九大代数学セミナー

日時 2023 年 6 月 2 日 (金) 16:00-17:15

場所 九州大学伊都キャンパス ウエスト 1 号館 5 階 C-513 中講義室,
および Zoom ミーティングによるオンライン開催

備考 講演開始時に富安亮子氏 (九州大学) に数理結晶学分野でよくある代数の応用について 10 分程度紹介していただきます.

* * *

講演者: 中村 勇哉 氏 (東京大学)

題目 **Ehrhart theory on periodic graphs**

概要 周期グラフとは, 格子 Z^N が自由に作用しているグラフであってその商グラフが有限グラフになるものをいう. 周期グラフは, 数理結晶学における研究対象になっている他, 幾何学的群論においても virtually abelian group のケーリーグラフとして自然に現れる対象である. グラフの growth sequence $b(n)$ は, グラフのある頂点からスタートしてグラフ距離 n 以下の頂点の個数として定義される. 本講演ではまず, Grosse-Kunstleve, Brunner, Sloane (1996) の予想「周期グラフの growth sequence が quasi-polynomial type (十分 n が大きい所で quasi-polynomial) になる」の肯定的解決 (中村-坂本-間瀬-中川, 2021) について紹介する. 証明は代数的であり, 次数付き環のヒルベルト級数の理論に帰着される. 残りの時間で, エルハート理論との関係について紹介する (井上卓哉氏との共同研究). エルハート理論の場合と異なり, 周期グラフの growth sequence は quasi-polynomial になるとは限らず (有限個の例外項がありうる), また相互法則を満たすとも限らない. 一方で, 対称性の高い様々な具体例において, growth sequence は quasi-polynomial になり, 相互法則を満たすことが Conway-Sloane (1997) 等により報告されている (九大の SGW でも独立に報告されています). 本講演では, growth sequence が quasi-polynomial になり, 相互法則を満たすようなグラフのクラスを紹介し, これらのクラスをエルハート理論の拡張として捉えることが可能であることを説明する.

A periodic graph is a graph with a free Z^N-action such that its quotient graph is a finite graph. Periodic graphs are the object of study in mathematical crystallography and also appear naturally in geometric group theory as Cayley graphs of virtually abelian groups. The growth sequence $b(n)$ of a graph is defined as the number of vertices with (graph) distance n or less from a fixed vertex. In this talk, I will first discuss an affirmative solution to the conjecture of Grosse-Kunstleve, Brunner, and Sloane in 1996 that the growth sequence of a periodic graph is of quasi-polynomial type ("type" here means "for sufficiently large n"). The proof (by Nakamura-Sakamoto-Mase-Nakagawa, 2021) is algebraic, and it is based on the theory of Hilbert series of graded rings. In the rest of the talk, we will discuss the relation with the Ehrhart theory (joint work with Takuya Inoue). Unlike the case of the Ehrhart theory, the growth sequence of a periodic graph is not necessarily quasi-polynomial in general, and it does not necessarily satisfies the reciprocity law. On the other hand, it has been observed by Conway-Sloane (1997) and others that the growth sequence becomes a quasi-polynomial and satisfies the reciprocity law in various specific cases (also reported independently by SGW at Kyushu University). In this talk, I will introduce some necessary conditions for graphs such that the growth sequence becomes a quasi-polynomial and satisfies the reciprocal law, and explain that it can be regarded as an extension of the classical Ehrhart theory.

* * *

世話人：小林 真一, Ade Irma Suriajaya, 松坂 俊輝, 佐藤 謙太 (九大数理)