

場の理論と統計力学*

— くりこみ群の見方 —

原 隆

名古屋大学 多元数理科学研究科

e-mail: hara@math.nagoya-u.ac.jp

ver.1, 1994

ver.2, 1996

ver.3.0.7, 1999.02.12

ver.3.1.0, 2000.01.01

ver.3.2.0, 2001.03.11

概要

場の理論, 臨界現象を「くりこみ群」の観点から(深く)理解することを目標(ではなくて理想)とする.

このノートについてのお断り: この講義ノート(未だに未完成)は東工大での講義「数理物理学特論 I」の補助的な教材として制作しました. 実際の講義では当然ながら黒板と自分の口でもって詳しい説明ができます. このノートは実際の講義で使用することを想定していたので, 随所にこのノートだけでは閉じていない部分が存在します. そのような足りない部分も全て補足し自己完結した形で公開すべきかとも思いますが, そのようなことを言っていたら(根性を入れて書き始めるといくらでも書きたいことが出てくるので)何年かかるかわかりません. また, ほとんどの標準的なテキストに書いてあることをわざわざここでくり返すことには私はそんなに情熱を感じません.

このような事情から, 敢えて未完成のまま当初, 東工大のホームページに載せました. 僕としては名大に移った時点で一旦公開をうち切るつもりだったのですが, 名大に移ってすぐは新しい講義などに追われて, なかなか HP を充実させることができないのが実状です. このままでは少し哀しいので, 「枯れ木も山のにぎわい」と言うことで, 訂正版をここでも公開し続けることにします. このノートが未完成であることに言い訳はいたしません, 上の様な事情の下に未完成版を公開しているものとご理解いただければ幸いです.

目次

1	統計力学における臨界現象: 何がおもしろいのか	2
1.1	スピン系の定義, φ^4 -系の定義	2
1.2	何を知りたいのか?	4
1.3	臨界現象とは	4
2	臨界現象の解析: くりこみ群以前	7
2.1	平均場理論 (Mean Field Theory, MF)	7
2.2	(ガウスからの)摂動展開	8
3	統計力学におけるくりこみ群: ブロックスピン変換	9
3.1	Block Spin Transformation (BST) の定義と基本的性質	9
3.2	BST の結果その 1 (i.i.d.-系, ガウス模型)	13
3.3	BST の結果その 2 (φ^4 -系)	15
3.4	臨界現象への応用の一般論 (世界像の説明)	15
3.5	「同値類」と θ の意味	22

*いくつかの大学での「数理物理学特論」講義ノートに基づく(まだ, もしかしらいつまでも, 暫定版)

4	場の理論におけるくりこみ群	27
4.1	場の理論の公理系	27
4.2	格子正則化と連続極限 (scaling limit)	30
4.3	くりこみ群と連続極限 (effective theory としての意味)	34
4.4	φ^4 -モデルの例	37
5	くりこみ群 (BST) の実際	40
5.1	(Weak) φ_d^4 -系 ($d \geq 4$) におけるくりこみ群の実際	40
5.2	1 次元イジング系における代表値くりこみ変換	42
5.3	Fractal 上の解析	42
5.4	KT-type? Coulomb Gas?	42
5.5	何が未解決なのか (今後の課題)	42
A	結語: なぜ今くりこみ群か	43
A.1	物理サイドの短い歴史 (文献紹介を兼ねて)	43
A.2	一般的な文献紹介	43

1 統計力学における臨界現象: 何がおもしろいのか

1.1 スピン系の定義, φ^4 -系の定義

考える対象としては, d -次元正方格子 $\mathbb{Z}^d \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_j \in \mathbb{Z}\}$ 上の「スピン系」をとる. 数学的にはこれは単に \mathbb{Z}^d の各元 (site と言う) x に実数値をとる確率変数 (スピン変数) φ_x が乗っており, その確率分布 (密度) が $\rho(\{\varphi\})$ で与えられるものである. いま, このスピン系のスピン変数の平均 (または和) がどう振る舞うか, その周辺分布 (marginal distribution) に興味があるでしょう.

1.1.1 有限体積での定義

以上のものをきちんと定義するには (無限体積のものをすぐには扱いにくいので) まず有限体積のものから出発する. まず, \mathbb{Z}^d の部分格子 Λ を考え, この上での「格子スピン系」を定義する.

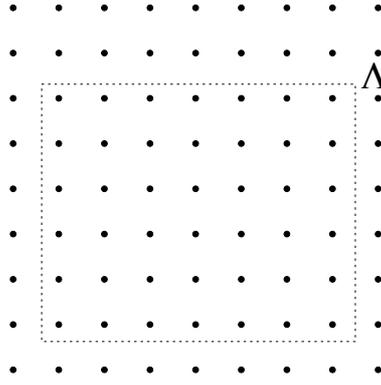
具体的には, Λ として各辺の長さが $2L$ の「超直方体」をとり, かつ周期的境界条件 (Periodic Boundary Condition, P.B.C.) を課す. この意味は,

$$\Lambda \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{Z}, -L < x_j \leq L\} \tag{1.1.1}$$

で, ただし $x_j = -L$ を $x_j = L$ と同一視することである.

さて, この格子の各点 $x \in \Lambda$ に (実数値をとる) 確率変数 (スピン変数) φ_x が乗っている状況を考え, その確率分布 (密度) を ρ_Λ とする. ρ_Λ を与えたことでこの格子上のスピン系が定義された¹.

¹物理屋さんへの注: スピン系といっているが, これは物理的にはオモチャである: 少なくとも量子ハイゼンベルグモデルとかを考えないととても現実の磁性体などを考えているとは主張できない. にもかかわらずここで考えるような「古典スピン系」の研究にも意味があると思われるのは, 後で述べる「普遍性 (universality)」を信じているからである



我々が注目するのは以下で定義するこの系の熱力学的期待値である．

$$\langle F(\{\varphi_x\}) \rangle_{\rho_\Lambda} \equiv \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \rho_\Lambda(\{\varphi_x\}) F(\{\varphi_x\}) \quad (1.1.2)$$

以下簡単のために， $\Phi \equiv \{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$ ， $d\Phi \equiv \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x$ と書く．

特に以下では

$$\rho_\Lambda(\Phi) \equiv \frac{1}{Z_\Lambda} \exp \left[-\frac{J}{4} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right] \cdot \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \quad (J, H \geq 0) \quad (1.1.3)$$

$$\eta(\varphi) = \begin{cases} \delta(\varphi^2 - K^2) & K > 0 & (\text{Ising model}) \\ \exp \left[-\frac{\mu}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right] & \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 & (\varphi^4 \text{ model}) \end{cases} \quad (1.1.4)$$

の場合を考える．ここで Z_Λ は規格化定数で $\langle 1 \rangle_{\rho_\Lambda} = 1$ となるようにとる．

Remarks:

1. Ising Model は φ^4 -model において， $\mu = -\frac{\lambda K^2}{6}$ として $\lambda \uparrow \infty$ の極限をとったものである．
2. φ^4 -model では4つのパラメーター (J, μ, λ, H) があるが， φ の大きさを一斉に変える trivial な変換

$$\varphi \Rightarrow \varphi' \equiv a\varphi \quad (1.1.5)$$

の下では

$$(J, \mu, \lambda, H) \Rightarrow (J', \mu', \lambda', H') \equiv (a^2 J, a^2 \mu, a^4 \lambda, aH) \quad (1.1.6)$$

と対応させると両者は全く同じものになる．この意味で，4つの内，一つは余分なものである．

3. 物理では $\rho = \exp(-\beta\mathcal{H})$ と書き， \mathcal{H} をハミルトニアンと呼ぶことが多い．
4. 上の J は (相互作用の強さ/ kT)， H は (磁場/ kT) という物理的意味を持つ．

1.1.2 無限体積極限の定義

無限体積系は期待値に関して Λ を \mathbb{Z}^d にする極限を考えることにより定義する：

$$\langle \cdots \rangle_\rho \equiv \text{“} \lim \text{”} \langle \cdots \rangle_{\rho_\Lambda} \quad (1.1.7)$$

上記の極限は (相転移が存在するような場合など) 一般には存在しない．しかし，境界条件などを指定することで，収束部分列をとることは可能である²．以下では特に P.B.C. を考える．また，以下では上記の期待値を単に $\langle \cdots \rangle$ とも書く．

²数学屋さんへの注：どのような場合，どのような条件の下で収束列がとれるかは数学的にはそれほど自明ではない．今考えているような強磁性の系 ($J > 0$) ではある程度一般的な結果はある．要するに， $\langle \cdots \rangle_{\rho_\Lambda}$ が Λ -様に有界であることをまず示し，後は対角線論法で収束部分列を抜き出す

1.2 何を知りたいのか？

まず、後々のために：

Definition 1.2.1. 一般に期待値 $\langle \dots \rangle$ が与えられたとき、確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の truncated expectation を形式的には以下で定義する：

$$\langle X_1; X_2; \dots; X_n \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \dots \frac{\partial}{\partial h_n} \log \left\langle \exp \left[\sum_{i=1}^n h_i X_i \right] \right\rangle \Big|_{h_1=h_2=\dots=h_n=0} \quad (1.2.1)$$

上で「形式的」と言ったのは、 $\left\langle \exp \left[\sum_{i=1}^n h_i X_i \right] \right\rangle$ という期待値は X_i の指数次のモーメントの存在を要求するが、そのような強い条件がない場合でもこの定義を用いたいからである。形式的ではない定義は、

$$\langle X_1 X_2 \dots X_n \rangle = \sum_{\mathcal{P}} \prod_{p=(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathcal{P}} \langle X_{i_1}; X_{i_2}; \dots; X_{i_p} \rangle \quad (1.2.2)$$

という関係により、帰納的に truncated expectation を定義することになる。ここで \mathcal{P} とは $1, 2, \dots, n$ をいくつかのグループに分ける分け方。

Definition 1.2.2. Definition 1.2.1 にて、特に $X_i = \varphi_{x_i}$ のときを n -点 Ursell function (connected correlation function) と言い、

$$u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \varphi_{x_1}; \varphi_{x_2}; \dots; \varphi_{x_n} \rangle \quad (1.2.3)$$

と書く。

我々の見たい量は (以下の諸量はパラメーター (J, μ, λ, H) の関数であるがその依存性は陽には書かない)：

$$G(x, y) \equiv \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle \equiv \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle - \langle \varphi_0 \rangle \langle \varphi_x \rangle \quad \text{2点関数 (two point function)} \quad (1.2.4)$$

$$M_s \equiv \lim_{H \searrow 0} \langle \varphi_0 \rangle \quad \text{自発磁化 (spontaneous magnetization)} \quad (1.2.5)$$

$$\chi \equiv \sum_x \langle \varphi_0; \varphi_x \rangle \quad \text{帯磁率 (susceptibility)} \quad (1.2.6)$$

$$\frac{1}{\xi} \equiv \lim_{n \nearrow \infty} \frac{-\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n} \quad \xi \text{を相関距離 (correlation length)} \quad (1.2.7)$$

(1.2.7) で、 e_1 は座標軸の第一方向の単位ベクトルである。(1.2.7) の極限の存在は勿論自明ではないが、例えば reflection positivity [1] のある系では保証される。

更に、

$$\overline{u}_4 \equiv \sum_{x, y, z} \langle \varphi_0; \varphi_x; \varphi_y; \varphi_z \rangle \equiv \sum_{x, y, z} \{ \langle \varphi_0 \varphi_x \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \} \quad (1.2.8)$$

も考える (上の2つめの等式は $H = 0$ の時のみ成立。)

1.3 臨界現象とは

1.3.1 正確に解ける例：ガウス模型

$\lambda = 0$ の場合 (ガウス模型) は正確に解け、示唆的である。一般に (I が有限の添字集合で A が正定値行列の時)

$$\rho(\Phi) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{x, y \in I} \varphi_x A_{x, y} \varphi_y + H \sum_{x \in I} \varphi_x \right] \quad (1.3.1)$$

に対しては、 A の逆行列（グリーン関数）を用いて解が表される：

$$\langle \varphi_x \rangle = H \sum_{y \in I} (A^{-1})_{x,y} \quad (1.3.2)$$

$$\langle \varphi_x; \varphi_y \rangle \equiv \langle \varphi_x \varphi_y \rangle - \langle \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \rangle = (A^{-1})_{x,y} \quad (1.3.3)$$

更に、高次の相関関数は以下の Wick の定理より決まる。

Theorem 1.3.1 (Wick の定理). ガウス模型（ハミルトニアンが φ の 2 次形式で書ける模型）では、

$$u_n \equiv 0 \quad (n \geq 3) \quad (1.3.4)$$

である。

我々の φ^4 -系 (1.1.3)–(1.1.4) で $\lambda = 0$ とするとガウス模型になるが、これは

$$A_{x,y} = (\mu + 2dJ)\delta_{x,y} - J\delta_{|x-y|,1}, \quad \hat{D}(k) \equiv \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos k_j \quad (1.3.5)$$

$$\langle \varphi_x; \varphi_y \rangle = (A^{-1})_{x,y} = \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\mu + 2dJ\{1 - \hat{D}(k)\}} \equiv \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot (x-y)} \hat{C}(k) \quad (1.3.6)$$

となる。

これから $\mu > 0, H = 0$ では

$$\chi = \frac{1}{\mu} \quad (1.3.7)$$

$$C(0, x) \equiv \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \stackrel{|x| \rightarrow \infty}{\approx} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{\mu + J|k|^2} \approx e^{-const. \cdot \sqrt{\mu}|x|} \implies \xi \approx \mu^{-1/2} \quad (1.3.8)$$

また、 $\mu = H = 0$ では、

$$C(0, x) \approx \begin{cases} \frac{const}{|x|^{d-2}} & (d > 2) \\ \infty & (d \leq 2) \end{cases} \quad (1.3.9)$$

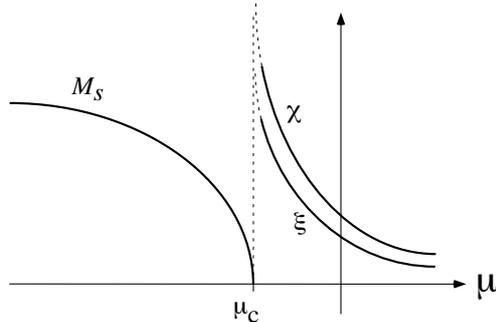
これから特に（以下の 1.3.3 節の臨界指数を用いると）、

$$\mu_c = 0, \quad \gamma = 1, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0 \quad (1.3.10)$$

がわかる。

1.3.2 φ^4 -モデル：高温側、低温側の振る舞いと臨界現象

φ^4 -model (1.1.3)–(1.1.4) にて $J > 0, \lambda > 0$ を固定して μ を変化させて場合を考えよう。この時、以下が成立する（ここでは結果のみ引用する。証明は例えば、Simon[2]）。



Theorem 1.3.2. $d > 1$ では J, λ によって決まる有限の $\mu_c(J, \lambda)$ が存在して,

- まず高温側 $\mu > \mu_c(J, \lambda)$ では φ は単に大体独立な確率変数とみなせるから³,

$$G(0, x) \leq C e^{-m|x|}, \quad (\exists C(\mu, J, \lambda), \exists m(\mu, J, \lambda) > 0) \quad (1.3.11)$$

$$M_s = 0, \quad \chi < \infty, \quad \xi < \infty \quad (1.3.12)$$

が成立.

- 一方低温側 $\mu < \mu_c(J, \lambda)$ では⁴,

$$G(x, y) \geq \exists \epsilon(\mu, J, \lambda) > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^d) \quad (1.3.13)$$

$$\chi = \infty, \quad \xi = \infty, \quad M_s > 0, \quad (1.3.14)$$

が成立.

- 更に

$$\chi, \xi \nearrow \infty \quad \text{as} \quad \mu \searrow \mu_c \quad (1.3.15)$$

このようにあるパラメーター (今は μ) を変えていった時にある値 (今は $\mu = \mu_c$) で相関距離などが発散する場合, 上の μ_c を「臨界点」, μ_c 近傍での系の振る舞いを「臨界現象」(critical phenomena, critical behaviour) という.

1.3.3 臨界現象に関する予想

臨界現象に関する 予想 は以下の通り (幾つかは証明済み)

(1) 臨界指数 (critical exponents) $\gamma, \nu, \beta, \eta, \delta, \Delta_4$ が存在して

$$\chi(\mu) \approx (\mu - \mu_c)^{-\gamma}, \quad \xi(\mu) \approx (\mu - \mu_c)^{-\nu}, \quad |\overline{u_4}| \approx (\mu - \mu_c)^{-(2\Delta_4 + \gamma)} \quad (\mu \downarrow \mu_c; H \equiv 0) \quad (1.3.16)$$

$$M_s(\mu) \approx (\mu_c - \mu)^\beta, \quad (\mu \uparrow \mu_c; H \equiv 0) \quad (1.3.17)$$

$$G(0, x) \approx |x|^{-d+2-\eta} \quad (|x| \uparrow \infty; \mu \equiv \mu_c, H \equiv 0) \quad (1.3.18)$$

$$\langle \varphi_0 \rangle_H \approx H^{1/\delta} \quad (H \downarrow 0; \mu \equiv \mu_c) \quad (1.3.19)$$

と書ける. ここで $x \rightarrow a$ の時に $f(x) \approx g(x)$ とは, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1$ なることを意味する.

(2) これらの臨界指数は系のごく「基本的」な情報で決まる. 具体的には, 上のイジングモデル, φ^4 なら系の次元 d のみで決まる. 特に φ^4 モデルはパラメーターを4つ持っているにも関わらず, 臨界指数の値はこれらによらない (臨界現象が起こる限り). より一般的には, 臨界指数の値は系の次元と対称性で殆ど決まる.

このような現象を (実際に起これば) 臨界指数の「普遍性」(universality) と言う.

(3) $d > 4$ ではこれらの指数は簡単な値 (Mean Field Values):

$$\gamma = 1, \quad \nu = \beta = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \delta = 3, \quad \Delta_4 = \frac{3}{2} \quad (1.3.20)$$

をとる.

(4) 更にこれらの間には

$$(2 - \eta)\nu = \gamma, \quad \gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1) \quad (\text{scaling law, 全ての } d \text{ で成立}) \quad (1.3.21)$$

$$d\nu = 2\Delta_4 - \gamma = \gamma + 2\beta \quad (\text{hyperscaling law, } d < 4 \text{ のみで成立}) \quad (1.3.22)$$

³ $\mu \gg 1$ の時, $a^2 = 1/\mu$ として先のスケール変換を行うと, パラメーターは $(J/\mu, 1, \lambda/\mu^2) \rightarrow (0, 1, 0)$ となり, これは $\rho(\Phi) \approx \prod_x \exp(-\varphi_x^2/2)$ と言う product measure を意味する

⁴今度は $a^2 = -\mu/(2\lambda)$ ととってみると, 今度はパラメーターは $(\frac{J|\mu|}{2\lambda}, \frac{-|\mu|^2}{2\lambda}, \frac{|\mu|^2}{4\lambda})$ となり, これはイジングモデルの極低温に近い (Peierls argument)

などが成り立つ。

(1) だけではそんなに面白くないが、上の(2)や(4)は、背後にかなり深いものを感じさせる。これが臨界指数や臨界現象が大変興味深いものである理由である。

2 臨界現象の解析：くりこみ群以前

2.1 平均場理論 (Mean Field Theory, MF)

これは数学的には無茶苦茶もしいところだが、第ゼロ近似としてはマアママの結果を出すことが多い(その理由は後で少しは明らかになる。) 簡単のため、nearest neighbour model で説明する。この場合(1.1.2)は以下のようになる：

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \prod_x d\eta(\varphi_x) \exp\left(\frac{J}{4} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y + H \sum_x \varphi_x\right) (\cdot) \quad (2.1.1)$$

ここで η は一つのスピンの与えられた確率分布を表す。

さて、(2.1.1) で $0 \in \mathbb{Z}^d$ を固定し、 $M \equiv \langle \varphi_0 \rangle$ を考えてみよう。MF の最も単純な考えは、以下のように要約される：

(2.1.1) が低温相にある場合を考える。この場合、 φ_0 へのその近接スピンからの影響を考えると、 φ_0 は有効磁場

$$H_{\text{eff}} = \frac{J}{2} \sum_{y:|x-y|=1} \varphi_y + H$$

の中に浸かっているようなものである。ところが並進不変性より $\langle \varphi_y \rangle = \langle \varphi_0 \rangle = M$ なのだから(ここまでは近似なし)、近似として 上の φ_y をその期待値 M で無理矢理置き換えてしまおう。

この近似の本質は、本来積分変数であって \mathbb{R} 上の全ての値をとる φ_y をその平均値で置き換えてしまうことにある。これを数学的に書くと以下の通り。まず、恒等式として(2.1.1)の分子の積分を

$$\begin{aligned} & \int \varphi_0 \exp\left(\frac{J}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y + H \sum_x \varphi_x\right) \prod_x d\rho_0(\varphi_x) \\ &= \int \prod_{y:y \neq 0} d\rho_0(\varphi_y) \exp\left(\frac{J}{2} \sum_{\substack{x,y:|x-y|=1 \\ x,y \neq 0}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \neq 0} \varphi_x\right) \left[\int d\rho_0(\varphi_0) \exp\left(\varphi_0 \sum_{y:|y|=1} \varphi_0 J \varphi_y + H \varphi_0\right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

と書くことはできる。分母も同じように分解すれば、

$$\langle \varphi_0 \rangle = \frac{\int \prod_{y:y \neq 0} d\rho_0(\varphi_y) \exp\left(\frac{J}{2} \sum_{\substack{x,y:|x-y|=1 \\ x,y \neq 0}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \neq 0} \varphi_x\right) \left[\int d\rho_0(\varphi_0) \exp\left(\varphi_0 \sum_{y:|y|=1} \varphi_0 J \varphi_y + H \varphi_0\right) \right]}{\int \prod_{y:y \neq 0} d\rho_0(\varphi_y) \exp\left(\frac{J}{2} \sum_{\substack{x,y:|x-y|=1 \\ x,y \neq 0}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \neq 0} \varphi_x\right) \left[\int d\rho_0(\varphi_0) \exp\left(\varphi_0 \sum_{y:|y|=1} \varphi_0 J \varphi_y + H \varphi_0\right) \right]} \quad (2.1.3)$$

となる(ここまでは近似なし)。この表式の中の後ろの φ_0 による積分は、有効磁場

$$H_{\text{eff}} \equiv \frac{J}{2} \sum_{y:|x-y|=1} \varphi_y + H \quad (2.1.4)$$

中のスピン φ_0 の平均の形である。そこで、無理矢理 φ_y をその平均値 M で置き換えてしまうのである。

Remark. 平均場近似が良い近似になるのは？

- 上で「 φ_y をその平均値 M で置き換え」と書いたが、もう少しまともな言い方ができる。つまり、(2.1.4) の表式をみると、問題なのは $\sum_{y:|x-y|=1} \varphi_y$ という塊であって、これを $2dM$ で置き換えれば、平均場近似になる。つまり、平均場近似が良い近似であるためには 必ずしも個々の φ_y の分布が M のまわりに集中している必要はなく、 $\sum_{y:|x-y|=1} \varphi_y$ という塊の分布が $2dM$ のまわりに集中していさえすればよい。
- さて、独立、同分布な 確率変数の集まりに対しては「大数の法則」や「中心極限定理」がなりたつ。これらは（ええかげんに言うとも）「多数の独立同分布な確率変数の平均の分布は、各独立変数の期待値のまわりに集中する」ことを主張する。
- 今の場合、 $\{\varphi_y\}_{y:|y|=1}$ は独立では ない（スピン同士の相互作用のため—特に、臨界現象はスピン同士の相互作用が最大限に効く場合である）。しかし、無理矢理に上の「大数の法則」などをあてはめてみると、この $\{\varphi_y\}_{y:|y|=1}$ の数（つまり $2d$ ）が大きければ平均場近似が良い近似になっていると期待できそうである（この期待が本当かどうかはより深い解析をしないと勿論わからないが...）

（この後、実際にどんな結果になるかは黒板で — どんな本にも書いてあることだから）

2.2 （ガウスからの）摂動展開

この節でやる摂動論は結局のところあまり信用できないことがわかる。しかし（1）なぜこのような単純なアプローチがだめなのかを理解し、より良い方法を考える（2）後で使うテクニックを準備する、の2つの目的で簡単に述べることにした。

2.2.1 摂動展開の形式的一般論

一般に $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ と書けるとき、期待値

$$\langle F \rangle_{\mathcal{H}} \equiv \frac{\int d\Phi e^{-\mathcal{H}} F}{\int d\Phi e^{-\mathcal{H}}} \quad (2.2.1)$$

を V に関して展開することを考える（この節では展開した結果が実際に収束するかなどはとりあえず考えずに進む。実際、収束に問題のあることが段々わかってくる。）記号を簡単にするため、

$$\rho_0(\Phi) = e^{-\mathcal{H}_0(\Phi)}, \quad \langle \dots \rangle_{\rho_0} \equiv \frac{\int d\rho_0(\Phi) (\dots)}{\int d\rho_0(\Phi)} \quad (2.2.2)$$

と略記する。

まず、定義 1.2.1 の truncated expectation の定義を X_1, X_2 のみの特別な場合を書いてみると

$$\left\langle \underbrace{X_1; X_1; \dots; X_1}_m; \underbrace{X_2; X_2; \dots; X_2}_n \right\rangle = \frac{\partial^m}{\partial h_1^m} \frac{\partial^n}{\partial h_2^n} \log \langle e^{h_1 X_1 + h_2 X_2} \rangle \Big|_{h_1=h_2=0} \quad (2.2.3)$$

となる。テイラー展開を形式的に考えると上から直ちに

$$\log \langle e^{h_1 X_1 + h_2 X_2} \rangle = \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m+n \geq 1}} \frac{h_1^m}{m!} \frac{h_2^n}{n!} \left\langle \underbrace{X_1; X_1; \dots; X_1}_m; \underbrace{X_2; X_2; \dots; X_2}_n \right\rangle \quad (2.2.4)$$

を得る。これはどんな期待値でも形式的には（収束などを気にしなければ）成り立つ恒等式である。

そこでこの (2.2.4) から

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{\langle F e^{-V} \rangle_{\rho_0}}{\langle e^{-V} \rangle_{\rho_0}} = \frac{\partial}{\partial h} \log \langle e^{hF - \lambda V} \rangle_{\rho_0} \Big|_{h=0, \lambda=1} \\ &= \frac{\partial}{\partial h} \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \left\langle \underbrace{F; F; \dots; F}_m; \underbrace{V; V; \dots; V}_n \right\rangle_{\rho_0} \Big|_{h=0, \lambda=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\langle F; \underbrace{V; V; \dots; V}_n \right\rangle_{\rho_0} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

を得る ($\partial/\partial h$ のため, $m = 1$ のみ生き残る). 同様に,

$$\log \langle e^{-V} \rangle_{\rho_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle \underbrace{V; V; \dots; V}_n \rangle_{\rho_0} \quad (2.2.6)$$

も得られる. これらが我々の摂動展開の出発点である (ただし, 以上はあくまで形式論であり, 収束などは個別に確かめる必要があることを強調しておく.)

2.2.2 φ^4 の摂動展開

上の一般論を

$$\mathcal{H}_0 \equiv \frac{J}{4} \sum_{|x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2, \quad V \equiv \sum_x \left(\frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_x^4 \right) \quad (2.2.7)$$

として使ってみる. $\rho_0 = e^{-\mathcal{H}_0}$ はガウス測度だから, (2.2.5) の右辺の期待値は原理的には全て計算できる. つまり, Wick の定理を用いると, φ の積の ρ_0 での期待値を 2 点関数 $C_{xy} \equiv \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_{\rho_0}$ (つまり格子上のラプラシアン の逆) の積で書くことができる.

例えば,

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = C_{0x} - \sum_y C_{0y} C_{yx} \left(\frac{\lambda}{2} C_{00} + \mu \right) + O(\lambda^2) \quad (2.2.8)$$

などと計算できる.

ここで問題になるのはこの展開が信用できるかということ. $d \leq 4$ では状況は絶望的であって, 展開の高次の各項は臨界点に近づくと発散してしまう! これでは展開級数の収束を云々する以前の問題である. また, $d > 4$ では各項は有限の値だが, 級数が収束する保証はない (より詳しい研究によると, この摂動級数は収束級数ではないと考えられている).

(タイプする時間がない! 詳細は黒板で)

3 統計力学におけるくりこみ群: ブロックスピン変換

いよいよ, 臨界現象の理解に欠かせない「くりこみ群」の話に進もう! 「くりこみ群」と呼ばれるものには幾通りかあるが, ここでは一番明快と思われるブロックスピン変換に話を限る.

3.1 Block Spin Transformation (BST) の定義と基本的性質

くりこみ群変換 (Renormalization Group Transformation, RGT) の一例として, 数学的には定義の簡単なブロックスピン変換 (BST) を考える. いま, スピン系のスピン変数の平均 (または和) がどう振る舞うか, その周辺分布 (marginal distribution) に興味があるでしょう⁵.

一般に RGT の定義にはいろいろあるが, 解析のやりやすいようにいい定義をつくるのがコツである.

3.1.1 BST の定義

BST とは, たくさん (無限個) あるスピン変数を有限個づつまとめて, その marginal distribution⁶ を見る変換である. もう少し詳しく言うと (1) marginal distribution を見る変換 (2) スピン変数及び距離のスケール変換, の二つを組み合わせたものである.

⁵なぜスピンの平均などに興味があるか? これらは巨視的な量と考えられるから

⁶2つの確率変数 x, y の同時分布密度関数 $\rho(x, y)$ が与えられたとする. 今 y の分布を問わずに x の分布だけを見るとき, これを ρ に従う x の marginal distribution と呼ぶ. 具体的には $\rho(x, y)$ を y について積分してしまえばいいわけで結果は $\eta(x) \equiv \int \rho(x, dy)$ で与えられる. なお, 日本語では marginal distribution は「周辺分布」と訳されるが, 僕にはあまりいい語感の訳とは思えない

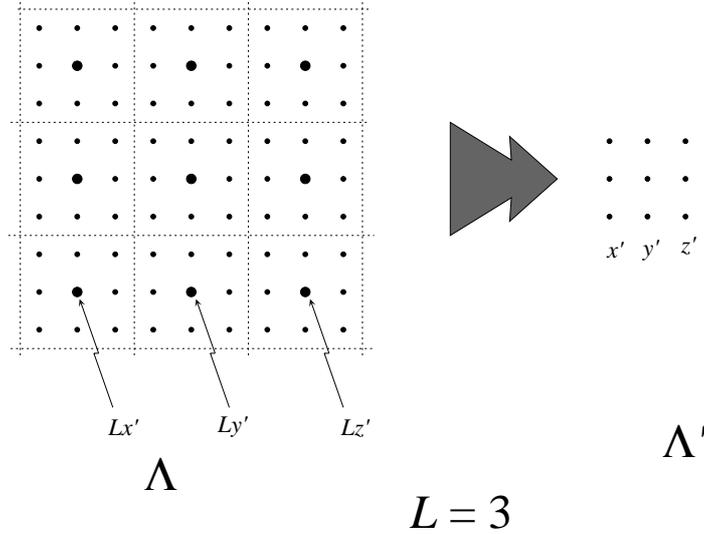
具体的には，BST を以下のような確率密度 ρ から確率密度 ρ' への変換 $\mathcal{R}_{L,\theta}$ として定義する．数学的に厳密にやるには有限系で全ての解析をまずやって，最後に無限体積極限をとる（以下では最初だけはちゃんと書きますが，そのうち，あたかも無限系で考えているかのように書きます）．

まず，元の格子 Λ （1辺 L^N ， $N \gg 1$ とする）の sites を 1辺 L （ $L > 1$ は奇数）の超立方体に分け，その中心を Lx' と書く：

$$B_{x'} \equiv \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \|x - Lx'\|_\infty < \frac{L}{2} \right\} \quad (3.1.1)$$

ここで， Lx' が超立方体の中心で格子 Λ では間隔 L 毎に並んでいる． x' 自身を集めてくると，1辺 L^{N-1} の格子ができていて， x' 同士の間隔は 1 である：

$$\Lambda' \equiv \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty < \frac{L^{N-1}}{2} \right\}. \quad (3.1.2)$$



次に新しく出来た格子 Λ' 上のスピン変数 $\{\varphi'_{x'}\}_{x' \in \Lambda'}$ の分布関数を考える．この際， $\{\varphi'_{x'}\}_{x' \in \Lambda'}$ は元のスピン変数と

$$\varphi'_{x'} \equiv L^{-\theta} \sum_{y \in B_{x'}} \varphi_y \quad (3.1.3)$$

の関係にあるように定義する（ $\theta \in \mathbb{R}$ は後の解析がうまくいくように選ぶ）．この $\{\varphi'_{x'}\}_{x' \in \Lambda'}$ の分布は ρ から

$$\rho'(\{\varphi'\}) \equiv (\mathcal{R}_{L,\theta} \rho)(\{\varphi'\}) \equiv \int \rho(\{\varphi\}) \left[\prod_{x' \in \Lambda'} \delta\left(\varphi'_{x'} - L^{-\theta} \sum_{x \in B_{x'}} \varphi_x\right) \right] \left[\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right] \quad (3.1.4)$$

と求められる（ δ は δ -関数）． ρ から ρ' を与える変換（または $\{\varphi\}$ のスピン系から $\{\varphi'\}$ のスピン系を与える変換）がブロックスピン変換である．

くり返しになるが数学的にはこれは元のスピン変数の分布 ρ から「ブロックスピン変数」(3.1.3) の周辺分布を得る変換である（スケール変換はブロックスピンの定義に入っている）．

Remark.

1. 周辺分布をとっているので，当然，系の自由度は落ちている．物理の言葉で言うと，ブロックスピン以外の系の自由度を「積分してしまった」ことになっている．
2. スケールの関係について：上のブロックスピンは，大雑把には $B_{x'}$ の中のスピンの「平均」である．この意味で，BST とはブロック内のスピンの平均の分布を見ているものといえる．ただし，以下の2点，重要な相違がある（スケールの問題）．

(a) ブロックスピン自身は単なる平均ではなく、その大きさを $L^{-\theta+d}$ で変化させた後のものである。

(b) 格子の方を見ると、新しい座標 x' での距離 1 は元の格子での格子間隔 L に相当している。この意味で、距離のスケールも $1/L$ にしてしまっている。

3. θ の値は、 $\theta = d$ が普通の平均、 $\theta = d/2$ が中心極限定理の場合である。以下で見るように、臨界現象においては θ をこの二つの中間にとった BST が威力を発揮する。

3.1.2 BST の基本的性質

1. 半群をなす。

$$\mathcal{R}_{L_2, \theta} \circ \mathcal{R}_{L_1, \theta} = \mathcal{R}_{L_2 L_1, \theta} \quad (3.1.5)$$

逆変換は存在しない（情報が落ちているので仕方ない）。

2. 期待値の間には簡単な恒等式がある：

$$\langle F(\{\varphi'_{x' \in \Lambda'}\}) \rangle_{\rho'(\{\varphi'\})} = \left\langle F\left(\left\{L^{-\theta} \sum_{y \in B_{x'}} \varphi_y\right\}_{x' \in \Lambda'}\right) \right\rangle_{\rho(\{\varphi\})} \quad (3.1.6)$$

つまり、元のスピンの「平均」を見る限りは、BST 後の ρ' からでも求められる。逆に「平均」の形になっていないもの（例： $\langle \varphi_0 \rangle$ ）についての情報は落ちていくので、正確には求められない（実は $\langle \varphi_0 \rangle$ に関しては並進不変性を利用して

$$\langle \varphi_0 \rangle = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle \quad (3.1.7)$$

と平均の形になることに注意すると求められる。また、BST を行う際に、期待値に対しても同様の変換を行うことで、平均の形になっていないものでも正確に見ることもできるが [3, 4]、ここでは立ち入らない。）

3.1.3 BST によるものの見方（予告）

さて、BST は何回も連続して行える。BST を n 回繰り返したものの結果 $\rho^{(n)} \equiv \mathcal{R}^n \rho$ は元のスピン変数を L^{nd} 個まとめたものの分布を与えるので、スピン変数の「平均」がどう振る舞うかを見るには、 $\rho^{(n)}$ の ($n \rightarrow \infty$ の極限での) 振る舞いを調べればよい（筈である）。つまり、BST のもとで確率密度がどのように変換されていくかを考えればよく、これは BST で規定される（確率密度空間での）力学系の問題と考えられる。

このように系の極限的性質（今の場合は無限個の確率変数の和の振る舞い）を適当な（スケール）変換（今の場合は確率密度に関して周辺分布をとる変換）を用いて調べていくのが、くりこみ群の考え方である。このように問題を書き換えてしまえば、このくりこみ群変換のもとでの不動点（fixed point）、その周りでの流れ（flow）の様子、などが重要になるのは（力学系の問題を考えたことのある人には）予測できよう。くりこみ群の提供する描像とは、このようくりこみ群変換のもとでの系の振る舞いから、もとの系の振る舞いを理解することに他ならない。

ここで自然な疑問として、なぜこんなにややこしいことをしてスピン変数の平均の分布を求めなければならないのか、が問題になろう。そのもっとも単純な答えは、このように段階的に行うとうまくいく（段階的に行わないとうまくいかない）場合がある、ということである。これには変換が「局所的」であることが効いている（後に詳述）。

しかし、もう少し思い切って答えると：実際にうまく行った例を考えてみると、それらは総て flow の様子が単純な場合である。特に、元々のスピン系は本質的に無限自由度であるにも関わらず、くりこみ変換によって元々のスピン系を本質的に有限（少数）自由度の力学系に翻訳できた場合⁷、くりこみ群のアプローチが大変有効になっている。この意味で、「くりこみ群の方法の醍醐味は無限自由度系をうまく有限自由度の力学系に焼き直すところにある」とも言えよう。

⁷ そのように翻訳できるのは非常に運のいい場合なのか、それとも大自由度系のある程度一般的な性質なのか、は今の所僕にはわからない。特に、世の中には多種多様なカオス系が存在することを考えると、なんの条件も付けない大自由度系ではそう簡単には翻訳できないだろうと言う気がする。しかし、今考えているような強磁性スピン系についてはこのような翻訳が可能であろう（かつカオスは起こらないだろう）と言う漠然とした「感じ」は持っている

3.1.4 不動点

\mathcal{R}_{L,θ^*} の作用の下で不変な点 ρ^*

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho^*) = \rho^* \quad (3.1.8)$$

を RGT の固定点または不動点 (fixed point) と呼ぶ。不動点が見えるためには θ をうまくとってやる必要がある (その意味で θ^* と書いた)。このあたりの事情については 3.5 節も参照。

3.1.5 relevant, irrelevant, marginal operators

次に不動点 ρ^* の近傍での流れの様子をみる。つまり、 $\rho = \rho^* + \delta\rho$ または $\rho = \rho^*(1 + \eta)$ と少しずれたものに RGT を施した結果を考えてみる。一般にはこの結果は無茶苦茶である。しかし、特に変換の固有ベクトルにあたる「固有摂動」と呼ばれるものを考えると少しは系統だった見方ができる⁸。これには、物理的、数学的の2つの“定義”がある。

Definition 3.1.1 (物理的“定義”). ρ^* が BST \mathcal{R} の不動点の時、対応するハミルトニアン \mathcal{H}^* を

$$e^{-\mathcal{H}^*} \equiv \rho^*, \quad \mathcal{R}(e^{-\mathcal{H}^*}) = e^{-\mathcal{H}^*} \quad (3.1.9)$$

で定義する。この時、

$$\mathcal{R}(e^{-(\mathcal{H}^* + \epsilon f)}) = e^{-(\mathcal{H}^* + \alpha \epsilon f + O(\epsilon^2))}, \quad \alpha \geq 0 \quad (3.1.10)$$

となるような f を考え、これを BST \mathcal{R} の不動点 ρ^* における「固有摂動」と呼ぶ。ここで f は (一応任意の) Φ の関数である。以下ではこの α を $\alpha \equiv L^\kappa$ を書くことが多い ($\kappa \in \mathbb{R}$)。

Definition 3.1.2 (数学的“定義”). ρ^* が BST \mathcal{R} の不動点の時、

$$\mathcal{R}(\rho^* f) = \alpha \rho^* f \quad (3.1.11)$$

なるような f を考え、これを BST \mathcal{R} の不動点 ρ^* における「固有摂動」と呼ぶ。ここで f は (一応任意の) Φ の関数であり、 $\rho^* f$ とは、単に Φ における値が $\rho^*(\Phi)f(\Phi)$ で与えられる ρ^* と f の積関数である。

Remark. 上の2つの定義は ϵ で展開すれば形式的⁹には同値である： \mathcal{R} は ρ に対しては線形であるから、(3.1.10) を ϵ で形式的に展開して

$$\text{LHS of (3.1.10)} = \mathcal{R}(e^{-\mathcal{H}^*} - \epsilon f e^{-\mathcal{H}^*} + O(\epsilon^2)) = \mathcal{R}(e^{-\mathcal{H}^*}) - \epsilon \mathcal{R}(f e^{-\mathcal{H}^*}) + O(\epsilon^2) \quad (3.1.12)$$

$$\text{RHS of (3.1.10)} = e^{-\mathcal{H}^*} [1 - \alpha \epsilon f + O(\epsilon^2)] = e^{-\mathcal{H}^*} - \alpha \epsilon f e^{-\mathcal{H}^*} + O(\epsilon^2) \quad (3.1.13)$$

両者を比べて $\rho^* = e^{-\mathcal{H}^*}$ が不動点であることを考えに入れると (3.1.11) を得る。

さて、固有摂動を α の値によって以下のように分類する：

$$\begin{array}{lll} \alpha > 1 & \text{つまり } \kappa > 0 & \text{relevant} \\ \alpha = 1 & \text{つまり } \kappa = 0 & \text{marginal} \\ 0 \leq \alpha < 1 & \text{つまり } \kappa < 0 & \text{irrelevant} \end{array} \quad (3.1.14)$$

このように分けるのは、この ρ^* の近傍では BST を行っていくとき、irrelevant な固有摂動はどんどん小さくなって行くので最後には大体無視できるからである¹⁰。

⁸これは不動点において BST の接写像を考えることに相当する

⁹形式的というのは、一般には η は有界でないので、 $O(\epsilon^2)$ などに意味を付けにくいからである。実際！「数学的」定義の方は $\rho^* f = F$ に対する式だと思うと ρ^* がどこにも出ていないことに気づく。こんな馬鹿な！と言うわけでこの定義は多分に形式的な物と考える必要がある。ただし、限られた場合 (Gaussian fixed point のまわりなど) ではこれら (に相当するもの) を厳密に定義・解析する事もできる

¹⁰大体と言っているのは、irrelevant な固有摂動が大変重要になってくるときもありから。これには dangerously irrelevant operators というオドロドロシイ名前がついているが、その実体は系の「安定性」などもちゃんと考えればごく自然なものである。3.4.3-3.4.5 節参照

3.2 BST の結果その 1 (i.i.d.-系, ガウス模型)

3.2.1 Trivial な例 : i.i.d.-系での中心極限定理 (CLT)

一番簡単な例として, i.i.d. (identical independent distribution) の系を考える. 非常によく知られているようにこれはもちろん中心極限定理 (の弱いもの) に導かれるのだが, BST の練習としてやってみよう.

考える系としては, (1.1.3) にて $J \equiv 0$ の場合をとる:

$$\rho(\Phi) = \prod_x \eta(\varphi_x) \quad (3.2.1)$$

φ を整数 x で番号づけて, BST としては $\varphi'_x \equiv 2^{-\theta}(\varphi_{2x} + \varphi_{2x+1})$ なる「ブロックスピン」の分布をみることにする. (3.1.4) の定義通りやると ($L = 2$),

$$\rho'(\Phi') = \prod_x \eta'(\varphi'_x), \quad \eta'(\varphi') = 2^\theta \int d\varphi \eta(\varphi) \eta(2^\theta \varphi' - \varphi) \quad (3.2.2)$$

という形になることがわかる. BST を n -回やってもこの事情は同じであるので, 以下, 一つの確率変数の分布を表す η の変換

$$\eta_{n+1}(\varphi') = 2^\theta \int d\varphi \eta_n(\varphi) \eta_n(2^\theta \varphi' - \varphi) \quad (3.2.3)$$

をとけばよい. 畳込みだから Fourier 変換を用いる (この時点で通常の CLT の証明になってしまった...)

$$\hat{\eta}_{n+1}(k) = [\hat{\eta}_n(2^{-\theta}k)]^2, \quad \left[\hat{\eta}(k) \equiv \int d\varphi e^{-ik\varphi} \eta(\varphi) \right] \quad (3.2.4)$$

となるので, 両辺の対数をとると,

$$g_{n+1}(k) = 2g_n(2^{-\theta}k), \quad [g_n(k) \equiv \log \hat{\eta}_n(k)] \quad (3.2.5)$$

つまり

$$g_n(k) = 2^n g_0(2^{-n\theta}k). \quad (3.2.6)$$

後は通常の CLT の証明と同じく, 平均がゼロで適当に性質のいい分布 η なら $\theta = 1/2$ のときに

$$g_n(k) \longrightarrow g_0(0) - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \quad \sigma^2 \equiv \langle \varphi; \varphi \rangle \quad (3.2.7)$$

となって CLT を得る.

以上はちょっと面白くなかったけども, 「BST とはこのように無限自由度を少しずつ束にして取り扱うものである」という例のつもり.

3.2.2 CLT 再び

フーリエ変換を用いないでやることも勿論できる. 少なくとも線形摂動の範囲では以下のように議論すればよい. ([5] の Section II も参照) やりたいことは力学系として見た場合の BST が, CLT に相当する fixed point をもち, かつこの fixed point が安定なことである.

3.2.3 ガウス模型

BST が陽な形で行える例として, ガウス模型を考える. これは 1.3.1 節で見たように, 正確に解けているが, ともかく BST の練習のつもりでやってみる.

さて、期待値の恒等式 (3.1.6) は BST 前後の Φ について線形な関係であるから、特に、BST 前の系がガウスであれば BST 後の系もガウスであると言える (Wick の定理がともに成立するので)。

とすると、ガウス模型は mean と covariance で決まるから、後はこれらを求めてやればよい。これは簡単であって、1.3.1 節から

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_0; \varphi'_x \rangle &= L^{-2\theta} \sum_{\|y\|, \|z-Lx\| < \frac{L}{2}} \langle \varphi_y; \varphi_z \rangle \\ &= L^{-(2\theta+d)} \int_{[-\pi L, \pi L]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + 2dJ\{1 - \hat{D}(kL^{-1})\}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{\sin \frac{k_j}{2}}{\sin \frac{k_j}{2L}} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

を得る。これを n -回繰り返すと、

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle = L^{-(2\theta+d)n} \int_{[-\pi L^n, \pi L^n]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + 2dJ\{1 - \hat{D}(kL^{-n})\}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{\sin \frac{k_j}{2}}{\sin \frac{k_j}{2L^n}} \right]^2 \quad (3.2.9)$$

となる。 n -回 BST を施したものの結果は、上の mean, covariance を与えるようなガウス測度である¹¹。つまり、

$$\rho^{(n)}(\Phi^{(n)}) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi_x^{(n)} \left(A^{(n)} \right)_{x,y} \varphi_y^{(n)} + HL^\theta \sum_x \varphi_x^{(n)} \right] \quad (3.2.10)$$

で、

$$\left[\left(A^{(n)} \right)_{x,y} \right]^{-1} = \langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \text{ of (3.2.9)} \quad (3.2.11)$$

である。

様々な θ の値

次に $\rho^{(n)} \rightarrow \rho^*$ となるにはどのような θ をとるべきか考えてみよう。磁場がないとき ($H = 0$) を考える。

この場合 ($A^{(n)}$ の逆行列であるところの) $\varphi^{(n)}$ の covariance がうまく収束してくることが必要である。つまり、(3.2.9) が $n \rightarrow \infty$ でうまく収束するような θ を考える。(3.2.9) において $|x| = O(1)$ と思って、つまり $|k| \leq O(1)$ の範囲の積分を重んじて $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \approx L^{-(2\theta-d)n} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + J|k|^2 L^{-2n}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (3.2.12)$$

となる。これが良い極限を持つには：

Case (1) $\mu > 0$ の時： $\theta = \frac{d}{2}$ ととると、

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (3.2.13)$$

これは BST を何回もやると、どんどん高温側の不動点 (i.i.d に相当) に近づいていくことを示す。

Case (2) $\mu = 0$ の時： $\theta = \frac{d+2}{2}$ ととると

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{J|k|^2} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (3.2.14)$$

でメダシメダシ。これは連続理論での covariance

$$C_{\text{cont}}(0, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{J|k|^2} \quad (3.2.15)$$

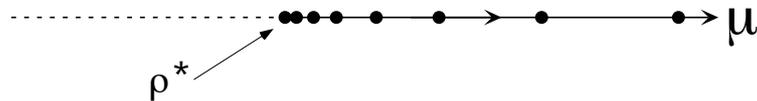
¹¹ H の方の変換は平均から求めるより、(3.4.28) のようにする方が簡単

を $0, x$ 中心, 一辺 1 の超立方体で平均したものになっている.

最後に, $\mu > 0$ の系に対して無理矢理 $\theta = \frac{d+2}{2}$ の BST を行うとどうなるか?

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu L^{2n} + J|k|^2} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (3.2.16)$$

つまり, μ が μL^{2n} になったように見える. ガウス型不動点の回りの流れの様子が見えている.



臨界指数の導出

以上より,

$$\theta = \frac{d+2}{2}, \quad \kappa = 2 \quad (3.2.17)$$

である. これから後述の 3.4.1-3.4.2 節のようにして得られる臨界指数は 1.3.1 節で求めたものと勿論一致する.

3.3 BST の結果その 2 (φ^4 -系)

この節では, φ^4 -系についての BST の結果と, どうしてそうなるのかを簡単に説明する.

3.3.1 φ^4 -模型でのくりこみ変換

実のところ, φ^4 -系で BST を厳密に行うのは大変難しい. かなりええかげんな議論でよいとしても, かなり大変である. しかし, それをやらないで結果ばかりやってもわかった気があまりしないだろうから, 我慢してやることにする.

(わああ, うるさい! 黒板でやるわ.)

3.3.2 φ^4 -模型での流れの様子

上の漸化式の結果を図示すると, 大体, 図 1 のようになる. 系の次元 d が 4 より大きい小さいかで定性的な振る舞いが異なることに注意.

3.3.3 φ^4 -模型での臨界現象 (くりこみ変換から)

ここでは, くりこみ変換の結果からどうやって臨界現象をだすのか, 考える. もっと一般の場合については 3.4 節で.

(あああ, 時間がないや. 黒板でね.)

3.4 臨界現象への応用の一般論 (世界像の説明)

この節では上に述べた φ^4 -系の flow の描像をもとに, その臨界現象を解析する.

一般にスピン系の臨界現象をくりこみ群を用いて解析する場合, そのスピン系が正確に臨界点直上にあるのか, それとも臨界点には近いけれども臨界点からはズレているのかに応じて, 少し異なった解析を行う.

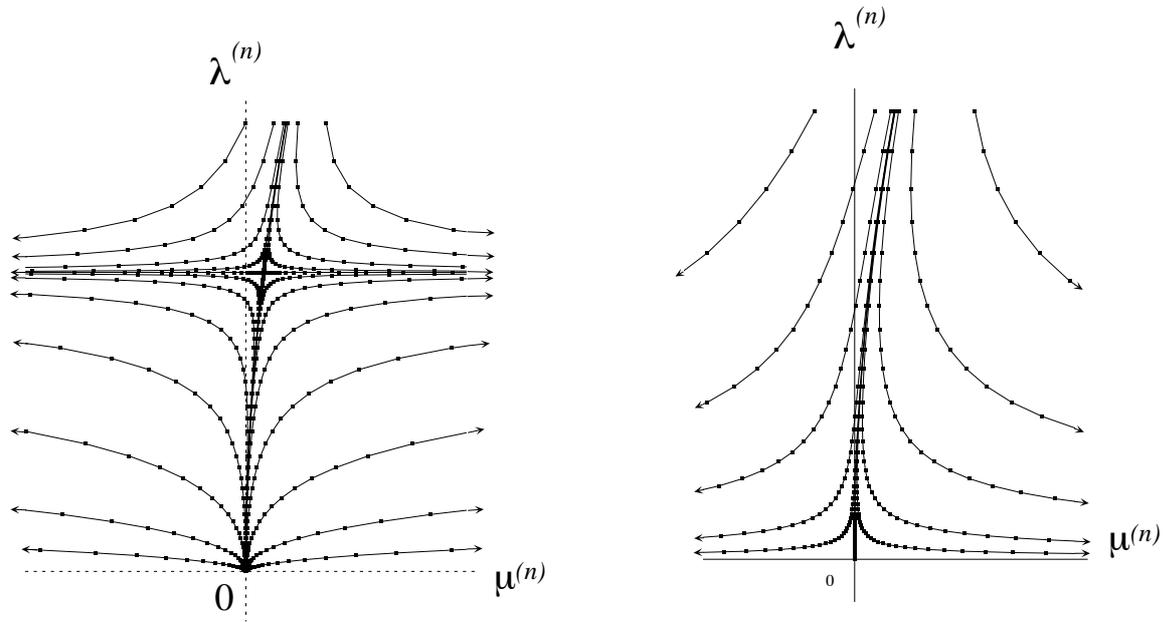


図 1: φ^4 系のくりこみ変換の flow の模式図．左側が $d < 4$, 右側が $d > 4$. 図の点々は一回毎のくりこみ変換の結果を表している .

1. 系が臨界点直上にある場合は 実質的にスピンの 1 個 の系になるまで無限回のくりこみ変換を行い , その結果から元の系の情報を得る .
2. 系が臨界点から少しズレている場合には適当な回数だけのくりこみ変換を行い , その結果から元の系の情報を得る . 何回くらいやるかというとは , くりこみ変換の結果が十分臨界点からずれて来るまでやる (この意味で , 何回やるかは系の臨界点からのズレで決まる) .

以下 , 不動点と固有振動が以下のようにになっている場合に , 臨界現象がどのようなになるか見てみよう (上で説明した φ^4 模型での振る舞いを念頭に置いている) .

仮定 3.4.1.

1. θ をうまくとったら , 不動点が存在する . このときの θ を (記号を簡単化するため) 単に θ と書く .

$$\mathcal{R}\rho^* = \rho^* \quad (3.4.1)$$

2. ρ^* の近傍では relevant な固有振動がただ一つ存在する :

$$\mathcal{R}(\rho^* f_1) = L^\kappa \rho^* f_1 \quad (3.4.2)$$

一般的な装いをとっているが , 実はこの固有振動は φ^2 またはその仲間であることを想定している . この時 , (3.1.11) の α を $\alpha \equiv L^\kappa$ と書いて指数 κ を定義した . これ以外の固有振動は高々 marginal か irrelevant であると仮定しよう , というのが上の 2 つめの仮定 .

さて , 元の測度 ρ でパラメーター μ を変化させたときの臨界現象を考える . すると , μ の値によって流れの様子は以下になる . 一応 , 仮定の形にしておく .

仮定 3.4.2.

1. μ^* が存在して , $\mu = \mu^*$ の理論 ρ_{crit} から出発して BST を n -回施した結果の $\rho_{\text{crit}}^{(n)}$ は $\rho_{\text{crit}}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho^*$ となる .

2. $\mu \neq \mu^*$ の理論では $\rho^{(n)}$ は収束しない．ただ， $\rho^{(n)}$ 中の relevant operator の係数が $(\mu - \mu^*)L^{\kappa n}$ で増えていく（仮定 3.4.1 より，その他の項は大きくはならない）

一般的な装いをとっているが，以下でも φ^4 -系を考える．上の relevant な固有摂動は φ^2 またはその仲間であることを想定している．

3.4.1 θ と η (臨界点直上)

まず， $\mu = \mu^*$ の理論について：実は $\mu^* = \mu_c$ ，つまりこの理論は臨界点にあることがわかるので，これを見越して添字 crit を用いる．

まず， φ と $\varphi^{(n)}$ の関係は

$$\varphi_{x^{(n)}}^{(n)} \equiv L^{-n\theta} \sum_{x: \|x - L^n x^{(n)}\| < \frac{L^n}{2}} \varphi_x \quad (3.4.3)$$

なので，期待値の恒等式 (3.1.6) より

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_y^{(n)} \right\rangle_{\rho_{\text{crit}}^{(n)}} = L^{-2n\theta} \sum_{\substack{x: \|x\| < \frac{L^n}{2} \\ z: \|z - L^n y\| < \frac{L^n}{2}}} \langle \varphi_x \varphi_z \rangle_{\rho_{\text{crit}}} \quad (3.4.4)$$

が成立．ここで $\langle \varphi_x \varphi_z \rangle_{\rho_{\text{crit}}}$ が y, z に関して滑らかであると思うと，上の $\langle \varphi_x \varphi_z \rangle_{\rho_{\text{crit}}} \approx \langle \varphi_0 \varphi_{L^n y} \rangle$ ，つまり，逆に読んで

$$\langle \varphi_0 \varphi_{L^n y} \rangle_{\rho_{\text{crit}}} \approx L^{-2n(d-\theta)} \left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_y^{(n)} \right\rangle_{\rho_{\text{crit}}^{(n)}} \quad (3.4.5)$$

ところが，今は $\rho_{\text{crit}}^{(n)} \rightarrow \rho^*$ となるので， y を固定して $n \nearrow \infty$ の極限を考えると，(3.4.5) の右辺で

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_y^{(n)} \right\rangle_{\rho_{\text{crit}}^{(n)}} \approx \langle \varphi_0^* \varphi_y^* \rangle_{\rho^*} \quad (3.4.6)$$

従って以下を仮定しよう¹²：

仮定 3.4.3. $\rho_{\text{crit}}^{(n)}$ の極限 ρ^* は “reasonable” なものである．つまり，

$$0 < \langle \varphi_0^* \varphi_y^* \rangle_{\rho^*} < \infty . \quad (3.4.7)$$

この時

$$\langle \varphi_0 \varphi_{L^n y} \rangle_{\rho_{\text{crit}}} \approx L^{-2n(d-\theta)} O(1) . \quad (3.4.8)$$

つまり（少なくとも $x = L^n y$ の形の x については）

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_{\rho_{\text{crit}}} \approx \|x\|^{-2(d-\theta)} \quad \text{as} \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad (3.4.9)$$

と見える．

これはこの2点関数が多項式的にしか減少しないことを示す：臨界点．また，指数 η は

$$2 - \eta = 2\theta - d \quad (3.4.10)$$

となる．

もう一つの見方，つまり $\ell = L^N$ 回やる方法も

¹²実際にこの仮定が成立しているか否かを厳密な解析で調べるには，有限系から出発して十分な回数のくりこみ変換を行い，実質的に1スピンの系に焼きなおす

3.4.2 γ と ν (高温側 I)

次に off-critical を見てみる．以下, $t \equiv \mu - \mu^*$ と書き, $\mu = \mu^* + t$ の理論の ρ を ρ_t と書く．具体的には

$$\rho_t \approx \rho_{\text{crit}} \times \exp\left[-\frac{t}{2} \sum_x \varphi_x^2\right] \quad (3.4.11)$$

さて, ρ_t ($|t| \ll 1$) に BST を n -回施すと, その結果は ($n \gg 1$ かつ $|tL^{n\kappa}| \leq O(1)$ の限り)

$$\rho_t^{(n)} \approx \rho^* \times \exp\left[-\frac{tL^{n\kappa}}{2} \sum_x \left(\varphi_x^{(n)}\right)^2\right] \quad (3.4.12)$$

となっているはず．そこで, $n = n(t)$ を

$$tL^{n\kappa} = O(1) \quad \text{つまり} \quad n\kappa \approx |\log_L t| \quad (3.4.13)$$

なるように決め, この n -回だけ BST を行う．結果は,

$$\rho_t^{(n)} \approx \rho^* \exp\left[-O(1) \sum_x \left(\varphi_x^{(n)}\right)^2\right]. \quad (3.4.14)$$

さて, この $\rho_t^{(n)}$ における期待値は critical のものからのズレが φ^2 の係数で $O(1)$ であることから, 相関距離 $\xi^{(n)}$ は

$$\xi^{(n)} = O(1) \quad (3.4.15)$$

を満たすと考えられる．これを元に戻すと

$$\xi_t = L^{-n} \xi^{(n)} = O(L^{-n}) \approx O(t^{-1/\kappa}) \quad (3.4.16)$$

となって,

$$\nu = \frac{1}{\kappa} \quad (3.4.17)$$

を得た．

次に γ であるが, ここでもう一つ仮定する:

仮定 3.4.4. θ はもともと臨界理論に対して $\varphi^{(n)}$ の規格化をうまく行うものだったが, 上の $\rho_t^{(n)}$ に対してもいい規格化因子である (これは ρ^* の近傍での流れが滑らかなことを仮定する感じである.)

すると, $\rho_t^{(n)}$ では相関距離が $O(1)$ で, かつ $\varphi^{(n)}$ の規格化もうまく行ってるので,

$$\chi^{(n)} \equiv \sum_{x^{(n)}} \left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_{x^{(n)}}^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} = O(1) \quad (3.4.18)$$

これを期待値の恒等式 (3.1.6) を用いて焼きなおして,

$$\chi = L^{2n(\theta-d)} \chi^{(n)} = O(L^{2n(\theta-d)}) = O(t^{-(2\theta-d)/\kappa}), \quad (3.4.19)$$

つまり,

$$\gamma = \frac{2\theta - d}{\kappa} \quad (3.4.20)$$

を得る．

3.4.3 Δ とその周辺 (高温側 II)

これには, 以下の renormalized coupling

$$g_{\text{ren}} \equiv \frac{|\overline{u_4}|}{\chi^2 \xi^d} \quad (3.4.21)$$

を見るのがよい. 実はこれは BST の下で不変である: $g_{\text{ren}}^{(n)} = g_{\text{ren}}$. 以下ではこれを使わない地道な方法を示す.

さて, n -回 BST を行った後の $\overline{u_4^{(n)}}$ は, 何から決まるか? これはガウスからのズレを表すから, 大体 $(\varphi^{(n)})^4$ の係数 $\lambda^{(n)}$ から決まると考えられる. 場合分けする.

Case (1): $\lambda^{(n)} \rightarrow \lambda^* > 0$ の時.

これは簡単. まず, γ, ν の時と同じ回数 n -回 BST を行くと, $|\overline{u_4^{(n)}}| \approx \lambda^* = O(1)$. よって, これを期待値の恒等式 (3.1.6) を用いて元のスピンの焼きなおして,

$$|\overline{u_4}| = L^{(4\theta-d)n} |\overline{u_4^{(n)}}| = O(L^{(4\theta-d)n}) = O(t^{-\frac{4\theta-d}{\kappa}}) \quad (3.4.22)$$

従って, $2\Delta_4 + \gamma = \frac{4\theta-d}{\kappa}$, つまり

$$\Delta_4 = \frac{\theta}{\kappa} \quad (3.4.23)$$

Case (2): $\lambda^{(n)} \rightarrow 0$ の時.

この時は注意が必要である. この場合 (φ^4 より高次の項は irrelevant 故もっと小さいから) $\rho^{(n)} \rightarrow \rho_{\text{gauss}}$ となっていて, θ, κ の値は

$$\theta = \frac{d+2}{2}, \quad \kappa = 2. \quad (3.4.24)$$

この時, $\lambda^{(n)}$ がどのように振る舞うかという, gaussian fixed point の周りの perturbation から,

$$\lambda^{(n)} \approx \lambda^{(n-1)} \times L^{4(\theta-d)+d} \approx \lambda^{(n-1)} \times L^{4-d} \approx O(L^{(4-d)n}) \quad (3.4.25)$$

従って, $|\overline{u_4^{(n)}}| \approx \lambda^{(n)} = O(L^{(4-d)n})$ より期待値の恒等式 (3.1.6) を用いて元のスピンの焼きなおし

$$|\overline{u_4}| = L^{(4\theta-d)n} |\overline{u_4^{(n)}}| \approx O(L^{8n}) \approx O(t^{-4}) \quad (3.4.26)$$

よって

$$2\Delta_4 + \gamma = 4, \quad \Delta_4 = \frac{3}{2}. \quad (3.4.27)$$

3.4.4 δ とその周辺 (臨界点直上, 磁場入り)

今度は臨界理論 ($\mu = \mu_c$) に磁場が入った時を考える. 磁場の項は大変きれいに変換される:

$$\varphi'_{x'} = L^{-\theta} \sum_{x: \|x-Lx'\| < L/2} \varphi_x \iff H \sum_x \varphi_x = HL^\theta \sum_{x'} \varphi'_{x'}. \quad (3.4.28)$$

つまり, n -回 BST を行った後は, 磁場は $HL^{n\theta}$ になっていて,

$$\rho^{(n)} \approx \rho_{\text{crit}}^{(n)} \times \exp \left[HL^{n\theta} \sum_x \varphi_x^{(n)} \right]. \quad (3.4.29)$$

以下, これの意味するところを考える.

Case (1): $\lambda^{(n)} \rightarrow \lambda^* > 0$ の時. n を,

$$H^{(n)} = HL^{n\theta} = O(1) \quad (3.4.30)$$

なるようにとると, $\varphi^{(n)}$ の effective potential は

$$\lambda^{(n)} \left(\varphi^{(n)} \right)^4 - H^{(n)} \varphi^{(n)} \quad (3.4.31)$$

であり,

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} \approx \left(\frac{H^{(n)}}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/3} = O(1) \quad (3.4.32)$$

よってこれを期待値の恒等式 (3.1.6) を用いて元のスピンの焼きなおして,

$$\langle \varphi_0 \rangle_{\rho} = L^{-(d-\theta)n} \left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} = O\left(L^{-(d-\theta)n}\right) = O\left(H^{(d-\theta)/\theta}\right) \quad (3.4.33)$$

従って

$$\delta = \frac{\theta}{d-\theta} \quad (3.4.34)$$

Case (2): $\lambda^{(n)} \rightarrow 0$ の時 .

この場合には要注意 . この時も結局 (3.4.24) が成立している . さて, 先のように $H^{(n)} = O(1)$ となるまで BST を行うと, $\varphi^{(n)}$ の effective potential の極値は

$$\varphi^{(n)} \approx \left(\frac{H^{(n)}}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{1}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/3} \nearrow \infty \quad (3.4.35)$$

となる . これは Large Field Problem に抵触する可能性が大 (φ の大きなところでは φ^6, φ^8 項などが実際には効いているため, φ^4 -項からのみ決めるのはよくない!)

この場合はむしろ, $\varphi^{(n)} = O(1)$ となるくらいの n をとるべし . つまり,

$$H^{(n)} \approx \lambda^{(n)} \quad \Longrightarrow \quad HL^{n\theta} \approx \lambda L^{(4-d)n} \quad \Longrightarrow \quad L^{(d-4+\theta)n} \approx \lambda/H \quad (3.4.36)$$

となるような n をとる . ここへ (3.4.24) を入れて計算すると,

$$\langle \varphi_0 \rangle_{\rho} \approx L^{-(d-\theta)n} \left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} = O\left(L^{-\frac{d-2}{2}n}\right) = O\left(H^{-1/3}\right) \quad (3.4.37)$$

つまり, $\delta = 3$ を得る .

3.4.5 β とその周辺 (低温側)

最後に低温側を考える .

まず, ν', γ' については高温側と同じである . つまり,

$$|t|L^{n\kappa} = O(1) \quad (3.4.38)$$

なる n -回だけ BST を行うと,

$$\chi^{(n)} = O(1), \quad \xi^{(n)} = O(1) \quad (3.4.39)$$

が予想され, 従って

$$\nu' = \frac{1}{\kappa}, \quad \gamma' = \frac{2\theta - d}{\kappa'} \quad (3.4.40)$$

β についてはやはり注意が必要である .

Case (1): $\lambda^{(n)} \rightarrow \lambda^* > 0$ の時 . n を ,

$$(-t)L^{n\kappa} = O(1) \quad (3.4.41)$$

なるようにとると , $\varphi^{(n)}$ の effective potential は

$$\lambda^{(n)} \left(\varphi^{(n)} \right)^4 + tL^{n\kappa} \left(\varphi^{(n)} \right)^2 \quad (3.4.42)$$

であり ,

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} \approx \left(\frac{(-t)L^{n\kappa}}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/2} = O(1) \quad (3.4.43)$$

よってこれを元のスピンの焼きなおして ,

$$\langle \varphi_0 \rangle_{\rho} = L^{-(d-\theta)n} \left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} = O \left(L^{-(d-\theta)n} \right) = O \left(|t|^{(d-\theta)/\kappa} \right) \quad (3.4.44)$$

従って

$$\beta = \frac{d-\theta}{\kappa} \quad (3.4.45)$$

Case (2): $\lambda^{(n)} \rightarrow 0$ の時 .

この場合 , 実際には (3.4.24) である . この場合には磁場の場合と同様に要注意 . つまり , 先のように $(-\mu_n/\lambda_n)^{1/3} = O(1)$ となるまで BST を行くと , $\varphi^{(n)}$ の effective potential の極値は

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} \approx \left(\frac{(-t)L^{n\kappa}}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{1}{\lambda^{(n)}} \right)^{1/2} \nearrow \infty \quad (3.4.46)$$

となり , 信用できない .

この場合は磁場入りの時と同じように , $\varphi^{(n)} = O(1)$ となるくらいの n をとるべし . つまり ,

$$(-t)L^{n\kappa} \approx \lambda^{(n)} \implies (-t)L^{n\kappa} \approx \lambda L^{(4-d)n} \implies L^{(d-2)n} \approx \frac{\lambda}{|t|} \quad (3.4.47)$$

となるような n をとる . ここへ $\theta = \frac{d+2}{2}$ を入れて計算すると ,

$$\langle \varphi_0 \rangle_{\rho} \approx L^{-(d-\theta)n} \left\langle \varphi_0^{(n)} \right\rangle_{\rho^{(n)}} = O \left(L^{-\frac{d-2}{2}n} \right) = O \left(|t|^{1/2} \right) \quad (3.4.48)$$

つまり , $\beta = 1/2$ となる .

3.4.6 Universality, Scaling, Hyperscaling

以上から , 臨界指数が結局 2 つの指数 θ, κ で表された . 振り返ってみると , この二つの指数は ρ^* に固有のものであって , ρ が ρ^* に (一度は) 近づく限り , 出発点の ρ が異なっても同じ指数が出てくるのである . この意味で , 臨界指数は出発点の モデルの詳細を変えても普遍 と結論できる : これが universality のくりこみ群による解釈である .

さらに , 臨界指数の表式からこの 2 つの指数 θ, κ を消去すると ,

$$(2-\eta)\nu = \gamma \quad (3.4.49)$$

$$\beta\delta = \Delta_4 = \beta + \gamma \quad (3.4.50)$$

$$\gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1) = 2\Delta_4 - \gamma = \Delta_4 + \beta \quad (3.4.51)$$

という scaling laws 及び ($d < 4$ で)

$$d\nu = 2\delta_4 - \gamma = \gamma + 2\beta \quad (3.4.52)$$

という hyperscaling law が導かれる .

このように , 一見神秘的に見えた臨界現象がくりこみ群の立場からは (幾つかの仮定の下に¹³) 見事に説明される .

¹³これらの仮定は頑張って計算すれば正しいかどうか確かめられる可能性があるし (数学的には厳密ではないが) ある程度の根拠もある . 更

3.4.7 Tricritical Behaviour

Relevant な固有振動が2つ以上ある時は

3.5 「同値類」と θ の意味

この節の内容はちょっとオタク (そういや最近きかないな ...) です . わかってる人には自明かもしれませんが , 頭に書いた本が見あたらないので少し詳しく書きました .

3.5.1 スピン測度の「同値関係」

以下 , 一応有限個のスピン $\{\varphi_x\}_x \equiv \Phi$ を考え , Φ の空間を Ω とする . Φ の分布密度を ρ と書く . この意味は , $A \subset \Omega$ の実現確率が

$$\text{Prob}(\Phi \in A) \equiv \int_A \rho(\Phi) d\Phi \quad (3.5.1)$$

で書けるということ .

今 , 1対1写像 $T: \Omega \rightarrow \Omega$:

$$T \equiv T_{L,\gamma}: \{\varphi_x\}_x \rightarrow \{L^{-\gamma}\varphi_x\}_x \equiv \{\varphi_x^T\}_x \quad (3.5.2)$$

を考える (各スピンを一斉に $L^{-\gamma}$ 倍する変換) . これによりスピン Φ の分布から Φ^T の分布が自然に導かれる . つまり ,

$$\text{Prob}(\Phi^T \in TA) = \text{Prob}(T\Phi \in TA) = \text{Prob}(\Phi \in A) \quad (3.5.3)$$

が任意の Ω の部分集合 A について成立 . これから Φ^T の確率密度 $\rho^T(\Phi^T)$ を求めよう .

$$\text{Prob}(\Phi^T \in A) \equiv \int_A \rho^T(\Phi^T) d\Phi^T \quad (3.5.4)$$

で ρ^T を定義すると ,

$$\int_{TA} \rho^T(\Phi^T) d\Phi^T = \text{Prob}(\Phi^T \in TA) = \text{Prob}(T\Phi \in TA) = \text{Prob}(\Phi \in A) = \int_A \rho(\Phi) d\Phi \quad (3.5.5)$$

さて , LHS を $\Phi^T = T\Phi$ を用いて Φ でかき直すと ,

$$\text{LHS} = \int_A \rho^T(T\Phi) \left. \frac{\partial \Phi^T}{\partial \Phi} \right|_{\Phi^T=T\Phi} d\Phi = \int_A \rho^T(T\Phi) (\det T) d\Phi \quad (3.5.6)$$

なので , 結局

$$(\det T) \rho^T(T\Phi) = \rho(\Phi) \quad (3.5.7)$$

つまり ,

$$\rho^T(\Phi^T) = \frac{1}{\det T} \rho(T^{-1}\Phi^T) = L^{\gamma|\Lambda|} \rho(L^\gamma\Phi^T) \quad (3.5.8)$$

を得る . これはまた形式的には

$$\rho^T(\Phi^T) = \int \rho(\Phi) \delta(\Phi^T - L^{-\gamma}\Phi) d\Phi \quad (3.5.9)$$

とも書ける .

以上をまとめると , 次の「同値なスピン測度」の定義に導かれる .

に幾つかの具体例では数学的にも厳密に証明されている . この意味で , くりこみ群の理論はそれ以前の ad hoc な仮定を導入する理論とは根本的に異なる

定義 3.5.1. $L > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ を固定し, 演算子 $T_{L,\gamma}$ を

- スピン変数に対する作用は

$$T_{L,\gamma} : \varphi_x \mapsto L^{-\gamma} \varphi_x \quad (\forall x \in \Lambda) \quad (3.5.10)$$

- 確率密度 ρ に対する作用は (上の $T_{L,\gamma}$ の下で自然になるように)

$$\Phi^T(\Phi') = (T_{L,\gamma}\rho)(\Phi') = \int \rho(\Phi) \delta(\Phi' - L^{-\gamma}\Phi) d\Phi = L^{|\Lambda|\gamma} \rho(L^\gamma \Phi') \quad (3.5.11)$$

で定義する. この定義の下で, 2つの確率密度 ρ_1 と ρ_2 が適当な L, γ を用いて

$$T_{L,\gamma}\rho_1 = \rho_2 \quad (3.5.12)$$

と書けるとき, ρ_1 と ρ_2 は 同値 であるということにする:

$$\rho_1 \sim \rho_2 \quad (3.5.13)$$

註 3.5.2. 同値類を例で考えてみよう.

$$\mathcal{H} = \frac{J}{4} \sum_{|x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \sum_x \left[\frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_x^4 \right] \quad (3.5.14)$$

の場合, 係数の内, スケール変換によって不変な組み合わせ (この場合なら J, μ, λ の内, $\mu/J, \lambda/J^2$ の二つの組み合わせ) だけに意味がある. 別の言い方をすると, 同値類の代表元として $J \equiv 1$ としたものを常にとることにして考えていくとよい.

なお, 以下の性質 (定義からすぐ出る) を後で用いる.

補題 3.5.3. 二つの関数 ρ_1, ρ_2 の積に対する $T_{L,\gamma}$ の作用は

$$T_{L,\gamma}(\rho_1 \rho_2) = L^{-\gamma|\Lambda|} T_{L,\gamma}(\rho_1) T_{L,\gamma}(\rho_2) \quad (3.5.15)$$

3.5.2 BST の「同値関係」

さて, この定義によると, 異なった θ を用いた BST 同士が $T_{L,\gamma}$ により関係づけられる. それを見るには, まず:

命題 3.5.4. ρ に対する変換として,

$$\mathcal{R}_{L,\theta} T_{L,\gamma} \rho = \mathcal{R}_{L,\theta+\gamma} \rho = T_{L,\gamma} \mathcal{R}_{L,\theta} \rho \quad (3.5.16)$$

が成立.

Proof. 記号を簡単化するため, $(\hat{S}\Phi)_x \equiv \sum_{y \in B_x} \varphi_y$ と略記する. 定義より,

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_{L,\theta} T_{L,\gamma} \rho)(\Phi'') &= (\mathcal{R}_{L,\theta}(T_{L,\gamma}\rho))(\Phi'') = \int (d\Phi') (T_{L,\gamma}\rho)(\Phi') \delta(\Phi'' - L^{-\theta} \hat{S}\Phi') \\ &= \int (d\Phi') \left[\int (d\Phi) \delta(\Phi' - L^{-\gamma}\Phi) \rho(\Phi) \right] \delta(\Phi'' - L^{-\theta} \hat{S}\Phi') = \int (d\Phi) \delta(\Phi'' - L^{-\theta} \hat{S}(L^{-\gamma}\Phi)) \rho(\Phi) \\ &= \int (d\Phi) \delta(\Phi'' - L^{-\theta-\gamma} \hat{S}(\Phi)) \rho(\Phi) = (\mathcal{R}_{L,\theta+\gamma}\rho)(\Phi'') \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

□

系 3.5.5.

$$\tilde{\rho}_2 = T_{L,\gamma}\rho_1 \quad (3.5.18)$$

ならば

$$\mathcal{R}_{L,\theta}(\rho_2) = T_{L,\gamma}(\mathcal{R}_{L,\theta}\rho_1). \quad (3.5.19)$$

特に, $\rho_1 \sim \rho_2$ ならば $\mathcal{R}\rho_1 \sim \mathcal{R}\rho_2$. つまり, BST は 同値類から同値類への変換 と見える. また,

$$\mathcal{R}_{L,\theta_1}(\rho) \sim \mathcal{R}_{L,\theta_2}(\rho) \quad (3.5.20)$$

が常に成り立つ. より詳しくは,

$$\mathcal{R}_{L,\theta_2}\rho = T_{L,(\theta_2-\theta_1)}(\mathcal{R}_{L,\theta_1}\rho) \quad (3.5.21)$$

つまり, 異なる θ を用いた BST を同じ ρ に施した結果は, 互いに同値である.

Proof. Prop 3.5.4 より

$$\mathcal{R}_{L,\theta}\rho_2 = \mathcal{R}_{L,\theta}(T_{L,\gamma}\rho_1) = T_{L,\gamma}\mathcal{R}_{L,\theta}\rho_1$$

また, 後半は Prop 3.5.4 そのものである. □

この性質から, 以下の定義に導かれる:

定義 3.5.6. 同値関係 \sim による確率測度の同値類 (ρ を代表元とするもの) を $\tilde{\rho}$ と書くことにすると, BST の同値類 \tilde{R}_L を

$$\tilde{R}_L(\tilde{\rho}) \equiv \mathcal{R}_{L,\theta}(\rho) \quad (\text{右辺は } \mathcal{R}_{L,\theta}(\rho) \text{ の確率測度としての同値類}) \quad (3.5.22)$$

なる同値類から同値類への演算子として定義できる. もちろん, この定義では右辺の θ は任意.

以上をまとめると: BST は確率密度 ρ の 同値類 $\tilde{\rho}$ の間の変換 と見ることが出来る.

$$\tilde{R}_L(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}' \quad (3.5.23)$$

このとき, \tilde{R}_L は θ によらず L (スケール変換の度合い) のみで決まる. 流れの図は実はこの同値類間の変換の様子を書いていると見るのが正しい.

註 3.5.7. 先の註 3.5.2 で述べた, $J \equiv 1$ とした代表元で考えてみると, 同値類間のくりこみ変換は, 単に以下の変換と思うこともできる.

1. まず, 出発点の ρ (これは一応, $J \equiv 1$ としてあるものとする) をとり, θ は勝手に選んで BST を普通に行う. 出来た結果を ρ' と書こう.
2. 次に, φ' のスケール変換を行い, J' を 1 にするようにする. そのようにして得られた結果を $\tilde{\rho}'$ と書く.
3. 同値類の間でのくりこみ変換とは, 要するに $\rho \mapsto \tilde{\rho}'$ の事である.

以上のように考えると, θ の選び方が陽には入ってこないのが, 少しだけ心理的に楽かも知れない (とは言え, ρ' を規格化して $\tilde{\rho}'$ にする時点で実質的には θ を計算していることになるのだが.)

3.5.3 不動点, flow の意味

以上の定義を元に不動点, 流れなどの意味を見直してみよう. まず,

系 3.5.8. 今, ρ^* が \mathcal{R}_{L,θ^*} の不動点だとする:

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho^*) = \rho^* \quad (3.5.24)$$

すると,

1. $\rho \sim \rho^*$ ならば, この ρ も同じ θ^* で不動点:

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}(T_{L,\gamma}\rho^*) = T_{L,\gamma}(\mathcal{R}_{L,\theta^*}\rho^*) = (T_{L,\gamma}\rho^*) \quad (3.5.25)$$

2. $\theta \neq \theta^*$ での BST では ρ^* は不動点には (もちろん) 見えない:

$$\mathcal{R}_{L,\theta}\rho^* = T_{L,\theta-\theta^*}\mathcal{R}_{L,\theta^*}\rho^* = T_{L,\theta-\theta^*}\rho^* \quad (3.5.26)$$

この意味で, ρ^* またはその同値類を不動点に持つための θ^* はユニークである.

Proof. Prop 3.5.4 よりすぐ出る. □

系 3.5.9. $\tilde{\mathcal{R}}$ でみて不動点, つまり $\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\rho}^*) = \tilde{\rho}^*$ が成立していると, 必ず θ^*, ρ^* をうまく見つけて (ρ^* は $\tilde{\rho}^*$ の代表元)

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}\rho^* = \rho^* \quad (3.5.27)$$

ならしめることが出来る.

Proof. 定義から, ρ^* を $\tilde{\rho}^*$ の代表元とすると, 各 θ (任意) 毎に ρ^* と同値な ρ_θ があって

$$\mathcal{R}_{L,\theta}\rho^* = \rho_\theta \quad (3.5.28)$$

が成立. ρ^* と ρ_θ が同値ということはかつ

$$\exists \gamma(\theta), \quad s.t. \quad \rho_\theta = T_{L,\gamma}\rho^* \quad (3.5.29)$$

と言うこと故, この二つより,

$$\mathcal{R}_{L,\theta}\rho^* = T_{L,\gamma}\rho^* \quad (3.5.30)$$

となり, Prop 3.5.4 を用いて左辺を書き換えると,

$$T_{L,\gamma}\mathcal{R}_{L,\theta-\gamma}\rho^* = T_{L,\gamma}\rho^* \quad \implies \quad \mathcal{R}_{L,\theta-\gamma}\rho^* = \rho^* \quad (3.5.31)$$

つまり, 結論が $\theta^* = \theta - \gamma$ として成立. なお, この θ^* が一意的に決まることも Prop 3.5.4 から保証される. □

これより, 同値類の意味での不動点の定義に導かれる:

定義 3.5.10. 同値類の言葉では不動点 $\tilde{\rho}^*$ を,

$$\tilde{\mathcal{R}}_L(\tilde{\rho}^*) = \tilde{\rho}^* \quad (3.5.32)$$

なるものとして定義.

次に気になるのは Relevant, Irrelevant が同値類でどう見えるか?

命題 3.5.11. ρ^* が不動点, η が固有摂動

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho^*) = \rho^*, \quad \mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho^*\eta) = \alpha(\rho^*\eta) \quad (3.5.33)$$

のとき,

$$\rho_1^* \equiv T_{L,\gamma}\rho^*, \quad \eta_1 \equiv T_{L,\gamma}\eta \quad (3.5.34)$$

に対しても

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho_1^*) = \rho_1^*, \quad \mathcal{R}_{L,\theta^*}(\rho_1^*\eta_1) = \alpha(\rho_1^*\eta_1) \quad (3.5.35)$$

が成立.

つまり, 固有摂動自身を $T_{L,\gamma}$ で変換すると, ρ^* を同じ $T_{L,\gamma}$ で変換したものの固有摂動になっている.

Proof. (3.5.15) を用いて計算.

$$\rho_1^*\eta_1 = T(\rho_1^*)T(\eta_1) = L^{|\Lambda|}T(\rho_1^*\eta_1) \quad (3.5.36)$$

なので

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\rho_1^*\eta_1) &= \mathcal{R}(L^{|\Lambda|}T(\rho_1^*\eta_1)) = L^{|\Lambda|}\mathcal{R}T(\rho_1^*\eta_1) = L^{|\Lambda|}T\mathcal{R}(\rho_1^*\eta_1) \\ &= L^{|\Lambda|}T\alpha(\rho_1^*\eta_1) = \alpha L^{|\Lambda|}T(\rho_1^*\eta_1) = \alpha\rho_1^*\eta_1 \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

□

命題 3.5.12.

$$\mathcal{R}_{L,\theta^*}\phi = \alpha\phi \iff \tilde{\mathcal{R}}_L\tilde{\phi} = \alpha\tilde{\phi} \quad (3.5.38)$$

ここで左から右は同値類の定義そのものだが, 右から左の意味は, 「右が成立していたら一意的に決まる θ^* が存在して左が成立」ということ.

ただし, 上の θ^* で特徴づけられる不動点があるかどうかはわからない. また, 上のは今までの文脈では $\phi = \rho^*\eta$ に相当する.

Proof. 右が成立しているとは, $\tilde{\phi}$ の代表元 ϕ_1, ϕ_2 及び適当な θ でもって

$$\mathcal{R}_{L,\theta}(\phi_1) \sim \alpha\phi_2 \implies \exists \gamma_2, \mathcal{R}_{L,\theta}(\phi_1) = T_{L,\gamma_2}(\alpha\phi_2) \quad (3.5.39)$$

が成立すること. ところが, $\tilde{\phi}$ の代表元 ϕ_1, ϕ_2 の間には適当な γ_1 でもって

$$\phi_2 = T_{L,\gamma_1}(\phi_1) \quad (3.5.40)$$

も成立するはず. この2つより

$$\mathcal{R}_{L,\theta}(\phi_1) = T_{L,\gamma_2}(\alpha T_{L,\gamma_1}(\phi_1)) = \alpha T_{L,\gamma_1+\gamma_2}(\phi_1) \quad (3.5.41)$$

これは Prop. 3.5.4 を用いると,

$$\mathcal{R}_{L,\theta-\gamma_1-\gamma_2}(T_{L,\gamma_1+\gamma_2}\phi_1) = \alpha T_{L,\gamma_1+\gamma_2}(\phi_1) \quad (3.5.42)$$

と書け, $\phi \equiv T_{L,\gamma_1+\gamma_2}(\phi_1)$, $\theta^* = \theta - \gamma_1 - \gamma_2$ で左が成立. なお, θ^* の値が一意的に決まることも同様に示される. □

4 場の理論におけるくりこみ群

4.1 場の理論の公理系

(この講義をやり始めて今年で3回目, そのたびに以下を日本語に直そうと思うのだが, 他のところを整備する方が大事なのでいつも後回しになってます. まあ, 参考までに.)

Here we concentrate on three “axioms” of QFT, which will be relevant for our later studies. A general reference is [6].

4.1.1 Mathematical Definitions

Minkowski space: A space $\mathbb{R}^d = \{(x^0, x^1, \dots, x^{d-1})\}$, with a special “inner product” $(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{d-1} x^i y^i$.

Note that this is not a proper mathematical inner product (indefinite metric).

Lorentz transformation: A linear transformation

$$\Lambda : x = (x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) \in \mathbb{R}^d \rightarrow x', \quad x'^i = \Lambda_j^i x^j$$

on a Minkowski space, which leaves the Minkowski inner product invariant. The set of all Lorentz transformations (on a given Minkowski space) is called the *full Lorentz group*.

Proper Lorentz group A subset of the full Lorentz group. Its elements are those Lorentz transformations Λ which satisfy $\Lambda_0^0 \geq 1$ and $\det \Lambda = 1$. This is written as L_+^\uparrow

Proper Poincare group: The set of all transformations (a, Λ) where $a \in \mathbb{R}^d$ and $\Lambda \in L_+^\uparrow$, defined by

$$(a, \Lambda)x = \Lambda x + a.$$

The set is written as P_+^\uparrow .

4.1.2 Wightman-Garding Axioms

This is a very natural starting point for Axiomatic QFT. In essence, it proposes a framework of QFT in a usual Hilbert space, operator language.

Axiom GW A quantum field theory (of neutral scalar field) consists of the following four: (1) \mathcal{H} , a separable Hilbert space, (2) $\Omega \in \mathcal{H}$, a unit vector (*vacuum*), (3) ϕ , a mapping from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ to the set of linear operators on \mathcal{H} (*field operators*), (4) U , a strongly continuous unitary representation of P_+^\uparrow on \mathcal{H} . Moreover, these four should satisfy the following “axioms” (GW1–GW5).

(GW1) [*This part lays foundation of QFT as a usual quantum mechanics.*] There exists $D_0 \in \mathcal{H}$, dense in \mathcal{H} . And (we denote the inner product in \mathcal{H} by $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

(a) For each $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, the domain of $\phi(f)$ [as an operator on \mathcal{H}] includes D_0 . Moreover, for any $\Psi_1, \Psi_2 \in D_0$, $\langle \Psi_1, \phi(\cdot)\Psi_2 \rangle$ is a tempered distribution.

(b) For real $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\phi(f)$ is a symmetric operator on D_0 . I.e.

$$\langle \Psi_1, \phi(f)\Psi_2 \rangle = \langle \phi(f)\Psi_1, \Psi_2 \rangle.$$

(c) D_0 is an invariant subspace of \mathcal{H} for each $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. I.e. $\Psi \in D_0$ implies $\phi(f)\Psi \in D_0$.

(d) $\Omega \in D_0$. Moreover, D_0 is a linear span of

$$\{\Omega, \phi(f_1)\Omega, \phi(f_1)\phi(f_2)\Omega, \dots | f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}$$

(GW2) [This takes care of Poincare invariance.]

(a) D_0 is an invariant subspace of $U(a, \Lambda)$ for each $(a, \Lambda) \in P_+^\dagger$. I.e.

$$U(a, \Lambda)\Psi \in D_0 \quad \text{if} \quad \Psi \in D_0.$$

(b) $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$ for all $(a, \Lambda) \in P_+^\dagger$.

(c) The following identity holds as operators on D_0 : For all $(a, \Lambda) \in P_+^\dagger$ and for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$U(a, \Lambda)\phi(f)U(a, \Lambda)^{-1} = \phi(f_{a, \Lambda})$$

In the above, $f_{a, \Lambda} \equiv f(\Lambda^{-1}(x - a))$.

(GW3) [Spectral Condition] Consider the set of all translations $\{U(a, I) | a \in \mathbb{R}^d\} \subset P_+^\dagger$. The joint spectrum of the generators of these translations is contained in the closure of the forward light cone: $V^+ \equiv \{p \in \mathbb{R}^d | p^0 > 0, (p, p) > 0\}$.

(GW4) [Locality or causality] If $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ are space-like separated, i.e. $(x - y, x - y) < 0$ for all $x \in \text{supp}f$ and $y \in \text{supp}g$, then (as operators on D_0)

$$[\phi(f), \phi(g)]_- \equiv \phi(f)\phi(g) - \phi(g)\phi(f) = 0.$$

(GW5) [Uniqueness of the vacuum] Ω is the unique translation invariant vector. I.e. it is the only vector which satisfies $\Omega = U(a, I)\Omega$.

4.1.3 Wightman's Axioms for Wightman Functionals (Green's functions) and Wightman Reconstruction Theorem

In 1956, Wightman gave another set of axioms, which he proved to be equivalent to the above one. It is written in terms of Green's functions of the field theory [called Wightman function(al)s]. It is stated as follows:

Axioms for Wightman functions: A QFT (of neutral scalar fields) is a set of tempered distributions $\{W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})\}_{n=0}^\infty$, which satisfy the following (W1–W6). By convention, we always understand $W_0 \equiv 1$. In the following, $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ represents the “value” of W_n at (x_1, \dots, x_n) as a tempered distribution. I.e.

$$W_n(f) = \int W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

We denote the complex conjugate of z by \bar{z} .

(W1) [neutrality] For any $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$,

$$\overline{W_n(f)} = W_n(f^*)$$

where

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \overline{f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)}.$$

(W2) [Poincare covariance] For any $(a, \Lambda) \in P_+^\dagger$ and for any $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$,

$$W_n(f) = W_n(f_{a, \Lambda})$$

(W3) [*Positivity*] We define a tensor product $f \otimes g$ for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dm})$ and $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$ as

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{m+n}) = f(x_1, \dots, x_m)g(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Then, for any $f_0 \in \mathbb{C}, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \dots$, we have

$$\sum_{m,n=0}^N \mathcal{W}_{m+n}(f_m^* \otimes f_n) \geq 0$$

for $N = 0, 1, 2, \dots$

(W4) [*Spectral Condition*] The support of the ‘‘Fourier transform’’ F of \mathcal{W} , defined by

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) = \int \tilde{F}_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1}) \exp\{i \sum_{j=1}^{n-1} (p_j, x_{j+1} - x_j)\} dp_1 \cdots dp_{n-1}$$

is contained in (a tensor product of) forward light cone.

(W5) [*Locality*] For any $n \geq 2$ and for any x_j, x_{j+1} such that $(x_j - x_{j+1}, x_j - x_{j+1}) < 0$, we have

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n)$$

(W6) [*Clustering Property*] For any *spacelike* vector $a \in \mathbb{R}$, we have

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + \lambda a, \dots, x_n + \lambda a) = \mathcal{W}_j(x_1, \dots, x_j) \mathcal{W}_{n-j}(x_{j+1}, \dots, x_n).$$

4.1.4 Osterwalder-Schrader Axioms

This is the set of axioms which will be directly relevant for our later studies. It is a set of axioms about Euclidean Green’s functions (called Schwinger functions).

We begin with some definitions.

$$\mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) \equiv \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn}) | f \text{ and all its partial derivatives are zero on a hyperplane } y_i = y_j\} \quad (4.1.1)$$

$$\mathcal{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) \equiv \{\text{linear functionals on } \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn})\} \quad (4.1.2)$$

$$\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{dn}) \equiv \{f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) | \text{supp } f \subset \{(t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)\} \in \mathbb{R}^{nd}, 0 < t_1 < \dots < t_n\} \} \quad (4.1.3)$$

Osterwalder-Schrader Axioms: ‘‘Schwinger functions’’ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ should satisfy:

(OS1) [*Temperedness*] Each $S_n \in \mathcal{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{dn})$. And

$$\overline{S_n(f)} = S_n(\Theta f^*)$$

for any $f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn})$. Here

$$(\Theta f)((t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)) = f((-t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (-t_n, \mathbf{x}_n))$$

means ‘‘time reversal.’’

(OS2) [*Euclidean Invariance*] For any Λ , a rotation of \mathbb{R}^d , and for any $a \in \mathbb{R}^d$,

$$S_n(f) = S_n(f_{(a, \Lambda)}), \quad f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}).$$

(OS3) [*Positivity*] For any $f_0 \in \mathbb{C}, f_j \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{dj})$,

$$\sum_{m,n=0}^N S_{m+n}(\Theta f_n^* \otimes f_m) \geq 0.$$

(OS4) [Symmetry] S_n is symmetric. I.e.

$$S_n(f) = S_n(f_\pi)$$

for any f_π , which is obtained from f by changing the order of its arguments.

(OS5) [Clustering Property]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_{m+n}(f \otimes T_t g) = S_n(f) S_m(g)$$

for $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{dn}) \cap \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{dn})$, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{dm}) \cap \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{dm})$. Here

$$(T_t g)((t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)) \equiv g((t_1 - t, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n - t, \mathbf{x}_n))$$

is a time translation.

Important!! The above three axioms are equivalent!!

4.2 格子正則化と連続極限 (scaling limit)

上で述べたように、「場の量子論」を作るには、OS の公理系を満たす Schwinger-函数の組を与えれば十分である。ところが、そのような Schwinger-函数の組を与えるのは決して簡単ではなく、特に4次元で「面白い」場の理論を作るプログラムは成功していない¹⁴。この原因は、いわゆる発散の困難（とそれを回避するために必要とされる「くりこみ」）にある。この節では場の理論を数学的にも厳密に定義する（可能性のある）一つの方法（格子正則化の方法）を紹介する。この方法についての現代的な文献には [6] がある。

4.2.1 \mathbb{R}^d の近似としての $\epsilon\mathbb{Z}^d$

まず、記号から始めよう。今まで考えてきたように、 \mathbb{Z}^d は d -次元超格子のこと： $\mathbb{Z}^d \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d | x_\mu \in \mathbb{Z}, 1 \leq \mu \leq d\}$ 。これからでてくるものとの関係で、これは「格子間隔1の d -次元超格子」と呼ぶ。一方、「格子間隔 ϵ の d -次元超格子」($\epsilon > 0$) を $\epsilon\mathbb{Z}^d$ と書いて、以下のように定義する：

$$\epsilon\mathbb{Z}^d \equiv \left\{ \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_d) \in \mathbb{R}^d \mid \frac{\tilde{x}_\mu}{\epsilon} \in \mathbb{Z}, 1 \leq \mu \leq d \right\}.$$

記述をはっきりさせるために、以下では \mathbb{Z}^d の元は今まで通りに x, y, \dots と書き、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ や \mathbb{R}^d の元は $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$ と書くことにする。また、 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して ϵx と書けば、 μ -成分が ϵx_μ で与えられる $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の元を表すものとする。

格子正則化の出発点は「格子間隔 ϵ の格子（の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限）で連続空間を記述しよう」という、大変単純な考えである。つまり、任意の $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して、 $x_\mu \equiv \lfloor \tilde{x}_\mu / \epsilon \rfloor$ を定義すると、 $x \in \mathbb{Z}^d$ であり、 $\epsilon x \in \epsilon\mathbb{Z}^d$ となっていて、 $\epsilon \downarrow 0$ の極限では \mathbb{R}^d を $\epsilon\mathbb{Z}^d$ で「近似」出来そうに思われる¹⁵。図2の(a)参照。

4.2.2 格子正則化の考え

「格子正則化」ではこの単純な考えを推し進めて、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ で定義された Schwinger-函数（もどき）の極限として \mathbb{R}^d で定義された Schwinger-函数 を定義しようとする。この際、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ は離散空間であるから、 $\epsilon > 0$ である限り、いわゆる発散の困難は無く全ての量が数学的にも問題なく定義できる。この後で最後に $\epsilon \downarrow 0$ の極限を（極限がうまく存在するように工夫して；可能かどうかは全く保証されない）とり、Schwinger-函数 を構成しようとするものである。

勿論、できあがった Schwinger-函数 には OS の公理系を満たして欲しいのであるが、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の格子上での Schwinger-函数（もどき）をうまく選ぶと OS の公理系（のほとんど— \mathbb{R}^d の回転不変性を除く）を自動的に満たさせることができる。

¹⁴「面白い」というのはガウス（自由）場ではない、との意味

¹⁵どのような目的で、どのような位相で「近似」したり「収束」したりするといっているかはすぐ後で

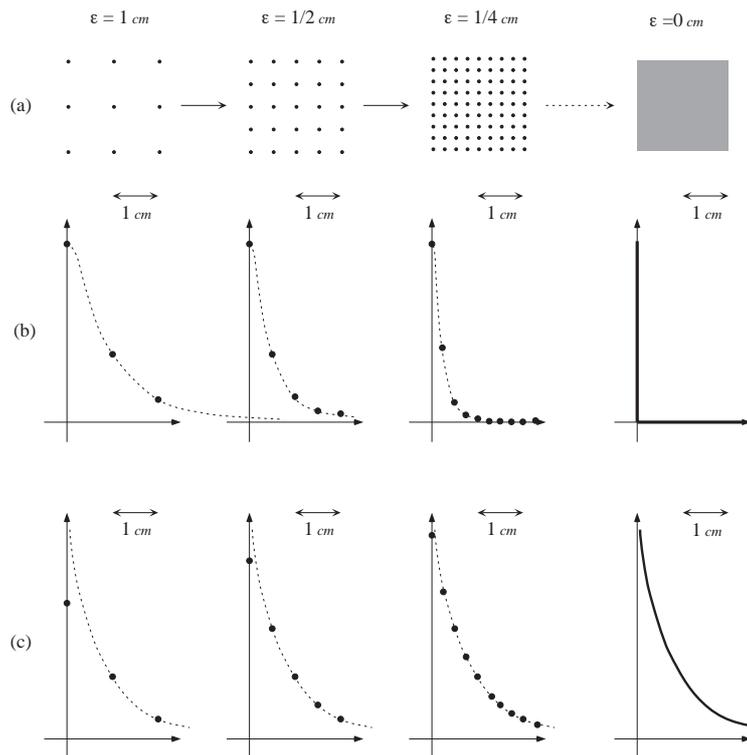


図 2: (a) 格子の極限としての連続時空の構成 .

(b) 連続極限をとる試み I: 統計系のパラメータを固定した場合の 2 点関数 .

(c) 連続極限をとる試み II: 統計系のパラメータを ϵ の関数として適当に動かし、いつでも点線のような振る舞いになるようにした場合の 2 点関数 .

4.2.3 具体的には？

さて、上のプログラムを遂行するための出発点として、場の理論の形式的な経路積分の表式¹⁶をとってみよう。Minkowski-空間での（ポテンシャル \tilde{V} の中性スカラー）場の n -点関数の表式は、経路積分では形式的に

$$W_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi(\tilde{x}_1) \varphi(\tilde{x}_2) \cdots \varphi(\tilde{x}_n) \exp \left\{ i \int d^d \tilde{x} \left(\partial_\mu \varphi(\tilde{x}) \partial^\mu \varphi(\tilde{x}) - \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right\} \quad (4.2.1)$$

となる。ここで（あまり深く考えずに）「時間を複素数に解析接続」すると、この表式は

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi(\tilde{x}_1) \varphi(\tilde{x}_2) \cdots \varphi(\tilde{x}_n) \exp \left[- \int d^d \tilde{x} \left(\sum_{\mu=1}^d \{ \partial_\mu \varphi(\tilde{x}) \}^2 + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (4.2.2)$$

となる。そこで、ここで \mathbb{R}^d を $\epsilon \mathbb{Z}^d$ で近似するつもりになると、上のを

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi_{\tilde{x}_1} \varphi_{\tilde{x}_2} \cdots \varphi_{\tilde{x}_n} \exp \left[- \epsilon^d \sum_{\tilde{x} \in \epsilon \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{\mu=1}^d \frac{\{ \varphi_{\tilde{x} + \epsilon e_\mu} - \varphi_{\tilde{x}} \}^2}{\epsilon^2} + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (4.2.3)$$

と解釈した上で $\epsilon \downarrow 0$ の極限をとるのが良からう。つまり、連続での Schwinger 関数を以下の極限として定義する (\mathcal{N}_ϵ は場の規格化因子)：

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{N}_\epsilon^N \langle \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n} \rangle_{\rho_\epsilon} \quad (4.2.4)$$

さて (4.2.3) の表式は $\epsilon \mathbb{Z}^d$ 上のスピン $\varphi_{\tilde{x}}$ の系の形をしている。つまり、(4.2.3) の系なら、数学的にも厳密に定義でき¹⁷、解析も可能と言うわけだ。また、(4.2.2) から (4.2.1) へ戻るのは OS の公理系さえ満たしていれば自動的にできるから、よしとしよう¹⁸。

一番の問題は $\epsilon \downarrow 0$ の極限がとれるか、つまり (4.2.3) から (4.2.2) へ、意味のある極限が存在するように 移行できるかと言うことである。これは連続極限で面白い振る舞いをする 2 点関数（や n 点関数）を作りたい、ということであり、そのためには図 2 の (b) と (c) で示唆されるように、統計系のパラメータを ϵ の函数として適当に選ぶ必要がある。ここから場の理論と臨界現象の接点が見えてくる（次節）。

なお、この $\epsilon \downarrow 0$ の極限を「連続極限」と呼ぶ。

4.2.4 連続極限の条件：1．臨界現象との関係

連続極限をとる際、どのような条件が必要だろうか？このためには、(4.2.3) の関係を連続時空と格子の言葉でよく見る（特に両者の長さのスケールに注意）ことが必要である。まず、左辺をみよう。左辺は基本的に連続時空の Schwinger 函数のつもり。だから、例えば質量 m_{phys} の粒子を表したければ 2 点関数は

$$S_2(0, \tilde{x}) \approx C \exp(-m_{\text{phys}} |\tilde{x}|) \quad (4.2.5)$$

のように指数関数的に落ちて欲しい。

一方、右辺は $\epsilon \mathbb{Z}^d$ の上のスピン系であるが、 $\tilde{x} \in \epsilon \mathbb{Z}^d$ に対して

$$x \equiv \frac{\tilde{x}}{\epsilon} \in \mathbb{Z}^d \quad (4.2.6)$$

¹⁶とにかく「OS の公理系を満たす Schwinger-函数の組」さえ得られればよい、との立場に立てば、何も場の理論の経路積分などに引きずられる必要はなく、天下りにでも「OS の公理系を満たす Schwinger-函数の組」を見つけられればよい。ところが多数の人間が努力したにも関わらず、これ以外のアプローチはそれほど成功しているとは言えない。また、物理屋としても、連続時空と離散的な時空の間にそんなに差があるとは思いたくない。このような理由で、ともかく経路積分から出発してみようということであって、皆さんがもっといい方法を見つけられればそれでも一向に構わない

¹⁷ただし、この表式は無限の \mathbb{Z}^d 上のスピン変数での積分の形になっているから、本当は 1.1 節でやったように、まず有限体積のものを定義してから無限体積極限をとる必要がある。だけど、これは 1.1 節で見たように、問題なくできる（場合が多い）

¹⁸実際はこのように格子から場の理論を作った場合、OS の公理の内の回転対称性が満たされるかどうかは決して自明ではなく、見くびってはいけない。しかし、この講義のレベルではよしとしよう、ということ

を考えると、右辺はこの x で添字づけられた \mathbb{Z}^d 上のスピン系とも思える。この x で見ると、(4.2.5) の2点関数は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \approx C \exp(-m_{\text{phys}} |\tilde{x}|) \approx C \exp(-m_{\text{phys}} \epsilon |x|) \quad (4.2.7)$$

となる。これは \mathbb{Z}^d のスピン系としての相関距離 ξ が

$$\xi = \frac{1}{m_{\text{phys}} \epsilon} \quad (4.2.8)$$

を満たすことを意味する。

以上から、非常に重要な条件が得られた：

条件1. $\epsilon \downarrow 0$ でも m_{phys} を有限に保ちたいなら、(4.2.8) に従って ξ を無限大にすべし。

(つまり、そのように \tilde{V} 中のパラメータを ϵ の関数として選んでやる必要がある。) これは正に \mathbb{Z}^d -スピン系の臨界点に接近させることを意味する。と言うわけで、格子スピン系の連続極限を通して場の理論を構成する際には、そのスピン系の臨界現象を詳しく知ることが必要十分となるのだった。これがこの講義の副題の出所である。

さて、臨界現象を示す統計系は非常にたくさんある(その一例が前節まで考えてきた φ^4 -スピン系)。従って、この条件1を満たすには、臨界現象を示す統計系を持ってきて、 $\epsilon \downarrow 0$ に伴ってうまく臨界点に近づけてやれば良いのである。

4.2.5 連続極限の条件：2. 場の規格化

勿論、連続極限に際しての条件はこれだけではない。(4.2.2) の極限が存在するためには、勿論、 φ の大きさも問題である。つまり、いくら (4.2.8) が満たされていても、Schwinger 関数全体が一斉に無限大やゼロに収束しては元も子もない。この意味で、

条件2. 場の量の規格化にも注意すべし。

ただ、これはスピン変数 φ を一斉に適当に定数倍することによって、回避できる可能性がある。例えばスピン系の2点関数が

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \approx \epsilon^{2\alpha} \exp(-m_{\text{phys}} |\tilde{x}|) \quad (4.2.9)$$

のようにゼロになるのであれば ($\alpha > 0$)、場の量 $\tilde{\varphi}_x$ を

$$\tilde{\varphi}_x \equiv \epsilon^{-\alpha} \varphi_x \quad (4.2.10)$$

と定義したつもりで

$$S_2^{(\epsilon)}(0, x) \equiv \epsilon^{-2\alpha} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \quad (4.2.11)$$

を考えれば、この2点関数に関しては嫌な $\epsilon^{2\alpha}$ は消える。この例は (4.2.4) で $\mathcal{N}_\epsilon = \epsilon^{-\alpha}$ としたことにあたる。

勿論この場合、他の n -点関数まで有限の極限を持っているかどうかは全く自明ではない。しかしともかく、我々にできることはこの例のように場の量を一斉に (ϵ の関数として) 何倍かすることだけである。この2番目の規格化の条件は(あまり打つ手が無いという意味で) そんなに大きなものではない。

4.2.6 連続極限の条件：3. Trivial でないこと

最後に、我々のやっていることが物理的に意味のある為の条件を挙げておこう。実は格子正則化とか色々言わなくても、任意の次元で場の理論が構成できている：ガウス場(自由場)の理論。しかし、この理論は構成粒子が全く相互作用せずに互いに素通りする、ある意味でショウモナイもの。例えこのような場が存在しても(他の粒子 — 我々と観測装置を含む — と全く相互作用しないから) 我々とは全く無関係のはず。

と言うわけで、我々がこの世の中を記述したいのなら、ガウス場のような相互作用の無い理論には価値がない。そこで

条件 3 . 出来た場の理論は相互作用のある理論 (nontrivial な理論と言う) であるべしを得る .

以上の 3 つの条件を満たして実際に場の理論が作れるか ? 上に述べてきたように, 条件 1 や 2 はそれほど強い制限を与えない . ところが 3 が大問題で, 現在のところ, 4 次元で条件 3 まで含めて厳密に成功した例はない . また, 厳密でなくてもこれらの条件は可能な場の理論を非常に強く制限し, 結局「非可換ゲージ理論」のみが条件 1 ~ 3 の全てをみたすと考えられている .

4.2.7 連続極限のとり方 : ガウス模型での例

上の例として, しょうもないけどもガウス場の理論を格子から構成することを考えよう .

4.2.8 連続極限のとり方 : まとめ

以上を簡単にまとめておこう .

Step 1 まず, 格子間隔 ϵ の格子 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ 上の統計系を定義する :

$$\langle \cdots \rangle_\epsilon \equiv \int d\rho_\epsilon(\{\varphi\}) (\cdots) . \quad (4.2.12)$$

Step 2 ρ_ϵ を ϵ の函数として (上の条件 1 ~ 3 を満たすように) 調節しながら $\epsilon \downarrow 0$ の連続極限をとる .

Step 3 最後に, OS, Wightman の再構成定理を使って Minkowski 空間上の場の理論を作る .

くり返しになるが, 問題は第二のステップ, つまりどのように ρ_ϵ をとるべきか, ということである .

4.3 くりこみ群と連続極限 (effective theory としての意味)

では, ρ_ϵ の取り方について, くりこみ群の立場から考えてみよう .

4.3.1 くりこみ群と effective theory

我々の問題は ρ_ϵ の良い取り方であるが, まず問題を逆にして与えられた ρ_ϵ が場の理論としてはどのようなものを表しうのか, 考えてみる (勿論, 場の理論としては $\epsilon \downarrow 0$ の極限しか意味がないが, $\epsilon \ll 1$ と思って, 連続極限の近似としての意味を考える .)

まず, ρ_ϵ のスピン系は, (4.2.4) 節あたりのように \mathbb{Z}^d の上のものであると考えることができる . 目的の連続時空での距離 l は ρ_ϵ のスピン系ではスピンの間隔 l/ϵ に相当する :

$$(1 \text{ 格子間隔}) = (\text{連続の } \epsilon), \quad l|_{\text{cont}} \iff \frac{l}{\epsilon}|_{\text{lattice}} . \quad (4.3.1)$$

ということでもある .

ところで, この ρ_ϵ に (ブロックの一边 L の) くりこみ変換を n 回やってみよう ($n > 0$):

$$\rho_\epsilon^{(n)} \equiv \mathcal{R}^n \rho_\epsilon . \quad (4.3.2)$$

定義から, $\rho_\epsilon^{(n)}$ のブロックスピンの系では,

$$(n\text{-格子の } 1 \text{ 格子間隔}) = (\text{元の格子の } L^n \text{ 格子間隔}) = (\text{連続の } \epsilon L^n) \quad (4.3.3)$$

が成立する (最後で (4.3.1) を使った) . つまり, 連続時空での長さとしての n -回 BST をやった後のスピンの世界は

$$l|_{\text{cont}} \iff \frac{l}{\epsilon L^n}|_{n\text{-lattice}} \quad (4.3.4)$$

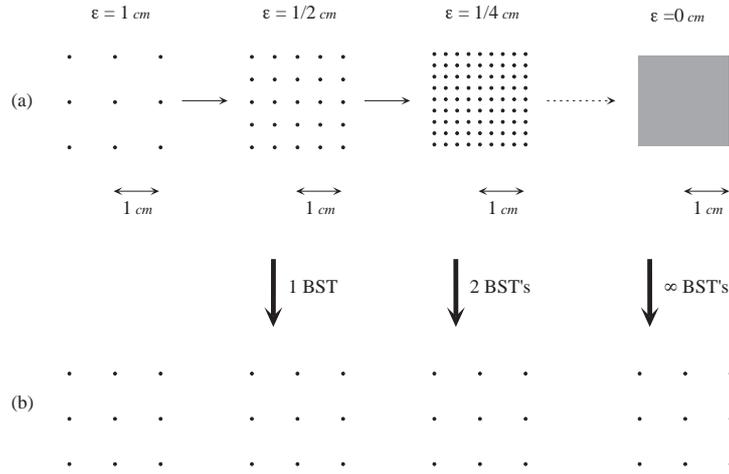


図 3: (a) 格子の極限としての連続時空の構成 .

(b) $\epsilon L^N \approx 1$ なる N 回のくりこみ変換を行い, 結果の格子の間隔を 1 にする (図を書きやすくするため, $L = 2$ の BSR の場合を書いた.)

の関係で結ばれている (図 3 参照) .

一般に格子の間隔程度の距離の振る舞いを見ることはそんなに難しくないが, 格子間隔に比べて非常に大きいところの振る舞いはなかなかわからない (例: スピン系の長距離での振る舞いは系のパラメータに敏感に依存し, 与えられたパラメータ値の系が臨界点とどのような関係にあるかはなかなかわからない) . 場の理論や臨界現象の解析が大変なのは, このように非常に大きい ($\epsilon \downarrow 0$ につれ無限大) 距離の振る舞いを見る必要があるからである . ところが, (4.3.3) によると, BST 後の系では, 1 格子間隔が連続時空の距離 ϵL^n に相当 しており, 従って, この距離のスケールでの振る舞いを見るのには適した理論であると考えられる .

この事情を物理の用語で「 $\rho_\epsilon^{(n)}$ は ϵL^n の距離のスケールでの effective theory である」と表現する .

4.3.2 連続極限と effective theory

さて, この観点から連続極限を見てみよう . 我々の見たいのは, あくまで連続時空で $O(1)$ の距離の振る舞いである (実際には 10^{-15}m と極微だったりするが, とまかく $\epsilon \downarrow 0$ について一様に正) . 以下, 見たい距離を ℓ と書くことにする .

さて, ρ_ϵ が与えられたとき,

$$\epsilon L^N \approx 1 \iff N \approx |\log_L \epsilon| \quad (4.3.5)$$

なる N を定め, この N -回だけ BST を行ってみる . (4.3.3) によると, N -回後のブロックスピンの間隔は丁度 $\epsilon L^N \approx 1$ となる . つまり, $\rho_\epsilon^{(N)}$ の系は距離のスケール $O(1)$ での effective theory なのである .

これは何を意味するか? 見たい Schwinger 関数が

$$S^{(\epsilon)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \approx \left\langle \varphi_{\tilde{x}_1}^{(N)}, \dots, \varphi_{\tilde{x}_n}^{(N)} \right\rangle_\epsilon^{(N)} \quad (4.3.6)$$

と与えられることを意味する¹⁹ . 今, \tilde{x}_j が全て $O(1)$ であることを考えると, (4.3.6) の振る舞いは, 殆ど $\rho_\epsilon^{(N)}$ の形を見ただけで読みとれる筈である . つまり, 与えられた ρ_ϵ の連続時空での振る舞いをみただけで, $\rho_\epsilon^{(N)}$ を見ればよい .

¹⁹ここはかなりええかげんに書いた (1) まず右辺の量はブロックスピンの期待値, つまり元のスピンをブロック内で平均したものの期待値である . だから, 左辺の様な元のスピンの各点での期待値とは一般には等しくない . しかし, よくあるように n -点関数がある程度滑らかであると仮定すると, 元のスピンをブロック内で平均する前と後で, そんなに差はないであろう (2) 右辺のブロックスピンの足は本当は $\tilde{x}_j / (\epsilon L^N)$ の整数部分である . しかし, 今は $\epsilon L^N \approx 1$ であることを考え, またいたずらに式を煩雑にするのを避けて, 単に \tilde{x}_j と書いた . なお, (4.2.4) の \mathcal{N}_ϵ はここには出てこない . というのも, \mathcal{N}_ϵ は (4.3.6) が規格化もこめて成立するようにとればよいから . つまり, $\mathcal{N}_\epsilon = L^{N(d-\theta)} = \epsilon^{\theta-d}$

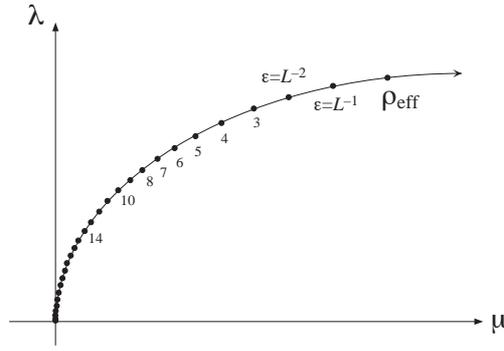


図 4: 連続極限を作るための ρ_ϵ の取り方．数字 $n = 3, 4, \dots$ は ρ_{L-n} の位置を模式的に表す．

4.3.3 連続極限の取り方 (ρ_ϵ の選び方)

以上から，欲しい場の理論を作るには，どのように ρ_ϵ を選んだら良いかが示唆される．

1. 連続極限で望ましい振る舞いをするような effective theory の ρ_{eff} を書き下す．
2. 各 $\epsilon > 0$ に対し， ρ_ϵ を $\rho_\epsilon^{(N)} \approx \rho_{\text{eff}}$ が成立するように選ぶ (N は (4.3.5) で定義)．
3. 上のようにとり続けつつ， $\epsilon \downarrow 0$ とする．要するに ρ_{eff} からくりこみ群の flow を遡るように ρ_ϵ をとっていけば良い²⁰．

模式的に書くと図 4 のようになる (4.4 節で詳しく行う φ_3^4 模型の場合を書いた)．

4.3.4 可能な連続極限

さて，上のシナリオはいつでも遂行できるとは限らない (実際，できないからこそ 4 次元で nontrivial な場の理論が構成できていないのである)．その事情をくりこみ群の観点から見てみよう．

前節では連続極限を取る条件が，

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \rho_\epsilon^{(N)} \Big|_{\epsilon L^N \approx 1} = \rho_{\text{eff}} \quad (4.3.7)$$

なるように $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ をとりに続けること，と要約された． $\epsilon \downarrow 0$ であるから，当然 $N \uparrow \infty$ で， ρ_{eff} としては左辺の極限の行き先 (つまり，無限回の BST の後に到達できるもの) しか許されない．つまり，好き勝手に ρ_{eff} をとって (4.3.7) を要求してもそのような場の理論は構成できない可能性があるわけ．

くりこみ群の flow の言葉では「無限回の変換の後で到達できるもの」とは，要するに

- ρ^* (変換の不動点) か，または
- ρ^* からの湧き出し上の点

の 2 とおりに限られる．このように，場の理論として可能なものが，くりこみ群の flow の図を書くことで決定されてしまうことになる．

Remark. 上の一般論を具体的なモデルに適用するには注意が必要である．上で ρ^* はくりこみ変換の不動点であればなんでもよい．つまり，上の議論を適用するには，特定の不動点のまわりだけ見ているのはダメで，くりこみ変換の flow の 大局的な様子 を見る必要がある (ある不動点 ρ_1^* に吸い込まれている flow も，他の不動点 ρ_2^* から湧き出しているかも知れないから， ρ_1^* の近傍だけ見て「吸い込みだから場の理論が出来ない」と結論づけるのは早計である)．実際問題としてくりこみ変換の flow の大局的な振る舞いを見るのは大変に難しく，与えられた点が

²⁰くりこみ変換には逆はないので「遡り方」は一意的には決まらない．しかし，ともかく場の理論を作ればいいのだからこれで十分である

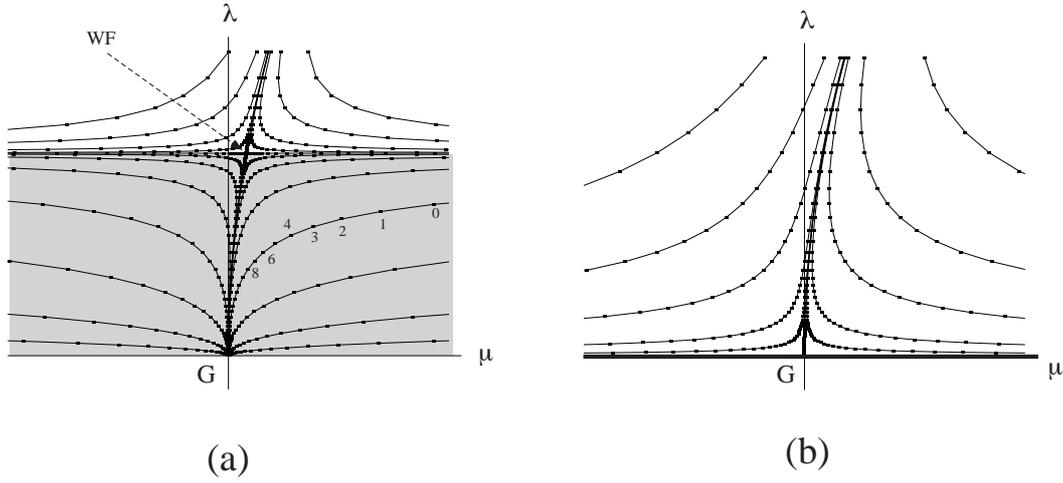


図 5: 場の理論 (ρ_{eff}) として可能な領域 . (a) φ_3^4 型の flow では Gaussian fixed point からの湧き出しを利用して , 影をつけた部分全部が ρ_{eff} にとれる . $n = 0, 1, 2, \dots$ は 0 のところに ρ_{eff} を作るための , $\epsilon = L^{-n}$ の際の ρ_ϵ の取り方を表す . (b) φ_5^4 型の flow では Gaussian fixed point が λ -方向には吸い込みであるため , ρ_{eff} は Gaussian fixed point からの湧き出しの方向 (つまり μ -軸) にしかとれない [実際には $\lambda \uparrow \infty$ の部分がどう振る舞っているかわからないと (つまりこの部分に不動点が無いことが言えないと) , 上の様な結論は出せない.]

遠くの方の不動点からの湧き出し上にあるかどうかはまず判定できない . この意味で上の判定条件は「この場合には場の理論ができる」という十分条件と捉えるのが無難であろう (例外もある . φ_4^4 模型は自由場になるとわれている . 4.4.3 節参照.)

このような事情を φ_d^4 模型の場合に書いてみたのが図 5 である .

φ_3^4 型の flow では Gaussian fixed point からの湧き出しを利用して , 影をつけた部分全部を ρ_{eff} にとれる (図 5 の (a)) . この場合 , 場の理論の短距離 (UV) と長距離 (IR) の振る舞いは以下ようになる :

- $\rho_\epsilon \equiv \rho_{\text{WF}}$ とした場合 . この際には全ての距離のスケールで ρ_{WF} で表される場の理論になる .
- ρ_G と ρ_{WF} を結ぶ線上 (ただし ρ_G から離れた点) に ρ_ϵ をとり続けた場合 . この時は IR では ρ_{WF} の様に見える . $\epsilon \downarrow 0$ の極限ではどのスケールでも ρ_{WF} .
- ρ_ϵ を図の $0, 1, 2, \dots$ のようにとった場合 . この時は IR (我々のいる巨視的長さ) での振る舞いは ρ_{eff} であるが , UV に行くにつれて gaussian fixed point (G) に近づくので自由場のように振る舞う (UV asymptotic free) .
- 最後に , ρ_G と ρ_{WF} を結ぶ線上に ρ_ϵ を , $\epsilon \downarrow 0$ につれて ρ_G に近づくようにとると , IR では ρ_{WF} , UV では ρ_G の様にふるまう (UV asymptotic free) .

一方 , φ_5^4 型の flow では Gaussian fixed point が λ -方向には吸い込みであるため , ρ_{eff} は Gaussian fixed point からの湧き出しの方向 (つまり μ -軸) にしかとれない (図 5 の (b)) .

勿論 , このような結論を出すには上の remark の通り , $\lambda \rightarrow \infty$ の部分まで調べ , この部分から有限回数で落ちてくることを言う必要がある . この点については 4.4.3 節参照 .

4.4 φ^4 -モデルの例

ここでは , d -次元 φ^4 モデルについて , 今までのシナリオを適用してみる .

4.4.1 φ_3^4 -モデルの構成： $\mu_\epsilon, \lambda_\epsilon$ のとりかた

図5の(a)に例示した ρ_ϵ の取り方を具体的に書き下してみよう（以下，くりこみ変換の recursion を簡単にするため， φ^2 の項の係数を $\mu + O(\lambda)$ とうまくとって— Wick ordering して—考える。）

くりこみ変換の recursion は

$$\lambda' = L\lambda\{1 + O(\lambda)\}, \quad \mu' = L^2\mu - c_1\lambda^2 - c_2\mu\lambda + O(\lambda^3, \mu^3) \quad (4.4.1)$$

の形になる．ここで厳密には上の c_1, c_2 は定数ではなく，くりこみ変換の回数 n によるが， $n \uparrow \infty$ では定数に行くので，簡単の為，定数のようにして以下，扱う．

我々の目的は，格子間隔 ϵ の時の出発点 $\lambda_\epsilon, \mu_\epsilon$ を， N 回後の effective couplings が $[N \equiv -\log_L \epsilon]$

$$\mu_\epsilon^{(N)} \approx \mu_{\text{eff}} [\approx 0.1], \quad \lambda_\epsilon^{(N)} \approx \lambda_{\text{eff}} [\approx 0.0001] \quad (4.4.2)$$

なるようにとることである．

このためには，ともかく (4.4.1) を解く必要がある²¹．ただ，我々は (4.4.2) を要請したいので，この $\lambda^{(N)}$ から出発して (4.4.1) を k の小さい方に向かって解いてやろう． $\lambda^{(k)} \ll 1$ ならば

$$\lambda^{(k)} = L^{-1}\lambda^{(k+1)}\{1 + O(\lambda^{(k)})\} = L^{-1}\lambda^{(k+1)}\{1 + O(\lambda^{(k+1)})\} \quad (4.4.3)$$

であるので， $\lambda^{(N)} = \lambda_{\text{eff}}$ から出発すると

$$\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(N)} L^{-(N-k)} \prod_{\ell=k+1}^N \{1 + O(\lambda^{(\ell)})\} \quad (4.4.4)$$

となり，これから直ちに $\lambda^{(k)} \leq \lambda^{(N)}(L/2)^{-(N-k)}$ を得て，これを更に (4.4.4) に代入することで，結局

$$\lambda^{(k)} \approx \lambda_{\text{eff}} L^{-(N-k)} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (4.4.5)$$

を得る．特に

$$\lambda_\epsilon = \lambda^{(0)} \approx \lambda_{\text{eff}} L^{-N} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \approx \epsilon \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (4.4.6)$$

ととれば良い．

次に μ に進む．やはり逆に解く精神で，

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= \frac{\mu^{(k+1)} + c_1(\lambda^{(k)})^2 + O(\lambda^3, \mu^3)}{L^2 - c_2\lambda^{(k)}} \\ &\approx \frac{1}{L^2}\mu^{(k+1)} + \frac{c_1}{L^2}\lambda_{\text{eff}}^2 L^{-2(N-k)} + c_2\lambda_{\text{eff}}\{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\}L^{-(N-k)}\mu^{(k+1)} + O(\lambda^3, \mu^3) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

と書き直し（2段目では (4.4.5) を用いた）， $\zeta^{(k)} \equiv \mu^{(k)} L^{2(N-k)}$ を導入すると，

$$\zeta^{(k)} = \zeta^{(k+1)} \left[1 + c_2\lambda_{\text{eff}}\{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\}L^{2-(N-k)} \right] + \frac{c_1}{L^2}(\lambda_{\text{eff}})^2 + O(L^{-(N-k)}) \quad (4.4.8)$$

となる．これより，

$$\zeta^{(k)} = \zeta^{(N)} + \sum_{\ell=k}^{N-1} \left[\zeta^{(\ell+1)} c_2\lambda_{\text{eff}}\{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\}L^{2-(N-k)} + \frac{c_1}{L^2}(\lambda_{\text{eff}})^2 \right] \quad (4.4.9)$$

を得た．これより ($\zeta^{(N)} = \mu^{(N)} = \mu_{\text{eff}}$) いつも $\zeta^{(k)} \approx \mu_{\text{eff}} + O(\lambda_{\text{eff}}^2(N-k))$ であるとわかり，従って結局，和の第一項は N, k に関して一様に有限で，

$$\zeta^{(k)} = \mu_{\text{eff}} + O(\lambda_{\text{eff}}) + \frac{c_1}{L^2}\lambda_{\text{eff}}^2(N-k) \quad (4.4.10)$$

²¹厳密にはくりこみ変換の途中であらわれる φ^6 項などのために，この漸化式よりも複雑なものを扱う必要がある．以下では要点を説明するためにこのように簡単化したものを考える

であることがわかる．実は上の $O(\lambda_{\text{eff}})$ の項は $O(\mu_{\text{eff}}\lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2)$ とまで評価できるが，ここでは立ち入らない．
ともかく，これから最終的に

$$\begin{aligned}\mu_\epsilon &= \mu^{(0)} = L^{-2N}\zeta^{(0)} = L^{-2N}\mu_{\text{eff}} + L^{-2N}O(\mu_{\text{eff}}\lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + L^{-2-2N}c_1\lambda_{\text{eff}}^2N \\ &= \epsilon^2[\mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}}\lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1L^{-2}\lambda_{\text{eff}}^2|\log_L\epsilon|]\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

と言う結果が得られた．

結論： $\mu_\epsilon, \lambda_\epsilon$ は

$$\lambda_\epsilon = \epsilon\lambda_{\text{eff}}\{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (4.4.12)$$

$$\mu_\epsilon = \epsilon^2[\mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}}\lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1L^{-2}\lambda_{\text{eff}}^2|\log_L\epsilon|] \quad (4.4.13)$$

ととればよい．

4.4.2 ϕ_3^4 -モデルの構成：パラメータの取り方の解釈

さて，上の取り方を普通の場合の理論の言葉で解釈してみよう． ϕ_3^4 は超くりこみ可能であるから，くりこみ項が具体的に書き下せる．特に発散を含むのは質量のくりこみだけで，それも1ループ（の2次発散）と2ループ（の対数発散）のみのはず．実際にこうなっているかどうかを見てみよう（実は，今は ϕ^4 項を Wick ordering した形で考えているので，1ループの発散は自動的にキャンセルされてでてこない．）

ρ_ϵ を与えるハミルトニアン \mathcal{H}_ϵ は

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{4} \sum_{|x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \sum_x \left[\frac{\mu_\epsilon}{2} \varphi_x^2 + \frac{\lambda_\epsilon}{4!} : \varphi_x^4 : \right] \quad (4.4.14)$$

であるから，(4.4.12) の情報を用いて，これを連続の場の理論の変数で書き直してみよう．この際，場の規格化には注意する必要がある．つまり，この統計系から場の理論を作るには (4.2.4) のように規格化因子 \mathcal{N}_ϵ を適当に選んで

$$S_\epsilon(0, \tilde{x}) \equiv \mathcal{N}_\epsilon^2 \langle \varphi_0 \varphi_{\tilde{x}} \rangle_{\rho_\epsilon} \quad (4.4.15)$$

とするわけである²²．このようにとった場合，「くりこまれた場」に相当するものは $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \equiv \mathcal{N}_\epsilon \varphi_x$ であって，連続時空の書き方をしたいのならこの $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ を用いる必要がある．

そこで，まず，この \mathcal{N}_ϵ をどうとるべきか考える．これは簡単である．と言うのも，上の ρ_{eff} の選び方は，

$$S_\epsilon(0, \tilde{x}) \approx \left\langle \varphi_0^{(N)} \varphi_{\tilde{x}}^{(N)} \right\rangle_{\rho_\epsilon^{(N)}} \quad (4.4.16)$$

ととった場合（規格化も含めて）2点関数などがうまく行くようにしたものであった（(4.3.6) 参照）．ブロックスピンの変換の定義から

$$\left\langle \varphi_0^{(N)} \varphi_{\tilde{x}}^{(N)} \right\rangle_{\rho_\epsilon^{(M)}} \approx L^{2(d-\theta)N} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_{\rho_\epsilon} \quad (4.4.17)$$

の関係があるから，(4.4.15)–(4.4.17) より直ちに

$$\mathcal{N}_\epsilon = L^{(d-\theta)N} = L^{N/2} = \epsilon^{-1/2} \quad (4.4.18)$$

を得る（勿論， $d=3, \theta=(d+2)/2$ を用いた）．結局， ρ_ϵ の中の φ とくりこまれた場 $\tilde{\varphi}$ の関係は

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \equiv \epsilon^{-1/2} \varphi_x \quad (4.4.19)$$

となった．

²²このあたり， $\tilde{x} = \epsilon x$ として使っている．また，簡単のために2点関数だけを書く

後は (4.4.12), (4.4.19), 及び積分と和の関係 $\int = \epsilon^{-d} \sum_x$ などを用いて (4.4.14) を書き直す．結果は

$$\begin{aligned} Z_B &\equiv \mathcal{N}_\epsilon^{-2} \epsilon^{2-d} = 1 \\ \mu_B &\equiv \mathcal{N}_\epsilon^{-2} \epsilon^{-d} \mu_\epsilon = \epsilon^{-2} \mu_\epsilon = \mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1 L^{-2} \lambda_{\text{eff}}^2 |\log_L \epsilon| \\ \lambda_B &\equiv \mathcal{N}_\epsilon^{-4} \epsilon^{-d} \lambda_\epsilon = \epsilon^{-1} \lambda_\epsilon = \lambda_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

を用いて

$$\mathcal{H}_\epsilon \approx \int d^3 \tilde{x} \left[\frac{Z_B}{2} \nabla \{ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \}^2 + \frac{\mu_B}{2} \tilde{\varphi}(\tilde{x})^2 + \frac{\lambda_B}{4!} : \tilde{\varphi}(\tilde{x})^4 : \right] \quad (4.4.21)$$

となるのがわかる．これは丁度，通常の場合の理論での結論（wave function と相互作用定数の無限大のくりこみは必要なく，質量の対数的くりこみがある）と勿論一致している．

以上，超くりこみ可能の場合を考えたので，ある意味であまりありがたみがわからなかったかも知れない（普通の場の理論の「くりこみ理論」の方がよほど簡単）．ただ，ここでやったことは原理的には「くりこみ可能」な場合でも（4.3 節の考えに基づいて）実行できる．これがくりこみ群の強みである．

4.4.3 φ_4^4 -モデルの triviality について

この節では， φ_4^4 -モデルの連続極限が trivial（自由場）であろうと言う予想と，それがくりこみ群の立場からどう解釈できるのかを説明した（タイプする時間がないので，将来の改訂版に期待！）

5 くりこみ群（BST）の実際

5.1 (Weak) φ_d^4 -系 ($d \geq 4$) におけるくりこみ群の実際

5.1.1 ガウス測度の分解

まず記号を：

- もともとの格子は Λ とし， $\Lambda_1 \equiv L^{-1} \Lambda \cap \mathbb{Z}^d$ を BST 後の格子とする．また， $\bar{\Lambda} \equiv \Lambda \setminus L\Lambda_1$.
- 少しでもわかりやすくするため， Λ の元は x, y など， Λ_1 の元は x_1, y_1 などと書く．
- 以下，格子上での行列の掛け算の記法を導入する． A, G などは格子の site の足を持った行列， Φ は同じく足を持ったベクトルと看做す．
- 例えば， $(A\phi)_x \equiv \sum_{y \in \Lambda} A_{x,y} \phi_y$ ；例えば， $(\Phi, A\Phi) \equiv \sum_{x,y \in \Lambda} \phi_x A_{x,y} \phi_y$.
- Covariance $G_{x,y}$ を持つガウス測度は (\mathcal{N} は規格化因子)

$$d\mu_G(\Phi) \equiv \mathcal{N}(d\Phi) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \phi_x (G^{-1})_{x,y} \phi_y \right] \quad (5.1.1)$$

と書く．以下，特に断わらない限り「ガウス測度」とは mean zero のものを指す．

- $\Lambda_1 \times \Lambda$ 行列 \hat{C} を、

$$\hat{C}_{x_1,y} \equiv \begin{cases} L^{-(d+2)/2} & (\|y - Lx_1\|_\infty < L/2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

として定義．

- 出発点のガウス測度の covariance を G_0 と書き，以下，ブロックサイズが L ， $\theta = (d+2)/2$ の BST を行う．

以上の元に、一回 BST を行った後の $\Phi^{(1)} = \hat{C}\Phi$ の covariance は、

$$G_1 = \hat{C}^T G_0 \hat{C} \quad (5.1.3)$$

で与えられるが、我々としては Φ を

$$\varphi_x = \tilde{\psi}_x + \mathcal{Z}_x \quad (5.1.4)$$

の形に書きたい。ここで $\tilde{\psi}_x$ とは $\Phi^{(1)}$ によって決まる場で、後ろの \mathcal{Z}_x がブロック内でのスピンの fluctuation を表わす。

5.1.2 $\tilde{\psi}$ のとり方

$\tilde{\psi}$ の選び方はもちろん一意ではないが、 $\Phi^{(1)}$ を決めたとときに $d\mu_G(\Phi)/d\Phi$ を最大にするような Φ の配位をとることにする。具体的には $\Lambda \times \Lambda_1$ 行列 A を

$$A \equiv G_0 \hat{C}^T G_1^{-1} \quad (5.1.5)$$

により定義して

$$\tilde{\psi}_x \equiv (A\varphi)_x = \sum_{y_1 \in \Lambda_1} A_{x,y_1} \varphi_{y_1}^{(1)} \quad (5.1.6)$$

としたものが $\tilde{\Psi}$ である。この $\tilde{\Psi}$ はガウスであり、その covariance は

$$AG_1 A^T = G_0 \hat{C}^T G_1^{-1} G_1 G_1^{-1} \hat{C} G_0 = G_0 \hat{C}^T G_1^{-1} \hat{C} G_0 \quad (5.1.7)$$

である。

5.1.3 $\{\mathcal{Z}\}$ のとり方

したがって、上の $\{\mathcal{Z}\}$ としては covariance

$$\Gamma \equiv G_0 - G_0 \hat{C}^T G_1^{-1} \hat{C} G_0 \quad (5.1.8)$$

を持つガウス場をとればよい。一つの可能性としては以下のようなものがある。

まず、 $\bar{\Lambda}$ の各サイトに互いに独立な normal variables $\{z_u\}_{u \in \bar{\Lambda}}$ を置く。次に $\Lambda \times \bar{\Lambda}$ 行列

$$Q_{x,u} \equiv \begin{cases} \delta_{x,u} & (x \notin LZ^d) \\ -1 & (x \in LZ^d, \|u - Lx\|_\infty < L/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.1.9)$$

を導入し、上の Γ を用いて $\Lambda \times \bar{\Lambda}$ 行列を

$$\mathcal{M}_{x,u} \equiv \sum_{v \in \bar{\Lambda}} Q_{x,v} \left(\Gamma^{1/2} \right)_{v,u} \quad (5.1.10)$$

で定義。(ここで Γ の平方根は Γ を $\bar{\Lambda} \times \bar{\Lambda}$ の行列と看做してとる。) このようにすると求める \mathcal{Z} は

$$\mathcal{Z}_x = \sum_{u \in \bar{\Lambda}} \mathcal{M}_{x,u} z_u \quad (5.1.11)$$

と与えられる。

なお、後に述べる規格化の条件によりうまく合うように、

$$\mathcal{A} \equiv L^{(d-2)/2} A = L^{(d-2)/2} G \hat{C}^T G_1^{-1} \quad (5.1.12)$$

$$\psi \equiv \mathcal{A} \varphi^{(1)} = L^{(d-2)/2} \tilde{\psi} \quad (5.1.13)$$

を定義しておく。これによると、ガウスの分解は

$$\varphi = L^{-(d-2)/2} \psi + \mathcal{M}z \quad (5.1.14)$$

という形になる。

5.1.4 Kernel \mathcal{A} , \mathcal{M} の性質

定義からすぐ導かれるものとして、

$$L^{-d} \sum_{x \in B_{x_1}} \mathcal{A}_{x, y_1} = \delta_{x_1, y_1}, \quad L^{-d} \sum_{x \in B_{x_1}} \mathcal{M}_{x, y} = 0 \quad (5.1.15)$$

$$\sum_{z_1 \in \Lambda_1} \mathcal{A}_{x, z_1} = 1 \quad (5.1.16)$$

が成立する。また、 \mathcal{A} , \mathcal{M} の定義とそのフーリエ変換による表現を利用して計算すると、 $\beta_A = O(1)$, $\beta_\Gamma = O(L^{-1})$, $C_A = O(1)$, $C_\Gamma = O(L^{d+2})$ により

$$|\mathcal{A}_{x, y_1}| \leq C_A \exp[-\beta_A |L^{-1}x - y_1|] \quad (5.1.17)$$

$$\left| \Gamma^{1/2}_{u, v} \right| \leq C_\Gamma \exp[-\beta_\Gamma |u - v|] \quad (5.1.18)$$

の成立することが導かれる。(5.1.15) から、 ψ は大体、 $\varphi^{(1)}$ をブロック内の各サイトに均等にばらまいたようなものであると看做せる。つまり、ものすごく大ざっぱに言って、

$$\varphi_x \approx L^{-(d-2)/2} \varphi_{x_1}^{(1)} + \mathcal{Z}_x \quad (5.1.19)$$

と思えるわけ ($x \in B_{x_1}$ の時)。

5.2 1次元イジング系における代表値くりこみ変換

5.3 Fractal 上の解析

5.4 KT-type? Coulomb Gas?

5.5 何が未解決なのか (今後の課題)

5.5.1 Non-gaussian fixed points

5.5.2 Non-perturbative Analysis (Global picture)

5.5.3 Hierarchical Model での挑戦

- Koch-Wittwer の φ_3^4
- φ_4^4

謝辞

この講義と講義ノートは私の今までの研究生活のなかから生まれました。母体となったのは大学院時代の自分の仕事ですが、その後も様々な方との議論を経てここに示した様な認識に徐々に導かれて来たものです。田崎晴明さん、服部哲弥さん、渡辺浩さん、伊東恵一さん、大野克嗣さん、そしてお名前を挙げなかったけれども私と議論して下さいました全ての方に感謝します（言うまでもないことですが、このノートに存在する間違いに関しては、私に全責任があります。）また、参考文献に挙げたものの内の幾つかには大きな影響を受けています。最後に、東工大、佐賀大、名大、東大などでの講義に出席し、建設的な意見を述べて下さった方々に感謝します。

A 結語：なぜ今くりこみ群か

（ここでは、くりこみ群に関する私見を書く予定ですが、時間切れとなりました。文献紹介の部分だけ、とりあえず載せます。）

A.1 物理サイドの短い歴史（文献紹介を兼ねて）

文献紹介を兼ねて、場の理論、臨界現象に関する簡単な歴史をここで述べておきます。なお、以下では主として数学者による、フラクタル上の解析については述べていません。これはもちろんそれらの解析を軽視したわけではなく、私が専門家でないため、及びこれらの解析がかなり完成の域に近づいていると思うからです。

「くりこみ」という科学用語の起源は朝永振一郎の「くりこみ理論」に遡るものと思われる。当時（1940年の初め）、場の理論における「無限大の困難」が大きな関心を集めていた。1920年代の天才達の努力により極微の世界の基本法則（量子力学）がようやく得られたにもかかわらず、それを特殊相対論と結合しこの世界の基本法則を作り上げようとした途端、理論の予言する物理量がすべて発散するようには見えただのであるから、事態は深刻であった。朝永（少し遅れて Feynman, Schwinger, Dyson）らのくりこみ理論は、「見かけ上の発散は、観測にかかる量とかからない量の両方が理論の中に混在しているために起こるのであり、観測量のみで理論を表すと発散が生じない」ことを示したものである。

その後、1950年代後半、Bogoliubov, Stueckelberg などの研究により、くりこみ理論の蔭には、理論のスケール変換に対するきれいな変換性（半群の性質を持つ：「くりこみ群」の言葉の由来である）が隠されていること、及びそれは理論そのものの研究に役立つかも知れぬことが指摘された。しかし、彼らの研究対象が当時のくりこみ群の計算技術では取り扱えないものであったことから、これは一時忘れ去られた形となった。

「くりこみ群」が華々しく復活するのは1970年に入ってからのものである。当時、統計力学における臨界現象を理解する手段として Kadanoff, Wilson, Fisher などにより、一見素粒子の方のくりこみ群とは似ても似つかぬ形の「くりこみ群」が提唱され、非常な成果をおさめ始めた [7, 8]。ほぼ同時に、元々素粒子の研究も行っていた Wilson が「くりこみ群」の素粒子、場の理論への応用の可能性も示し、それが高エネルギーでの素粒子散乱の実験事実を劇的に説明するにいたり [9, 10, 11]、物理の世界では「くりこみ群信仰」とまで呼べるものが出現する。

このような経緯を受け、「くりこみ群」の厳密な理論がようやく1980年代半ばになって出現した [3, 4, 12]。これはスピン系のみならずランダムウォークにも適用された [13]。

さらに、1980年代も末になって、くりこみ群の考えを偏微分方程式の解の漸近挙動に応用する可能性が物理学者により指摘され [14, 15]、その後すぐ数理物理学者の厳密な解析 [16, 17, 18, 19] が現れた。この偏微分方程式への応用は、それまでの統計力学や場の理論におけるものに比べると格段に簡単であり、くりこみ群の考えを理解するには向いているかもしれない。

A.2 一般的な文献紹介

まず、くりこみ群（ブロックスピン変換）の考えの古典としては、[7]。また、その方向の教科書としては、[20]。一方の「場の理論的くりこみ群」の立場からは、[8, 21]。

最近の考えも入れて、わかりやすく書かれた本としては、[15, 22] がある。また、[23] への寄稿の幾つかも役にたつと思う。

厳密なくりこみ群については、[3, 4, 12] などを参照。このうち、[3, 4] はブロックスピン変換の厳密版についてで、[12] はブロックスピン変換と「場の理論的くりこみ群」のある程度中間にある。

偏微分方程式への応用に関する初心者向けの文献は、上記引用論文以外には今の所無さそうである。

参考文献

- [1] J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb, and B. Simon. Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models. *Commun. Math. Phys.*, **62**:1–34, (1978).
- [2] B. Simon. *The Statistical Mechanics of Lattice Gases, I*. Princeton University Press, Princeton, (1993).
- [3] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Massless lattice φ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model. *Commun. Math. Phys.*, **99**:199–252, (1985).
- [4] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Asymptotic freedom beyond perturbation theory. In K. Osterwalder and R. Stora, editors, *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories*, Amsterdam, (1986). North-Holland. Les Houches 1984.
- [5] G. Jona-Lasinio. Renormalization group and probability theory. RG 2000, Taxco, Mexico, preprint, archived as ...
- [6] R. Fernández, J. Fröhlich, and A.D. Sokal. *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*. Springer, Berlin, (1992).
- [7] K. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the ϵ expansion. *Phys. Rep.*, **12**:75–200, (1974).
- [8] E. Brezin, J.C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Field theoretical approach to critical phenomena. In C. Domb and M.S. Green, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic Press, New York, London, (1976).
- [9] D.J. Gross and F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1343–1345, (1973).
- [10] H.D. Politzer. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1346, (1973).
- [11] D.J. Gross. Applications of the renormalization group to high-energy physics. In R. Balian and J. Zinn-Justin, editors, *Methods in Field Theory*, (1976). Proceedings of the Les Houches Summer School 1975.
- [12] V. Rivasseau. *From Perturbative to Constructive Renormalization*. Princeton University Press, Princeton, (1991).
- [13] J. Bricmont and A. Kupiainen. Random walks in asymmetric random environments. *Commun. Math. Phys.*, **142**:345–420, (1991).
- [14] N.D. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono, and F. Liu. *Phys. Rev. Lett.*, **64**:1361–1364, (1990).
- [15] N.D. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Addison-Wesley, (1992).
- [16] J. Bricmont, A. Kupiainen, and G. Lin. Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, **XLVII**:893–, 1994.
- [17] J. Bricmont and A. Kupiainen. Renormalization group and Ginzburg-Landau equations. *Commun. Math. Phys.*, **150**:193, (1992).

- [18] J. Bricmont and A. Kupiainen. Stable non-gaussian diffusive profiles. Preprint, (1992).
- [19] J. Bricmont and A. Kupiainen. Universality in blow-up for nonlinear heat equations. Preprint, (1992).
- [20] S. Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Benjamin, Reading, (1976).
- [21] D.J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, (1984).
- [22] H. Ezawa, M. Suzuki, H. Tasaki, and Watanabe. *くりこみ群の方法*. 岩波, 東京, (1994). 現代の物理学 13.
- [23] Y. Oono, K. Higashijima, and H. Tasaki. In *くりこみ理論の地平*, 数理科学 1997 年 4 月号. サイエンス社, (1997).