える . まず, x を第一成分とそれ以外に分解して $x = (n, \vec{x})$ と書くことにしよう . そして (4.2.3) における x を $2ne_1$, y を今の x としてみると,

$$\langle \varphi_0 \varphi_{2e_1} \rangle \geq \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \langle \varphi_x \varphi_{2e_1} \rangle = \left(\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \right)^2 \quad (4.2.7)$$

が得られる (最後のところでは系の対称性を用いた) . 左辺に (4.2.6) を用いた上で両辺の平方根をとると

$$\langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \leq e^{-n/\xi} \quad (4.2.8)$$

が成り立つ . 以上の議論で 1-軸を 2-軸, 3-軸, と取り替えて議論することもできるので, 結局

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq e^{-\|x\|_\infty / \xi} \quad (4.2.9)$$

が成立することがわかった . □

4.2.1 Subadditivity について

最後に, subadditivity についての基本的な事項をまとめておこう .

数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad (m, n \geq 1) \quad (4.2.10)$$

を満たすとき, この数列は subadditive であると言う . このような数列は以下の著しい性質をもつ .

Proposition 4.2.2. $\frac{a_n}{n}$ が有界であるような, subadditive な数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対しては, 極限

$$\alpha \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \quad (4.2.11)$$

が存在する . 更に, この極限值 α によって

$$a_n \geq \alpha n \quad (n \geq 1) \quad (4.2.12)$$

も成り立つ .

(注) $\frac{a_n}{n}$ が有界でない場合は極限として $\pm\infty$ を許せばやはり Proposition は成立するが, そのような場合はどっちにしろ有り難みがないので, 省略した . 言うまでもないことであるが, subadditive な数列の符号を変えれば "superadditive" になるから, このような数列に対しても同様の結果が成り立つ (ただし, (4.2.12) の不等号は逆向き) .

¹³より詳しくは以下の Corollary 4.2.3 を参照

Proof. $\frac{a_n}{n}$ が有界であるから,

$$\underline{\alpha} \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}, \quad \bar{\alpha} \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \quad (4.2.13)$$

は共に存在する．よって，この両者が一致することを示せば，前半は証明できる．

そのために，正の整数 N を一つ固定し， n を N で割った商と余りで $n = \ell N + r$ と表すことにする ($0 \leq r < N$)．さて，(4.2.11) から

$$a_n \leq a_{\ell N + r} \leq a_{\ell N} + a_r \leq a_N + a_{(\ell-1)N} + a_r \leq \dots \leq \ell a_N + a_r \quad (4.2.14)$$

が成り立つから，両辺を $n = \ell N + r$ で割って

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{\ell N}{\ell N + r} \times \frac{a_N}{N} + \frac{a_r}{\ell N + r} \quad (4.2.15)$$

を得る．ここで N を固定したまま，両辺の $n \rightarrow \infty$ での \limsup をとる．すると左辺は $\bar{\alpha}$ に行く (定義そのもの)．右辺の第一項は ($\ell \rightarrow \infty$ と $r < N$ から) $\frac{a_N}{N}$ に行く．右辺の第二項は ($0 \leq r < N$ なので a_r が有界であるから) ゼロに行く．すなわち，

$$\bar{\alpha} \leq \frac{a_N}{N} \quad (N \geq 1) \quad (4.2.16)$$

が得られた．そこで，(4.2.16) の両辺の $N \rightarrow \infty$ での \liminf をとると，

$$\bar{\alpha} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N}{N} = \underline{\alpha} \quad (4.2.17)$$

が得られた．つまり， $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$ が言えたので，(4.2.11) の極限が存在することが言えた．

最後に (4.2.16) と $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$ であることから，(4.2.12) が成り立つことがわかる． \square

Corollary 4.2.3. 正の値をとる数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が不等式

$$b_{m+n} \geq b_m b_n \quad (4.2.18)$$

を満たすとき，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は *supermultiplicative* と言う．このとき，極限

$$\mu \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{1/n} \quad (4.2.19)$$

が存在し，

$$b_n \leq \mu^n \quad (n \geq 1) \quad (4.2.20)$$

を満たす．

Proof. $a_n \equiv -\log b_n$ を考えると，数列 $\{a_n\}$ は subadditive になるので，Proposition 4.2.2 を用いれば良い． \square

4.3 χ と ξ の比較

この節では χ と ξ の比較を行い，その結果として， $J \nearrow J_c(d)$ で ξ が発散することを示す．

Proposition 4.3.1. *Ising model* について，次元 (と相互作用の範囲) で決まる正の定数 c_1, c_2 が存在し，

$$c_1 \xi \leq \chi \leq c_2 \xi^d \quad (4.3.1)$$

が成立する．

この命題は以下の小節で証明する．

この命題から直ちに， χ と ξ の同時発散が言える：

Theorem 4.3.2. $J < J_c(d)$ では $\xi < \infty$ でもある．更に， $J \nearrow J_c(d)$ につれて， ξ も発散する．

4.3.1 Proposition 4.3.1 の右側の不等式の証明

(4.2.2) を x について和をとると (C, C' は次元で決まる適当な定数),

$$\chi = \sum_x \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \sum_x e^{-\|x\|_\infty / \xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x: \|x\|=n} e^{-\|x\|_\infty / \xi} \leq \sum_{n=0}^{\infty} C n^{d-1} e^{-n/\xi} \leq C' \xi^d \quad (4.3.2)$$

を得る . □

4.3.2 Proposition 4.3.1 の左側の不等式の証明

一つの方法は Simon [4] の p.125 を使うことであろう . いくつかの準備から始める .

まず ,

$$g(n) \equiv \sum_{x: x_1=n} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \quad (4.3.3)$$

を定義する . これは x -軸を $x_1 = n$ で切る超平面上で $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ を足したもので , 和が全空間になっていない点で susceptibility になり切れていない量である . この量に対して以下が成り立つ .

Lemma 4.3.3. 上の $g(n)$ に対しては極限

$$-m \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g(n) = \inf_{n > 0} \frac{1}{n} \log g(n) \quad (4.3.4)$$

が存在し ,

$$g(n) \geq e^{-mn} \quad (4.3.5)$$

を満たす . 更にこの m と ξ は

$$m = \frac{1}{\xi} \quad (4.3.6)$$

の関係にある .

Proof. Step 1. まず , m の存在を言おう . Subadditivity に帰着して証明する . 正しい Simon 不等式から , $x_1 > n$ ならば ,

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \sum_{y: y_1=n} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_y \varphi_x \rangle \quad (4.3.7)$$

が成り立つことに注意する (Simon 不等式を使っているので , 適用できるモデルは Ising に限るよね) . これは $y_1 = n$ の超平面が 0 と x を separate するからである .

そこで , (4.3.7) の両辺を超平面 $x_1 = n + k$ ($k > 0$) で和をとると ,

$$g(n+k) \leq g(n)g(k) \quad (4.3.8)$$

が言える .

これは $\log g$ が subadditive なことを意味するから , (4.3.4) の極限が存在することは Proposition 4.2.2 から従う . 更にこれから直ちに (4.3.5) もわかる .

Step 2. 次に , (4.3.6) の証明に移ろう . まず , (4.2.2) から直ちに

$$g(n) = \sum_{x: x_1=n} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \sum_{x: x_1=n} e^{-\|x\|/\xi} \leq e^{-n/\xi} \sum_{x: x_1=n} e^{-(\|x\|-n)/\xi} \quad (4.3.9)$$

が得られる．ここで最後の和を $\|x\| = n$ とそうでないものに分解して評価しよう． $x = (x_1, \vec{x})$ と分解し， $\|\vec{x}\| \equiv \max_{j=2}^d |x_j|$ と解釈すると

$$\begin{aligned}
\sum_{x: x_1=n} e^{-(\|x\|-n)/\xi} &= \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}} e^{-(\|\vec{x}\|-n)/\xi} I[\|\vec{x}\| = n] + \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}} e^{-(\|\vec{x}\|-n)/\xi} I[\|\vec{x}\| > n] \\
&= \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}} I[\|\vec{x}\| \leq n] + \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1}} e^{-(\|\vec{x}\|-n)/\xi} I[\|\vec{x}\| > n] \\
&\leq C n^{d-1} + \sum_{\ell=n+1}^{\infty} \sum_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ \|\vec{x}\|=\ell}} e^{-(\ell-n)/\xi} \leq C n^{d-1} + \sum_{\ell=n+1}^{\infty} C' \ell^{d-2} e^{-(\ell-n)/\xi} \\
&\leq C n^{d-1} + C''(n^{d-1} + \xi^{d-1})
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

と評価できる (C, C', C'' は次元だけで決まる定数)．従って最終的に，(4.3.9) から

$$g(n) \leq \text{const.} e^{-n/\xi} (n^{d-1} + \xi^{d-1}) \tag{4.3.11}$$

が得られた．これを (4.3.5) と組み合わせると，

$$e^{-mn} \leq \text{const.} e^{-n/\xi} (n^{d-1} + \xi^{d-1}) \text{ が全ての } n \geq 0 \text{ で成立} \implies m \geq \frac{1}{\xi} \tag{4.3.12}$$

が結論される．

次に逆向きの不等式については， m や $1/\xi$ が \limsup, \liminf で定義されていたことを使わないといけない（つまり，単なる不等式 (4.2.2) や (4.3.5) では足りない)．以下のように初等的に議論できる．

今，

$$-\frac{1}{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n}, \quad -m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log g(n)}{n} \tag{4.3.13}$$

を書き直してみると，

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0, \text{ s.t. } n > N \implies \left| \frac{\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n} + \frac{1}{\xi} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\log g(n)}{n} + m \right| < \epsilon \tag{4.3.14}$$

となる．これから $n > N$ に対しては

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle \geq \exp\left[-\left(\frac{1}{\xi} + \epsilon\right)n\right], \quad g(n) \leq \exp[-(m - \epsilon)n] \tag{4.3.15}$$

が成立することがわかる．ところが定義から $g(n) \geq \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle$ であるから，上と併せて

$$\exp\left[-\left(\frac{1}{\xi} + \epsilon\right)n\right] \leq \exp[-(m - \epsilon)n] \text{ が全ての } n > N \text{ について成立} \implies \frac{1}{\xi} + \epsilon \geq m - \epsilon \tag{4.3.16}$$

が結論できる． $\epsilon > 0$ は任意にとれるから，これから $\frac{1}{\xi} \geq m$ が結論される． \square

Proposition 4.3.1 の左側の不等式の証明

簡単である．(4.3.5) の両辺を n で和をとって，

$$\chi = g(0) + 2 \sum_{n>0} g(n) \geq 1 + 2 \frac{e^{-m}}{1 - e^{-m}} = \frac{1 + e^{-m}}{1 - e^{-m}} = \coth\left(\frac{m}{2}\right) \tag{4.3.17}$$

を得る．これと (4.3.6) を考えあわせると良い． \square

5 相転移点の一意性

これまでで相転移点の存在，および，その近傍で帯磁率などが発散することを見た．しかし，よく考えると，定性的な議論も完結していないことに気づく．すなわち，4節で考えていた相転移点は

$$J_c \equiv \sup\{J > 0 : \chi(J) < \infty\} \quad (5.0.18)$$

として定義したものであった．しかし，相転移点の定義としてより自然なものは，

$$J_H \equiv \inf\{J > 0 : M_s(J) > 0\} \quad (5.0.19)$$

すなわち， J_H を境にして自発磁化 M_s が正になるところであろう．

理論的にはこの2つの「相転移点」が一致する保証はない．実際，2次元 XY model などでは J_c は有限であるのに J_H は無限大である．従って $J_c = J_H$ であるか否かは決して自明なことではない．

さて，この問題の重要性は古くから認識されていたにもかかわらず，その解決にはかなりの時間がかかった．1987年になって，漸く，Aizenman, Barsky, Fernández による証明が完成した．時間の関係もあって，ここでは結果だけを引用する．

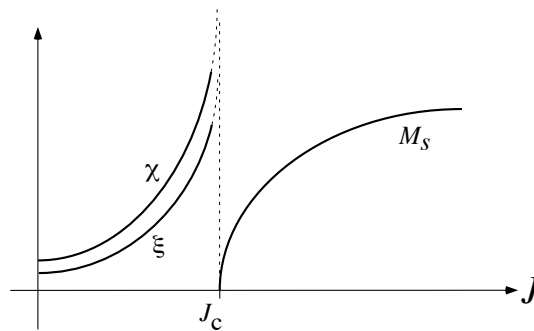
Theorem 5.0.4. *N.n. Ising* または φ^4 モデルにおいては， $J_c = J_H$ である．

Proof. 証明については原論文 [5] を参照されたい．この仕事は，先行する percolation での証明を焼き直したもので，percolation に関する論文 [6] から読まれることをお奨めする． \square

ともかく，この結果によって，以下のようなスッキリした描像が成立している事がわかった．すなわち，臨界値 J_c があって，

- $J < J_c$ は高温相，つまり帯磁率や相関距離は有限，自発磁化はゼロ，かつ $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は $|x|$ とともに指数的に減衰．
- $J > J_c$ は低温相，つまり帯磁率や相関距離は無限大，自発磁化は正．
- $J \nearrow J_c$ にともなって，帯磁率と相関距離は発散する．

これらを模式図にすると下のようになる．これで一応，臨界現象の定性的議論は完結した．



A 相関不等式

この節ではよく使われる相関不等式について，まとめて述べる．ただし，この節では duplicated variables method と呼ばれる方法で簡単に導出できるものに話を限る．これ以外の不等式も必要になるが，それは Appendix B で述べる．

A.1 お約束

この節では記号を簡単にするために $A \in \Lambda$ に対して, $\varphi^A = \prod_{x \in A} \varphi_x$ と書く. 更に (一般的な書き方ではないが) A の中に同じサイトが何回か出てくることも許して, その場合はそのサイトでの φ_x をその回数だけかけることにする. つまり, n_x で A 中の x の出現回数を表すと,

$$\varphi^A \equiv \prod_{x \in \Lambda} (\varphi_x)^{n_x} \quad (\text{A.1.1})$$

と定義するわけである (この書き方をする場合, A は Λ の部分集合と言うよりは単なるサイトの「リスト」だと思っている.)

さて, 有限格子 Λ 上のスピン系で, そのハミルトニアンが

$$-\mathcal{H}_\Lambda \equiv \sum_{A \subset \Lambda} J_A \varphi^A, \quad J_A \geq 0 \quad (\text{A.1.2})$$

であり, 期待値が

$$\langle \dots \rangle_\Lambda \equiv \frac{\int (\dots) e^{-\mathcal{H}_\Lambda} \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right]}{\int e^{-\mathcal{H}_\Lambda} \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right]} = \frac{\int (\dots) e^{-\mathcal{H}_\Lambda} d^\Lambda \eta(\Phi)}{\int e^{-\mathcal{H}_\Lambda} d^\Lambda \eta(\Phi)} \quad (\text{A.1.3})$$

であたえられるものを考える. ここで (以下でも) 記号を簡単にするために single site measure の積を $d^\Lambda \eta(\Phi)$ と略記した. なお, 以下でも述べるが, Single site measure η としては偶関数であるものに話を限る. また, (A.1.2) は当然,

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda} J_{xy} \varphi_x \varphi_y + \sum_{x \in \Lambda} h_x \varphi_x, \quad (J_{xy} \geq 0, h_x \geq 0) \quad (\text{A.1.4})$$

で与えられる Ising model や φ^4 モデルを含んでいることに注意しよう (実際, Lebowitz inequality などはこの限定されたモデルについてのみ証明される.)

A.2 Griffiths の不等式

さて, これらの準備の下に, 我々の相関不等式を書くことができる. まず最初に:

Theorem A.2.1 (Griffiths I inequality). (A.1.2)-(A.1.3) で定義されるスピンモデルに対しては, $J_A \geq 0$, かつ η が偶関数である限り,

$$\langle \varphi^A \rangle \geq 0 \quad (\text{A.2.1})$$

が成立する. これを *Griffiths I inequality* と言う.

Griffiths I があるからには Griffiths II もある:

Theorem A.2.2 (Griffiths II inequality). (A.1.2)-(A.1.3) で定義されるスピンモデルに対しては, $J_A \geq 0$, かつ η が偶関数である限り,

$$\langle \varphi^A; \varphi^B \rangle \equiv \langle \varphi^A \varphi^B \rangle - \langle \varphi^A \rangle \langle \varphi^B \rangle \geq 0 \quad (\text{A.2.2})$$

が成立する. これを *Griffiths II inequality* と言う.

Remark. FBC, PBC, +BC はいずれも (A.1.2)-(A.1.3) の形に書けるから, 上の不等式は当然, Ising model の FBC, PBC と +BC, および φ^4 モデルの FBC, PBC にたいしても成立する.

Remark. これらの不等式はまず, 有限体積で証明するが, その後で無限体積の極限をとることにより, 無限体積極限に対しても成立することが保証される.

A.2.1 Griffiths I Inequality の証明

Proof of Theorem A.2.1.

まず有限体積で証明し、後で極限をとる（と言っても、ここは有限体積の話だったか。）
 $Z_\Lambda > 0$ だから、期待値の定義での分子の非負性、つまり

$$\int \varphi^A e^{-\mathcal{H}} \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] \geq 0 \quad (\text{A.2.3})$$

を言えばよい。さて定義から、(A.1.2) の形のハミルトニアンを展開すると、 $J_B \geq 0$ である限り、

$$e^{-\mathcal{H}} = \exp\left(\sum_B J_B \varphi^B\right) = \sum_{B'} c_{B'} \varphi^{B'}, \quad c_{B'} \geq 0 \quad (\text{A.2.4})$$

の形に、係数が全て正の級数が得られることがわかる。従って、期待値の定義の分子の和（積分）の中身は

$$\varphi^A e^{-\mathcal{H}} = \sum_B c_B \varphi^A \varphi^B \quad (\text{A.2.5})$$

のように正の係数の和になっていて、これを single site measure で平均すれば分子が得られる。つまり、分子は

$$\int \varphi^A e^{-\mathcal{H}} \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] = \sum_B c_B \int \varphi^A \varphi^B \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] \quad (\text{A.2.6})$$

となる。最後の段階では、格子が有限であることと指数関数の展開が絶対収束している事から、 B についての和と φ での積分の順序を入れ替えた。

さて、(A.2.6) の積分はそれぞれのサイトでの積分に分解する。つまり、 A, B の中にサイト x の出てくる回数を n_x と書くと、

$$\varphi^A \varphi^B = \prod_{x \in \Lambda} \varphi^{n_x} \quad (\text{A.2.7})$$

と積の形に書けるので、

$$\int \varphi^A \varphi^B \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] = \int \left[\prod_{y \in \Lambda} \varphi^{n_y} \right] \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] = \prod_{x \in \Lambda} \int \varphi^{n_x} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \quad (\text{A.2.8})$$

と、積分の積になってしまう。ところが、Ising model や φ^4 モデルでは、それぞれの φ_x についての積分測度は φ_x の符号を変える変換に対して不変だから、

$$\int \varphi^{n_x} \eta(\varphi_x) d\varphi_x = \begin{cases} \text{正} & (n_x \text{ が偶数の時}) \\ 0 & (n_x \text{ が奇数の時}) \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

が成立し、こいつの積である (A.2.8) については

$$\int \varphi^A \varphi^B \left[\prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x \right] = \begin{cases} \text{正} & (\text{全てのサイトで } n_x \text{ が偶数の時}) \\ 0 & (\text{上以外の時}) \end{cases} \quad (\text{A.2.10})$$

が成立する。ともかくこのようにして、(A.2.6) の和は非負であることがわかるので、(A.2.3) が示された。□

A.2.2 Griffiths II Inequality の証明

Proof of Theorem A.2.2.

今度は truncated expectation なのでちと厄介である。この問題を解決するために、duplicated variable method を導入する。今、考えている格子 Λ 上のスピン系で全く同じものを独立に2つ用意し、それぞれが今考えているス

ピン分布に従うものとする．つまり，これらのスピンを φ_x, ψ_x ($x \in \Lambda$) と書く事にすると，両方のスピンに関する期待値は（記述を簡単にするため $d^\Lambda \eta(\Phi) \equiv \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) d\varphi_x$ と書くことにした）

$$\langle\langle \cdots \rangle\rangle_{\text{dup}} = \frac{1}{Z_\Lambda^2} \int d^\Lambda \eta(\Phi) \int d^\Lambda \eta(\Psi) \exp\{-H_\Lambda(\varphi) - H_\Lambda(\psi)\} (\cdots) \quad (\text{A.2.11})$$

となる．さて，この duplicated variables の利点は

$$\langle \varphi^A \rangle = \langle\langle \varphi^A \rangle\rangle_{\text{dup}}, \quad \langle \varphi^A \rangle \langle \varphi^B \rangle = \langle\langle \varphi^A \rangle\rangle_{\text{dup}} \langle\langle \varphi^B \rangle\rangle_{\text{dup}} = \langle\langle \varphi^A \varphi^B \rangle\rangle_{\text{dup}} \quad (\text{A.2.12})$$

と，2つの期待値の積を φ と ψ の積の1つの期待値として書ける事である．これから，

$$\langle \varphi^A; \varphi^B \rangle = \langle\langle \varphi^A \varphi^B \rangle\rangle_{\text{dup}} - \langle\langle \varphi^A \rangle\rangle_{\text{dup}} \langle\langle \varphi^B \rangle\rangle_{\text{dup}} = \frac{1}{2} \langle\langle (\varphi^A - \psi^A)(\varphi^B - \psi^B) \rangle\rangle_{\text{dup}} \quad (\text{A.2.13})$$

と書けることがわかる．ここで更に，新しいスピン変数

$$s_x = \frac{\varphi_x + \psi_x}{2}, \quad t_x = \frac{\varphi_x - \psi_x}{2} \quad (\text{A.2.14})$$

を導入しよう．すると $\varphi^A - \psi^A$ は

$$\varphi^A - \psi^A = \prod_{x \in A} \varphi_x - \prod_{x \in A} \psi_x = \prod_{x \in A} (s_x + t_x) - \prod_{x \in A} (s_x - t_x) = \sum_{D \in A} C_D s^D t^{A \setminus D}, \quad C_D \geq 0 \quad (\text{A.2.15})$$

と，非負の係数 C_D を用いて展開できる．従って，(A.2.13) の期待値の中身も

$$(\varphi^A - \psi^A)(\varphi^B - \psi^B) = \sum_{D, E} C'_{DE} s^D t^E \quad (\text{A.2.16})$$

の形に適当な非負の係数 C'_{DE} を用いて書ける．一方， $\{\varphi\}$ と $\{\psi\}$ の分布を表す $-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\})$ を s, t で表すと，(A.1.2) の形ならやはり

$$-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\}) = \sum_B J_B (\varphi^B + \psi^B) = \sum_B J_B \left[\prod_{x \in B} (s_x + t_x) + \prod_{x \in B} (s_x - t_x) \right] = \sum_{D, E} C''_{DE} s^D t^E \quad (\text{A.2.17})$$

と，正の係数 C''_{DE} を用いて書けるので， $\{s_x, t_x\}$ で与えられるスピン系は強磁性的であることがわかる．そこで $e^{-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\})}$ を (i) でやったように展開すると，

$$e^{-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\})} = \sum_{F, G} C'''_{FG} s^F t^G \quad (\text{A.2.18})$$

の形に非負の係数 $\{C'''_{FG}\}$ を用いて書ける．よって結局期待値 (A.2.13) の分子の期待値に出てくる量は

$$e^{-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\})} (\varphi^A - \psi^A)(\varphi^B - \psi^B) = \sum_{D, E} C_{DE} s^D t^E \quad (\text{A.2.19})$$

と非負の係数 $\{C_{DE}\}$ を用いて書け，(A.2.13) の分子自身は

$$\begin{aligned} ((\text{A.2.13}) \text{ の分子}) &= \int d^\Lambda(\Phi) \int d^\Lambda(\Psi) e^{-\mathcal{H}(\{\varphi\}) - \mathcal{H}(\{\psi\})} (\varphi^A - \psi^A)(\varphi^B - \psi^B) \\ &= \sum_{D, E} C_{DE} \int d^\Lambda(\Phi) \int d^\Lambda(\Psi) s^D t^E \\ &= \sum_{D, E} C_{DE} \prod_{x \in \Lambda} \left[\int d\varphi_x \eta(\varphi_x) (s_x)^{n_x} \int d\psi_x \eta(\psi_x) (t_x)^{m_x} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

と積の形に書ける．ここで D 中の s_x の出現回数を n_x ， t_x の出現回数を m_x と書いた — これらは D, E によるが，記号を簡単にするためにその依然性は書いていない．

ここまで来ればこれからどのように進むかは明白であろう．Griffiths I の証明でも行ったように，積分測度の偶関数性などを用いて，(A.2.20) の積分が非負だと言いたいわけだ．問題は s_x, t_x は φ_x, ψ_x によって定義されているのであり，積分測度の不変性が自明でないところにある．

これに関しては以下のように考える．もともと， φ_x と ψ_x は独立であり，積分密度 $\eta(\varphi_x)\eta(\psi_x)$ は φ_x, ψ_x のそれぞれの符号を独立に変える変換に対して不変であった．つまり，

T_1 : φ_x の符号を変える変換 ,

T_2 : ψ_x の符号を変える変換 ,

のそれぞれが $\eta(\varphi_x)\eta(\psi_x)$ を不変にする . このそれぞれが s_x, t_x の言葉でどのような変換になっているかというと ,

T_1 : φ_x の符号を変える変換は , 「 s_x と t_x を交換した上で , 更に s_x と t_x 両方の符号を変える」変換

T_2 : ψ_x の符号を変える変換は , 「 s_x と t_x を交換する」変換

になっている (s_x, t_x の定義を見て納得せよ) . 従って T_1, T_2 の変換を続けて行うことにより

T_3 : s_x と t_x 両方の符号を同時に変える変換 ($T_3 = T_2 \circ T_1$)

を作ることができる . つまり , この変換 T_3 に関して $\eta(\varphi_x)\eta(\psi_x)$ は不変である .

これだけではまだ足りない . 幸いなことに $\eta(\varphi_x)\eta(\psi_x)$ は

T_4 : φ_x と ψ_x を交換する変換

についても trivial に不変である . この変換は s_x, t_x の言葉では

T'_4 : t_x のみの符号を変える変換

となる . 更に T_3 と T'_4 を続けて行うことで ,

T_5 : s_x のみの符号を変える変換 ($T_5 = T'_4 \circ T_3$)

も作ることができる .

結果的に $\eta(\varphi_x)\eta(\psi_x)$ は 「 s_x と t_x の符号を独立に変える変換」に関して不変なことがわかった .

従って , (A.2.20) の右辺に出てくる積分は全ての n_x, m_x が偶数の時は正の値 , それ以外は全てゼロ , となることがわかり , (A.2.20) が非負の項の和であること結論される . (A.2.13) の分母は勿論正であるから , これで (A.2.13) 自身が非負であることが結論できた . \square

A.3 Lebowitz の不等式

Theorem A.3.1 (Lebowitz inequality). (A.1.2)-(A.1.3) のモデルで , *single site measure* が *Ising* または φ^4 の時 (より正確な表現は *Theorem B.2.1* を見よ) ,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \varphi_z \varphi_w \rangle \leq \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \langle \varphi_z \varphi_w \rangle + \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_y \varphi_w \rangle + \langle \varphi_x \varphi_w \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \quad (\text{A.3.1})$$

が成立する .

A.3.1 Lebowitz Inequality の証明

Proof. またもや duplicated variable method を用いるが , この場合 (2個でなく) 4個のスピン系が必要になる . Random walk representation を用いた別証明を *Theorem B.2.1* に与える . \square

A.4 Simon の不等式

Theorem A.4.1 (Simon's inequality). $H = 0$ の磁場無しにする .

(i) まず , 正しい *Simon* は $B \in \Lambda$ を x と y を “separate” するようにとって [4][*Theorem 1.1*] ,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_{z \in B} \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \quad (\text{A.4.1})$$

(ii) 一方 , *Lebowitz* からすぐにできる奴は [4][*Theorem 3.1*] , $A, C \in \Lambda$ を $A \cap C = \emptyset$, $A \cup C = \Lambda$ なる Λ の分割とし , $x \in A, y \in C$ のとき ,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_{z \in A, w \in C} J_{zw} [\langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_w \varphi_y \rangle + \langle \varphi_x \varphi_w \rangle \langle \varphi_z \varphi_y \rangle] \quad (\text{A.4.2})$$

A.4.1 Simon's Inequality の証明

Proof of (ii).

$\mathcal{J}_{\text{cut}} \equiv \{\{u, v\} : u \in A, v \in C\}$ とし, $t \in [0, 1]$ に対して

$$\mathcal{H}_t \equiv - \sum_{\{u, v\} \notin \mathcal{J}_{\text{cut}}} J_{uv} \varphi_u \varphi_v - t \sum_{\{u, v\} \in \mathcal{J}_{\text{cut}}} J_{uv} \varphi_u \varphi_v \quad (\text{A.4.3})$$

と定義し, この \mathcal{H}_t による期待値を $\langle \cdot \rangle_t$ と書くことにする. この期待値は $x \in A, y \in C$ のとき,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle_t = \begin{cases} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle & (t = 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} \quad (\text{A.4.4})$$

を満たす. 実際, $t = 0$ では A 内のスピンと C 内のスピンは互いに独立に分布しているから, 相関はない. 従って, t を 0 から 1 まで interpolate して,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_1 - \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_0 = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_t = \int_0^1 dt \langle \varphi_x \varphi_y; \sum_{\{u, v\} \in \mathcal{J}_{\text{cut}}} J_{uv} \varphi_u \varphi_v \rangle_t \quad (\text{A.4.5})$$

と書ける. ところで, 最後の非積分関数は Lebowitz ineq. (A.3.1) を用いて,

$$\langle \varphi_x \varphi_y; \varphi_u \varphi_v \rangle_t \leq \langle \varphi_x \varphi_u \rangle_t \langle \varphi_y \varphi_v \rangle_t + \langle \varphi_x \varphi_v \rangle_t \langle \varphi_y \varphi_u \rangle_t \leq \langle \varphi_x \varphi_u \rangle \langle \varphi_y \varphi_v \rangle + \langle \varphi_x \varphi_v \rangle \langle \varphi_y \varphi_u \rangle \quad (\text{A.4.6})$$

と押さえられる (最後のところでは $\langle \varphi_x \varphi_u \rangle_t$ などの t に関する単調性を用いた). 従って, (A.4.5) より

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_{\{u, v\} \in \mathcal{J}_{\text{cut}}} J_{uv} \int_0^1 dt [\langle \varphi_x \varphi_u \rangle \langle \varphi_y \varphi_v \rangle + \langle \varphi_x \varphi_v \rangle \langle \varphi_y \varphi_u \rangle] \quad (\text{A.4.7})$$

を得るが, これは (A.4.2) そのものである.

なお, (i) の証明はこの講義ノートに述べたことからすぐには導かれぬ. 原著論文 [4] を参照されたい. \square

B Random Walk Representation

相関不等式を証明するための強力な方法の一つに random walk representation がある. これはスピン系を重みつきランダムウォークの系に書き直すものであるが, 副産物として強力な不等式が割合簡単に証明できる.

この節は大変に急いで打ち込んだのでかなり不満なママになっている. この節の内容に関する一般的な reference として, [7] を挙げておく.

考えるのは

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda} J_{xy} \varphi_x \varphi_y \quad (J_{xy} \geq 0, h_x \geq 0) \quad (\text{B.0.8})$$

で与えられるハミルトニアンを持つスピン系である. Single site measure $\eta_x(\varphi_x)$ についての条件は追々, 追加していくことにする.

B.1 Random Walk Representation

まず, 全ての出発点になる random walk representation を作っておく.

B.1.1 逆行列に対する公式

少々天降りであるが, ここでは以下の命題を示す. \hat{J} を $\Lambda \times \Lambda$ 上の行列で, その成分が J_{xy} ($x, y \in \Lambda$) で与えられるものとし,

$$J_{xx} = 0, \quad \sum_{y \in \Lambda} |J_{xy}| < \infty, \quad J_{xy} = J_{yx} \quad (\text{B.1.1})$$

を仮定する．また， L_x ($x \in \Lambda$) を，

$$L_x \neq 0, \quad |L_x| > \sum_{y \in \Lambda} |J_{xy}| \quad (\text{B.1.2})$$

を満たす数として行列 $\hat{L} - \hat{J}$ を

$$\left(\hat{L} - \hat{J} \right)_{xy} = L_x \delta_{xy} - J_{xy} \quad (\text{B.1.3})$$

を定義し，その逆行列 $\left(\hat{L} - \hat{J} \right)^{-1}$ を考える．

我々の目的はこの逆行列をランダムウォークについての和として表すことである．そのために，いくつかの用語を定義しよう．

- $x, y \in \Lambda$ に対して x から y へのランダムウォーク ω とは，

$$\omega = (x, z_1, z_2, \dots, z_n, y) \quad (\text{B.1.4})$$

のように， x を出発して y へ至るサイトの順序づけられた集合のことである．

- この場合， x, y, z_1, z_2, \dots の間にいくら重複があっても構わない．また， x から x へのランダムウォークと言う場合には $\{x\}$ 一点からなるものも含めて考える．
- 行列 \hat{J} とランダムウォーク ω (B.1.4) に対して

$$J_\omega \equiv J_{xz_1} J_{z_1 z_2} \dots J_{z_n y} \quad (\text{B.1.5})$$

と定義する．対応する $J_{z_i, z_{i+1}}$ の成分がないときは，勿論， $J_\omega = 0$ とみなす．

- ランダムウォーク $\omega = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_N)$ に対して， $|\omega| \equiv N$ と定義する（ランダムウォークのステップ数）．また，

$$n(z, \omega) \equiv \sum_{i=0}^N \delta_{z, z_i} = \omega \text{ が } z \text{ を訪れた回数} \quad (\text{B.1.6})$$

と書くことにする．

以上の準備の下で，

Proposition B.1.1.

$$\left((\hat{L} - \hat{J})^{-1} \right)_{xy} = \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \prod_{z \in \Lambda} L_z^{-n(z, \omega)} \quad (\text{B.1.7})$$

が成り立つ．

Proof. 厳密性は少し犠牲にして，大体のところを述べよう．出発点は有限次元の行列 A, B に対する公式

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} B A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} B A^{-1} B A^{-1} + \dots \quad (\text{B.1.8})$$

である．この公式は収束を気にしないならば，両辺に $(A - B)$ をかけて項別に右辺を計算できることで確かめられる．

この公式を $A = \hat{L}, B = \hat{J}$ として用いると，

$$\left(\hat{L} - \hat{J} \right)^{-1} = \hat{L}^{-1} + \hat{L}^{-1} \hat{J} \hat{L}^{-1} + \hat{L}^{-1} \hat{J} \hat{L}^{-1} \hat{J} \hat{L}^{-1} + \dots \quad (\text{B.1.9})$$

となる．この各項の x, y 成分を書き下すと，

$$\begin{aligned} \left(\hat{L} - \hat{J} \right)_{xy}^{-1} &= \left(\hat{L}^{-1} \right)_{xy} + \sum_{z_1, z_2} \left(\hat{L}^{-1} \right)_{xz_1} J_{z_1 z_2} \left(\hat{L}^{-1} \right)_{z_2 y} + \sum_{z_1, z_2, z_3, z_4} \left(\hat{L}^{-1} \right)_{xz_1} J_{z_1 z_2} \left(\hat{L}^{-1} \right)_{z_2 z_3} J_{z_3 z_4} \left(\hat{L}^{-1} \right)_{z_4 y} + \dots \\ &= \frac{1}{L_x} \delta_{xy} + \frac{1}{L_x} J_{xy} \frac{1}{L_y} + \sum_z \frac{1}{L_x} J_{xz} \frac{1}{L_z} J_{zy} \frac{1}{L_y} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1.10})$$

となり，各項は $x \rightarrow y$ なるランダムウォークについての和と見なせて (B.1.7) を得る． □

B.1.2 「部分積分」の公式

以下はガウス型積分に対する部分積分の公式の拡張になっている．ここで考えるのは

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} J_{xy} \varphi_x \varphi_y, \quad (J_{xx} = 0, \quad J_{xy} = J_{yx} \geq 0) \quad (\text{B.1.11})$$

かつ

$$\eta_x(\varphi) = g_x(\varphi_x^2) \quad (\text{B.1.12})$$

と書けているようなモデルである． g_x については $[0, \infty)$ で連続で非負，かつ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_x(t) e^{ct} = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1.13})$$

であることを要求する．少し記号を導入しよう．

- 非負の整数 n に対して

$$d\nu_n(t) \equiv \begin{cases} \delta(t) dt & (n = 0) \\ \frac{t^{n-1} I[t \geq 0]}{(n-1)!} dt & (n \geq 1) \end{cases} \quad (\text{B.1.14})$$

- ランダムウォーク ω と $\vec{t} = \{t_x\}_{x \in \Lambda}$ に対して

$$d\nu_\omega(\vec{t}) \equiv \prod_{x \in \Lambda} d\nu_{n(x, \omega)}(t_x) \quad (\text{B.1.15})$$

と定義する．

- 各点 $x \in \Lambda$ で $t_x \geq 0$ が与えられたとき，

$$[F(\phi)]_{\vec{t}} \equiv \int \prod_{x \in \Lambda} (g_x(\varphi_x^2 + 2t_x) d\varphi_x) e^{-\mathcal{H}} F(\varphi) \quad (\text{B.1.16})$$

$$Z_{\vec{t}} \equiv [1]_{\vec{t}} \quad (\text{B.1.17})$$

$$\langle F \rangle_{\vec{t}} \equiv \frac{[F]_{\vec{t}}}{[1]_{\vec{t}}} \quad (\text{B.1.18})$$

と定義する． $t_x \equiv 0$ の量が，我々が見たい量である．

以上の下で，

Proposition B.1.2. 少なくとも一回は微分可能で，高々多項式程度でしか増加しない $\{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$ の関数 F に対して，

$$[\varphi_x F(\{\varphi_z\}_{z \in \Lambda})] = \sum_{y \in \Lambda} \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right]_{\vec{t}} \quad (\text{B.1.19})$$

が成立する．

この定理の証明には，まず gaussian の場合の類似の公式を証明しておく役に立つ：

Lemma B.1.3. Λ 上の実対称行列 A, B があり，特に A は正定値とする．このとき，微分可能で多項式程度の増加である F に対し，

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{z \in \Lambda} d\varphi_z \right) \varphi_x F(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} (A_{uv} + iB_{uv}) \varphi_u \varphi_v\right) \\ &= \sum_{y \in \Lambda} \left((A + iB)^{-1} \right)_{xy} \int \left(\prod_{z \in \Lambda} d\varphi_z \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} (A_{uv} + iB_{uv}) \varphi_u \varphi_v\right) \end{aligned} \quad (\text{B.1.20})$$

が成立する．

Proof. 基本的．例えば対角化してやる．特に $B = 0$ の場合を先にやればよい． □

Proposition B.1.2 の証明

初等的ではあるが、少し計算が厄介である。証明はまず、 F や g_x が無限階微分可能である場合について行う。その後で無限階微分可能でないものを微分可能なもので近似することにより、証明を完結させる。ここでは前半部分に力を入れて述べる。

Step 1. $g_x(\varphi_x^2)$ などが無限階微分可能と仮定する。非積分関数(の一部)を以下のように書き直す ($L_x \equiv 2 \sum_y J_{xy}$ とする):

$$\left\{ \prod_x g_x(\varphi_x^2) \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{uv} J_{uv} \varphi_u \varphi_v\right) = \prod_x \left\{ g_x(\varphi_x^2) e^{L_x \varphi_x^2 / 2} \right\} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{uv} (J_{uv} - L_u \delta_{uv}) \varphi_u \varphi_v \right\} \quad (\text{B.1.21})$$

更に

$$h_x(t) \equiv \begin{cases} g_x(t) e^{L_x t / 2} & (t \geq 0) \\ g_x(-t) e^{L_x t / 2} & (t < 0) \end{cases} \quad (\text{B.1.22})$$

と定義すると、 $g_x(t)$ が無限階微分可能であるから $h_x(t)$ は急減少関数になる。従って、 h_x のフーリエ変換を用いて

$$h_x(t_x) = \int_{-\infty}^{\infty} da_x e^{-ia_x t_x} \hat{h}_x(a_x) \quad (\text{B.1.23})$$

と表すことができる。

よって、

$$[\varphi_x F] = \int \left(\prod_z d\varphi_z h_z(\varphi_z^2) \right) \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{uv} (J_{uv} - L_u \delta_{uv}) \varphi_u \varphi_v \right\} \varphi_x F \quad (\text{B.1.24})$$

であるが、ここで $A_{xy} \equiv L_x \delta_{xy} - J_{xy}$ を導入して

$$= \int \left(\prod_z d\varphi_z h_z(\varphi_z^2) \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v \right\} \varphi_x F \quad (\text{B.1.25})$$

更に h_z のフーリエ変換を用いて

$$= \int \left(\prod_z d\varphi_z da_z e^{-ia_z \varphi_z^2} \hat{h}_z(a_z) \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v \right\} \varphi_x F \quad (\text{B.1.26})$$

となる。ここで a_z と φ_z の積分の順序を交換すると

$$\begin{aligned} &= \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) \right) \int \left(\prod_z d\varphi_z e^{-ia_z \varphi_z^2} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v \right\} \varphi_x F \\ &= \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) \right) \int \left(\prod_z d\varphi_z \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{uv} (A_{uv} + 2ia_u \delta_{uv}) \varphi_u \varphi_v \right\} \varphi_x F \end{aligned} \quad (\text{B.1.27})$$

となる。ここで内側の積分に Lemma B.1.3 を適用すると ($A_{uv} = L_u \delta_{uv} - J_{uv}$, $B_{uv} = 2ia_u \delta_{uv}$)、

$$[\varphi_x F] = \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) \right) \int \left(\prod_z d\varphi_z \right) \sum_{y \in \Lambda} \left((A + iB)^{-1} \right)_{xy} \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} (A_{uv} + iB_{uv}) \varphi_u \varphi_v \right) \quad (\text{B.1.28})$$

となるが、逆行列 $(A + iB)^{-1}$ に Proposition B.1.1 を適用すると

$$\begin{aligned} &= \sum_y \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) \right) \int \left(\prod_z d\varphi_z \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} (A_{uv} + iB_{uv}) \varphi_u \varphi_v \right) \times \\ &\quad \times \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \prod_w (L_w + 2ia_w)^{-n(w, \omega)} \\ &= \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int \left(\prod_z d\varphi_z \right) \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) e^{-ia_z \varphi_z^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v \right) \\ &\quad \times \prod_w (L_w + 2ia_w)^{-n(w, \omega)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.29})$$

となる．ここで $L > 0$ では

$$(L + 2ia)^{-n} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_n(t) e^{-(L+2ia)t} \quad (\text{B.1.30})$$

が成立することに注意すると，

$$\begin{aligned} [\varphi_x F] &= \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int \left(\prod_z d\varphi_z \right) \int \left(\prod_z da_z \hat{h}_z(a_z) e^{-ia_z \varphi_z^2} \right) \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v - \sum_u (L_u + 2ia_u) t_u\right) \end{aligned} \quad (\text{B.1.31})$$

となる．ここで a_z に関する積分を行うと

$$\begin{aligned} &= \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \int \left(\prod_z d\varphi_z h_z(\varphi_z^2 + 2t_z) \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{uv} A_{uv} \varphi_u \varphi_v - \sum_u L_u t_u\right) \\ &= \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \int \left(\prod_z d\varphi_z g_z(\varphi_z^2 + 2t_z) \right) \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{uv} J_{uv} \varphi_u \varphi_v\right) \\ &= \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right]_{\vec{t}} \end{aligned} \quad (\text{B.1.32})$$

となって，求める式が証明された． □

B.1.3 諸量の表式

以上でランダムウォーク表示が得られたので，今後重要になるいくつかの場合を明示しておこう．

まず，Proposition B.1.2 で $F = \varphi_y$ ととることにより，

$$[\varphi_x \varphi_y] = \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) [1]_{\vec{t}} = \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) Z_{\vec{t}} \quad (\text{B.1.33})$$

すなわち

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \quad (\text{B.1.34})$$

が得られる．つまり， x と y の 2 点関数は，重み $\int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z}$ を持つランダムウォークを足し合わせることで得られる．また， $F = \varphi_y \varphi_z \varphi_u$ ととることにより，

$$\langle \varphi_x \varphi_y \varphi_z \varphi_u \rangle = \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \langle \varphi_z \varphi_u \rangle_{\vec{t}} + \sum_{\omega: x \rightarrow z} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \langle \varphi_y \varphi_u \rangle_{\vec{t}} + \sum_{\omega: x \rightarrow u} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \langle \varphi_y \varphi_z \rangle_{\vec{t}} \quad (\text{B.1.35})$$

も得られる．以下ではこれらの表式を用いて必要な相関不等式を導いていこう．

B.2 Lebowitz の不等式

Theorem B.2.1. (B.1.11)，(B.1.12) のモデルに対して g_x が

$$g_x(\varphi^2) = e^{-V(\varphi^2)}, \quad (\text{B.2.1})$$

と書けて，以下を満たすものとする (V' , V'' は V の引数に関する微分)．

- 実数 m が存在して $[0, \infty)$ で $V'(x) + m \geq 0$ が成立する
- $[0, \infty)$ で $V''(x) \geq 0$ が成立する

このとき,

$$u_4(x, y, z, w) \equiv \langle \varphi_x \varphi_y \varphi_z \varphi_w \rangle - \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \langle \varphi_z \varphi_w \rangle - \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_y \varphi_w \rangle - \langle \varphi_x \varphi_w \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \leq 0 \quad (\text{B.2.2})$$

が成立. 言うまでもなく, *Ising model* や φ^4 -*model* は上の定理の仮定をみたす.

Proof. (B.1.35) と (B.1.34) を使うと,

$$\begin{aligned} u_4(x, y, z, w) &= \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left[\langle \varphi_z \varphi_u \rangle_{\vec{t}} - \langle \varphi_z \varphi_u \rangle \right] \\ &\quad + \sum_{\omega: x \rightarrow z} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left[\langle \varphi_y \varphi_u \rangle_{\vec{t}} - \langle \varphi_y \varphi_u \rangle \right] \\ &\quad + \sum_{\omega: x \rightarrow u} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left[\langle \varphi_y \varphi_z \rangle_{\vec{t}} - \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

という表式が得られる. 右辺には \vec{t} 入りの期待値とそうでないものの差が現れているが, これは一般に

$$\langle F \rangle_{\vec{t}} - \langle F \rangle = \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial s} \langle F \rangle_{s\vec{t}} = -2 \sum_x t_x \int_0^1 ds \langle F; V'_x(\varphi_x^2 + 2st_x) \rangle_{s\vec{t}} \quad (\text{B.2.4})$$

と書くことができる. (B.2.3) に出てくる F は $\varphi_z \varphi_w$ の形のものばかりであるが, このとき, GKS 不等式により

$$\langle F; V'_x(\varphi_x^2 + 2st_x) \rangle_{s\vec{t}} \geq 0 \quad (\text{B.2.5})$$

である. 従って, (B.2.3) 右辺の非積分関数は正ではなく, 他の因子も全て正であるから (B.2.3) 自身は正ではない. すなわち Lebowitz の不等式が証明された. \square

B.3 Simon の不等式とその仲間

Simon-Lieb の不等式を述べるために記号を導入しておく. 考えている格子を Λ とし, X を Λ のボンドの部分集合とする. このとき, X の元 (ボンド) は順序を区別することにするが [(u, v) と (v, u) は別物と数える], $(u, v) \in X$ ならば $(v, u) \in X$ となっているものとする. また, $\langle \cdot \rangle_X$ とは, $\langle \cdot \rangle$ の定義式中で,

$$J_{uv} \equiv 0 \quad \text{if } (u, v) \in X \quad (\text{B.3.1})$$

と置いて得られた期待値を表す. これらの準備の下で, 以下が成り立つ.

Theorem B.3.1. *Theorem B.2.1* と同じ条件の下で, 正係数の多項式 F に対して

$$\langle \varphi_x F(\{\varphi\}) \rangle - \sum_y \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_X \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right\rangle \leq \sum_{(u,v) \in X} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle_X J_{uv} \left\langle \varphi_v \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right\rangle \quad (\text{B.3.2})$$

が成立.

この定理の証明のために, 以下の補題をまず示す.

Lemma B.3.2.

$$I \equiv \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in X} J_{uv} \varphi_u \varphi_v \right\} \quad (\text{B.3.3})$$

とおくと,

$$\langle \varphi_x F I \rangle \leq \sum_{(u,v) \in X} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle J_{uv} \langle \varphi_v F I \rangle + \sum_y \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle \quad (\text{B.3.4})$$

が成立する.

Proof. 部分積分の公式から

$$\langle \varphi_x F I \rangle = \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle_{\vec{t}} + \sum_{u \in X} \sum_{\omega: x \rightarrow u} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left\langle F I \sum_{v \in X} J_{uv} \varphi_v \right\rangle_{\vec{t}} \quad (\text{B.3.5})$$

が従う．ここで右辺に出ている $\langle \cdots \rangle_{\vec{t}}$ は $t_x \equiv 0$ とした普通の期待値 $\langle \cdots \rangle$ で上から押さえられる．これをともかく認めると，

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x F I \rangle &\leq \sum_y \sum_{\omega: x \rightarrow y} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle + \sum_{u \in X} \sum_{\omega: x \rightarrow u} J_\omega \int d\nu_\omega(\vec{t}) \frac{Z_{\vec{t}}}{Z} \left\langle F I \sum_{v \in X} J_{uv} \varphi_v \right\rangle \\ &= \sum_y \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle + \sum_{u \in X} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle \left\langle F I \sum_{v \in X} J_{uv} \varphi_v \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

となって，(B.3.4) が得られる．

では， $\langle \cdots \rangle_{\vec{t}}$ を押さえよう．この量がそれぞれの t_z に関して単調非増加であることが言えれば十分である．そのために t_z で微分してみると，

$$\frac{\partial}{\partial t_z} \langle \cdots \rangle_{\vec{t}} = \langle (\cdots); V'(\varphi_z^2 + 2t_z) \rangle_{\vec{t}} = \langle (\cdots); V'(\varphi_z^2 + 2t_z) + m \rangle_{\vec{t}} \quad (\text{B.3.7})$$

となるのがわかる．定理の仮定と GKS 不等式から，(B.3.5) の右辺に出ている諸量に対しては (B.3.7) の導関数が確かに負であることがわかり，証明が完結する． \square

Theorem B.3.1 の証明 $\langle \cdots \rangle_X$ の定義から

$$\langle \cdots \rangle = \frac{\langle \cdots I \rangle_X}{\langle I \rangle_X} \quad (\text{B.3.8})$$

である．分子の $\langle \cdots \rangle_X$ に Lemma B.3.2 を用いると

$$\langle \varphi_x F I \rangle_X \leq \sum_y \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_X \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle_X + \sum_{(u,v) \in X} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} I \right\rangle_X \quad (\text{B.3.9})$$

が得られるので，両辺を $\langle I \rangle_X$ で割ると (B.3.4) が得られる． \square

以上の特殊な場合として 2 点関数に対する Simon-Lieb 不等式などを証明しておこう． Λ の部分集合 V に対して， $\langle \cdots \rangle_V^{\text{FBC}}$ を，

$$u \notin V \text{ または } v \notin V \text{ なる } u, v \text{ に対しては } J_{uv} \equiv 0$$

と置いて得られる期待値とする．このとき，まず 2 点関数に対する Simon-Lieb の不等式は

Proposition B.3.3 (Simon-Lieb の不等式). $x \in V, y \in V^c$ に対して，

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_{\substack{u \in V \\ v \in V^c}} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle_V^{\text{FBC}} J_{uv} \langle \varphi_v \varphi_y \rangle \quad (\text{B.3.10})$$

が成り立つ．

Proof. Theorem B.3.1 そのものである． \square

謝辞

この講義と講義ノートは私の今までの研究生活のなかから生まれ，色々な方々との議論を通して発展してきました．その中でも，大学院時代，議論をくり返しながら原著論文を共に解読した田崎晴明さんには非常にお世話になっています．服部哲弥さん，渡辺浩さん，そしてお名前を挙げなかったけれども私と議論して下さった全ての方に感謝します．また，参考文献に挙げたものの内の幾つかには大きな影響を受けています．最後に，東工大，佐賀大，名大，東大などでの講義に出席し，建設的な意見を述べて下さった方々に感謝します．

最後に，言うまでもないことですが，このノートに存在する間違いに関しては，私に全責任があります．

参考文献

- [1] J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb, and B. Simon. Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models. *Commun. Math. Phys.*, **62**:1–34, (1978).
- [2] B. Simon. *The Statistical Mechanics of Lattice Gases, I*. Princeton University Press, Princeton, (1993).
- [3] H. Tasaki. On mathematical analysis of critical point statistical mechanics and continuum field theory. *物性研究*, **42**:739–811, (1984).
- [4] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun. Math. Phys.*, **77**:111–126, (1980).
- [5] M. Aizenman, D.J. Barsky, and R. Fernández. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *J. Stat. Phys.*, **47**:343–374, (1987).
- [6] M. Aizenman and D.J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Commun. Math. Phys.*, **108**:489–526, (1987).
- [7] R. Fernández, J. Fröhlich, and A.D. Sokal. *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*. Springer, Berlin, (1992).

時間的制約から完全な講義ノートを作ることが出来なかったので、一般的な参考文献を3つ挙げておく。まずこの第一部に密接に関係しているものとして、田崎晴明氏による review [3] がお奨めできる。次に、その後の成果も含め、この講義ではカバーできなかった部分まで詳述した本として [7] がある。これは大変に良い本であるが、少し高度かもしれない。最後に、Simon による大部の [2] がある。これは非常に詳しく書かれており、百科辞典的な性格を持つものであるが、残念なことに（2巻本の予定の）第一巻しか刊行されていない！