

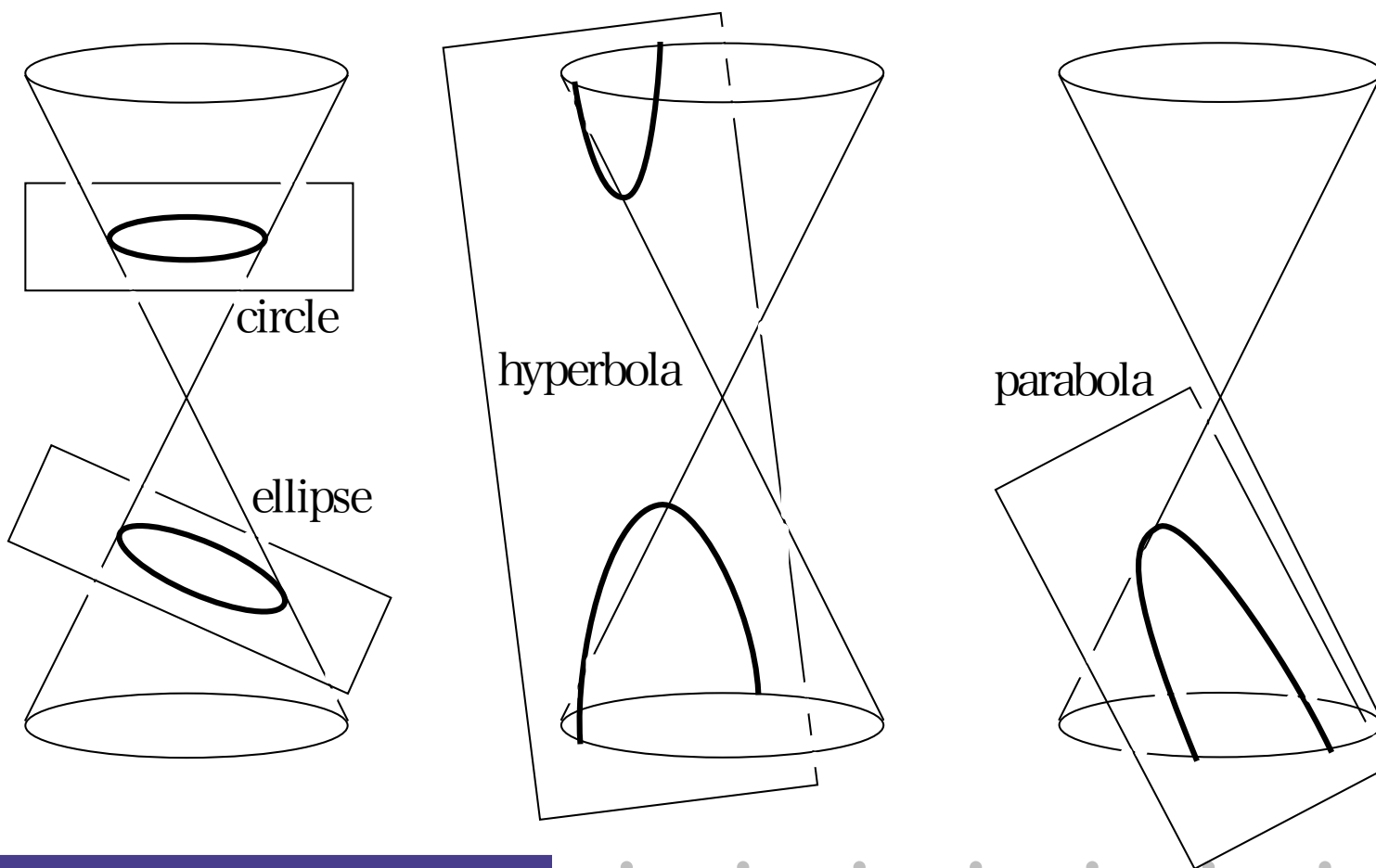
アポロニウスの円錐曲線論

アポロニウスの円錐曲線論

アポロニウスは、円錐を平面で切ったときの切り口に現れる曲線 (円錐曲線) についての考察を行った。

アポロニウスの円錐曲線論

アポロニウスは、円錐を平面で切ったときの切り口に現れる曲線 (円錐曲線) についての考察を行った。



アポロニウスの円錐曲線論

アポロニウスの円錐曲線論

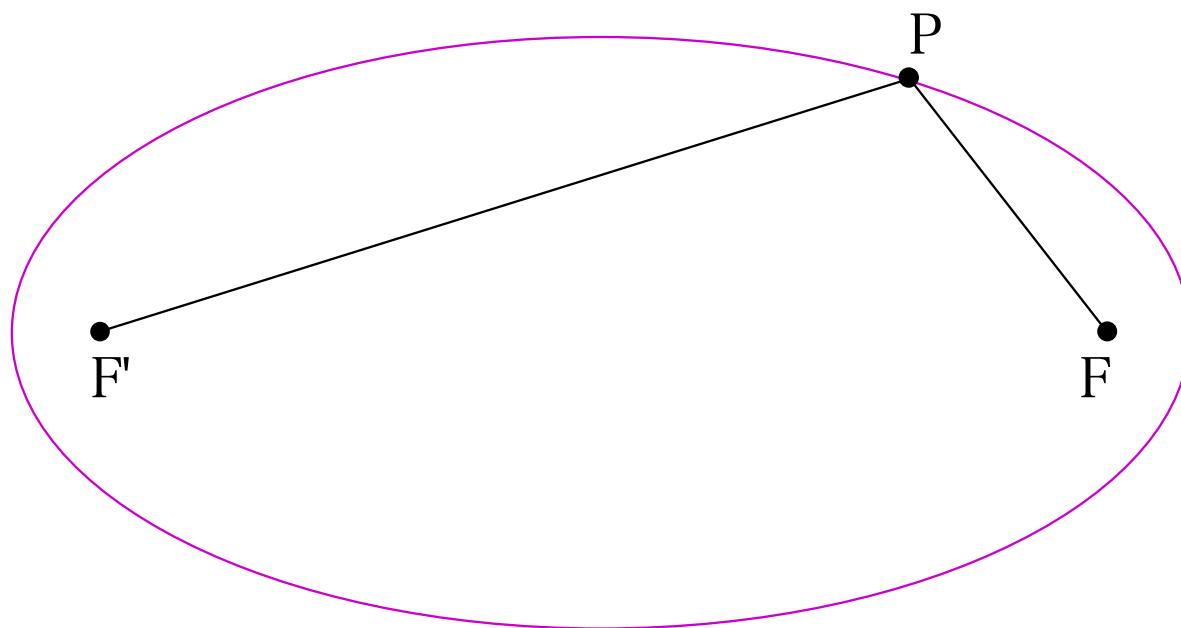
定理

楕円は、平面上の二定点 F, F' (焦点) に対し $PF + PF'$ が一定である様な点 P の軌跡である。

アポロニウスの円錐曲線論

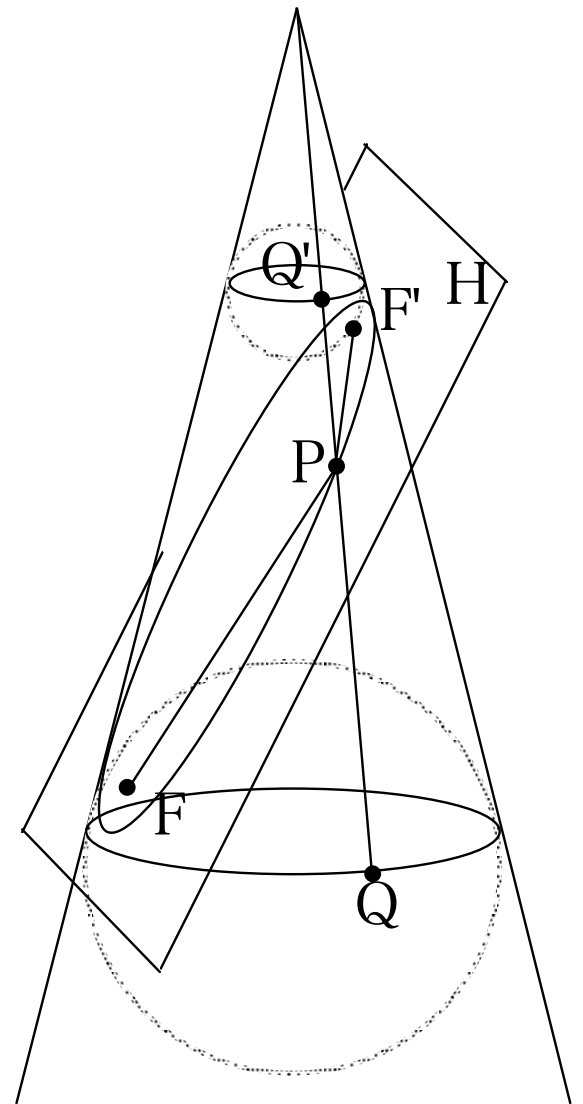
定理

楕円は、平面上の二定点 F, F' (焦点) に対し $PF + PF'$ が一定である様な点 P の軌跡である。



アポロニウスの円錐曲線論

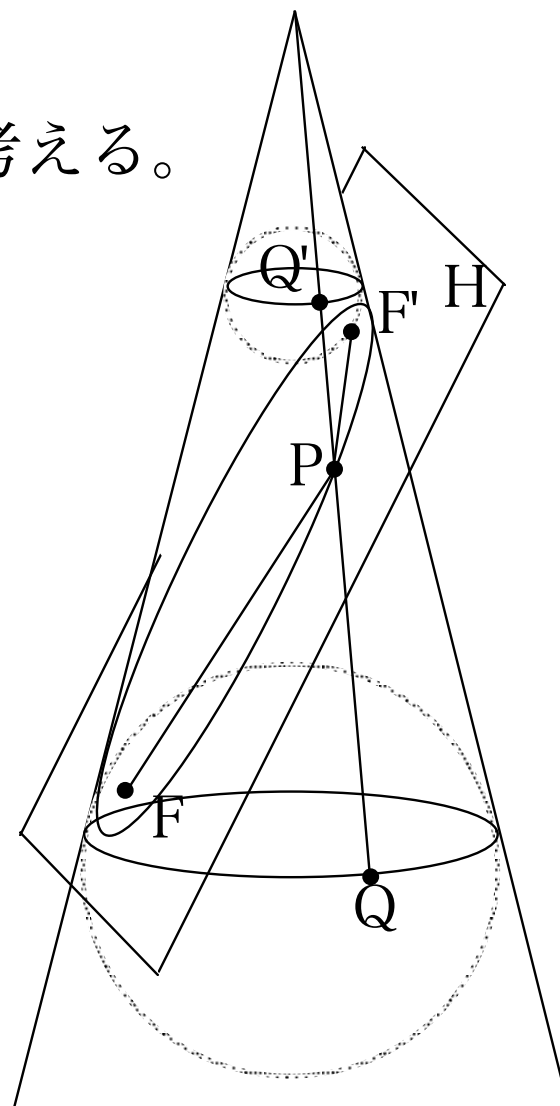
証明



アポロニウスの円錐曲線論

証明

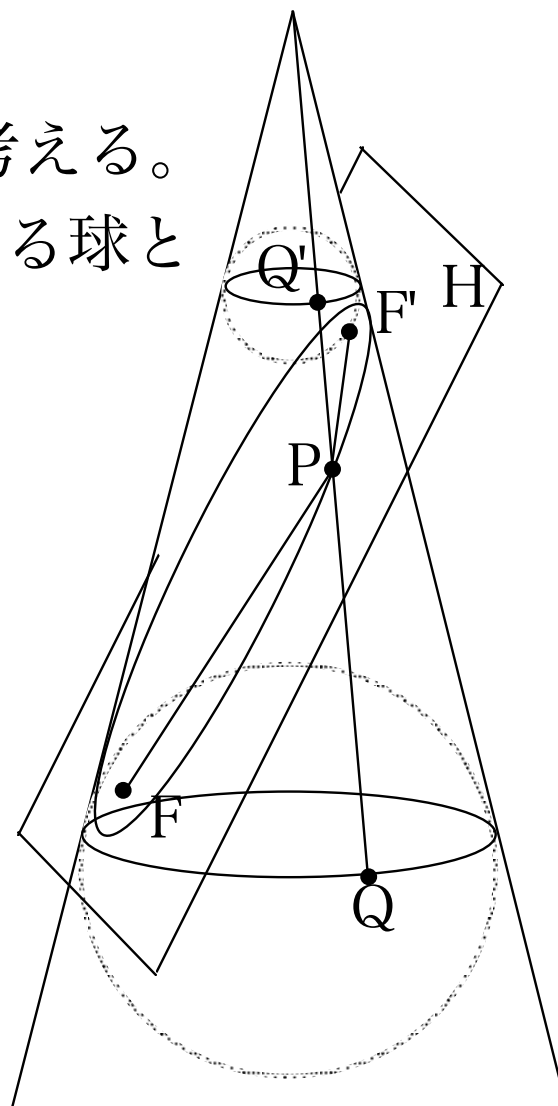
円錐を平面 H で切った切り口の楕円を考える。



アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の楕円を考える。
円錐に内接し、 H に上からと下から接する球と
 H の接点を F, F' とする。

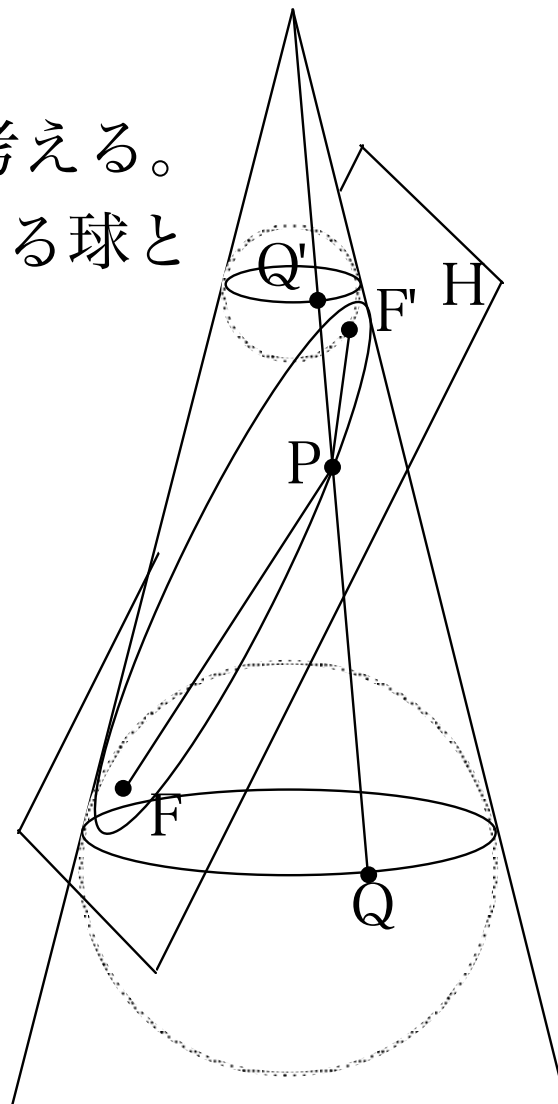


アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の楕円を考える。
円錐に内接し、 H に上からと下から接する球と
 H の接点を F, F' とする。

楕円上の点 P を通る円錐の斜辺が球と
円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると
 QQ' は P の一によらず一定である。



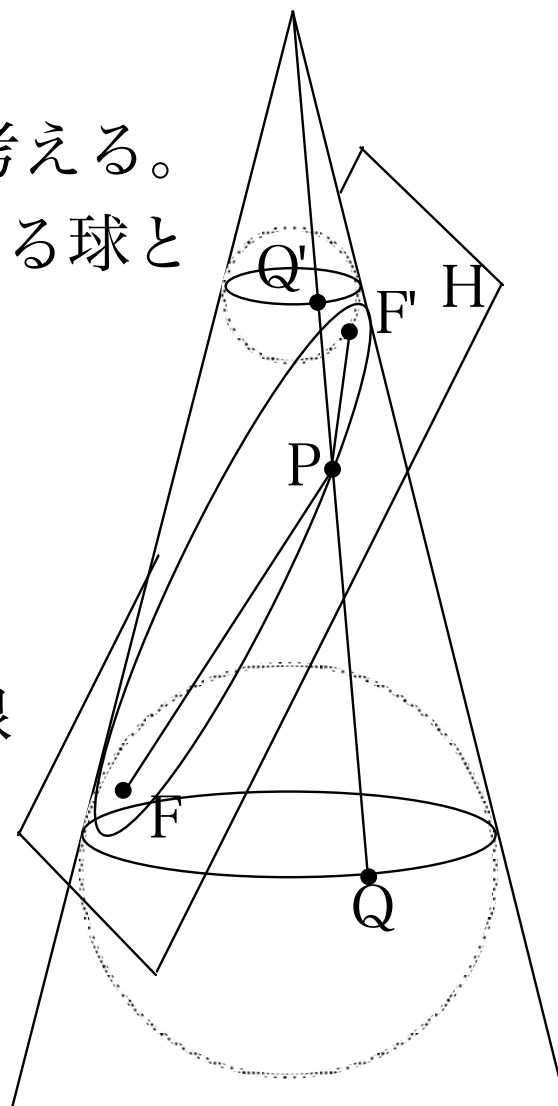
アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の楕円を考える。
円錐に内接し、 H に上からと下から接する球と
 H の接点を F, F' とする。

楕円上の点 P を通る円錐の斜辺が球と
円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると
 QQ' は P の一によらず一定である。

ここで PQ と PF は同じ球に対する接線
なので $PQ = PF$ 。同様に $PQ' = PF'$



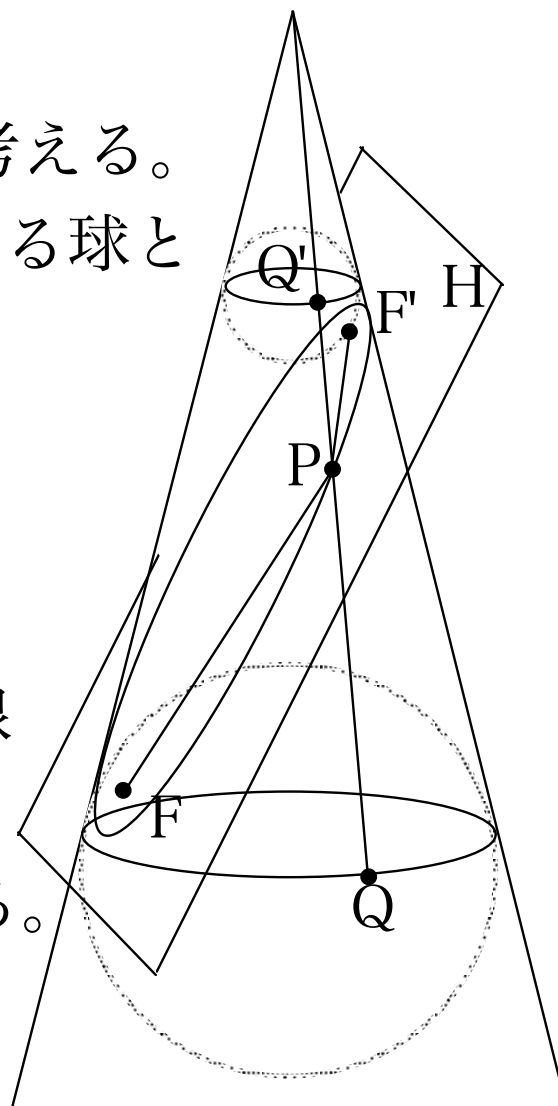
アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の楕円を考える。
円錐に内接し、 H に上からと下から接する球と
 H の接点を F, F' とする。

楕円上の点 P を通る円錐の斜辺が球と
円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると
 QQ' は P の一によらず一定である。

ここで PQ と PF は同じ球に対する接線
なので $PQ = PF$ 。同様に $PQ' = PF'$
従って $PF + PF' = QQ' = \text{一定}$ 、となる。



アポロニウスの円錐曲線論

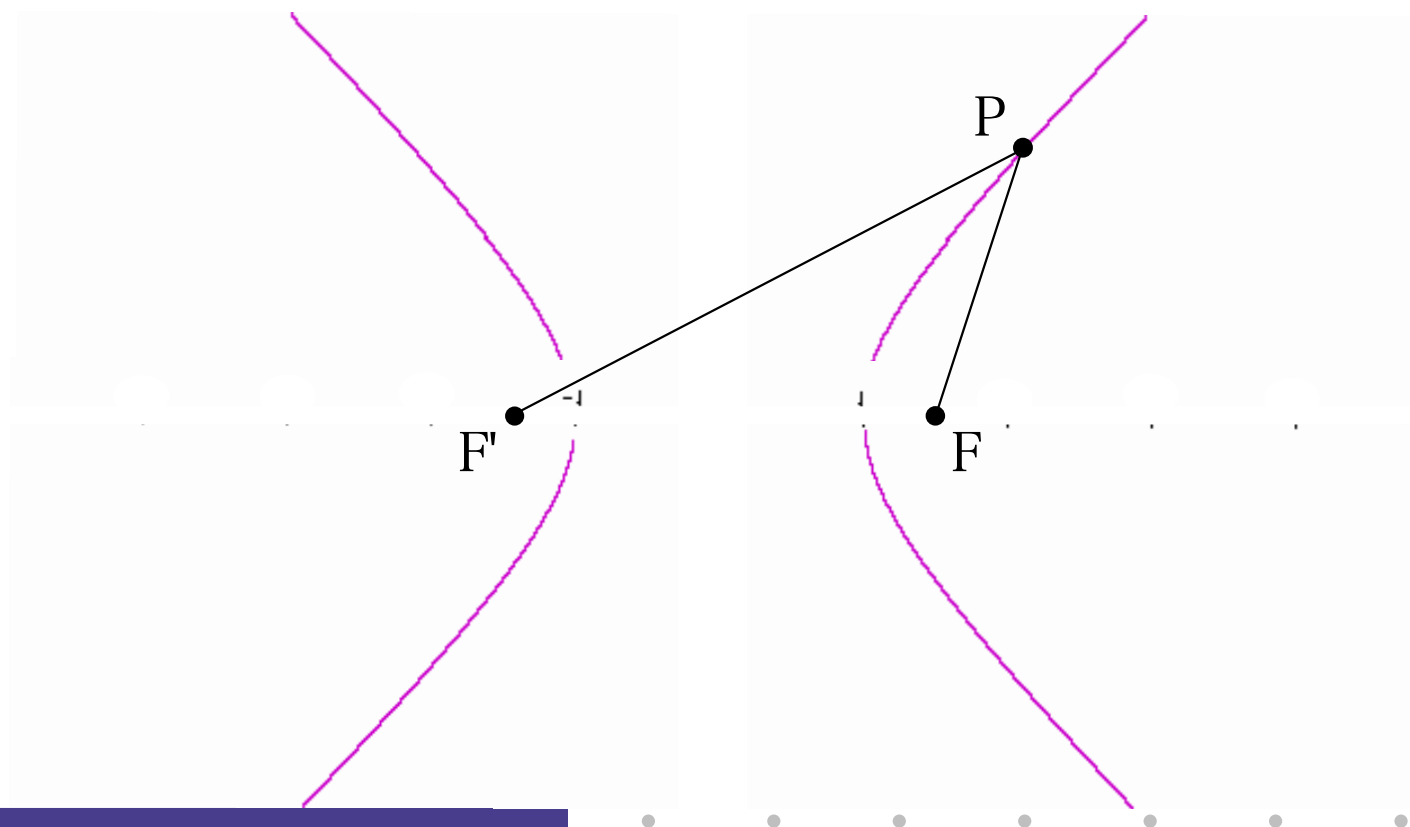
定理

双曲線は、平面上の二定点 F, F' (焦点) に対し $|PF - PF'|$ が一定である様な点 P の軌跡である。

アポロニウスの円錐曲線論

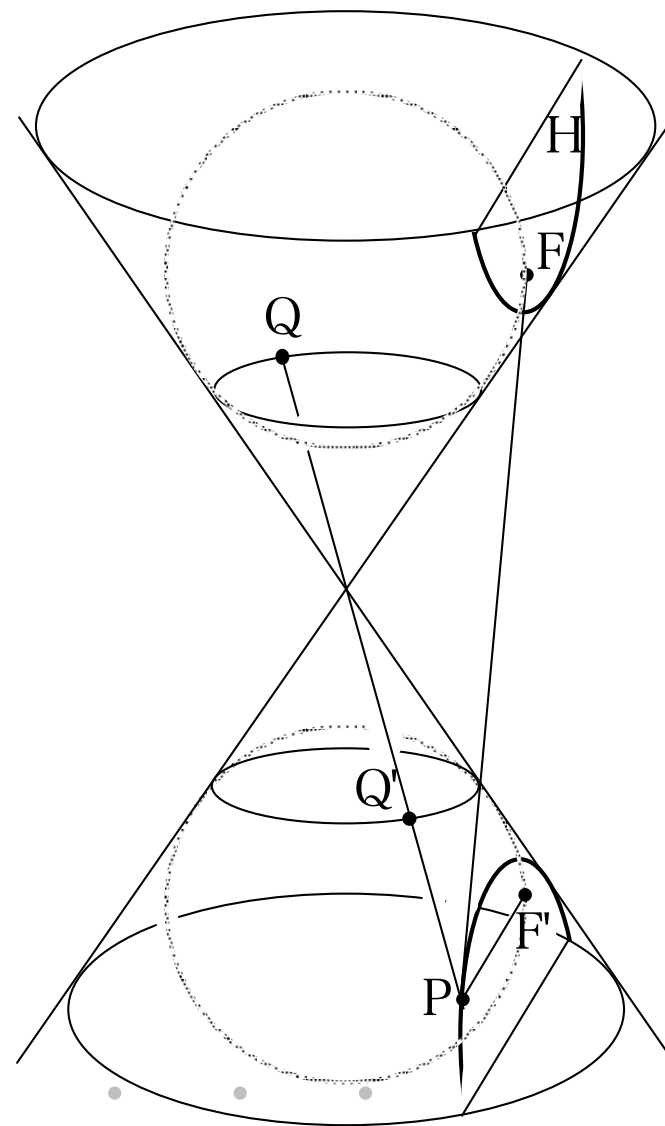
定理

双曲線は、平面上の二定点 F, F' (焦点) に対し $|PF - PF'|$ が一定である様な点 P の軌跡である。



アポロニウスの円錐曲線論

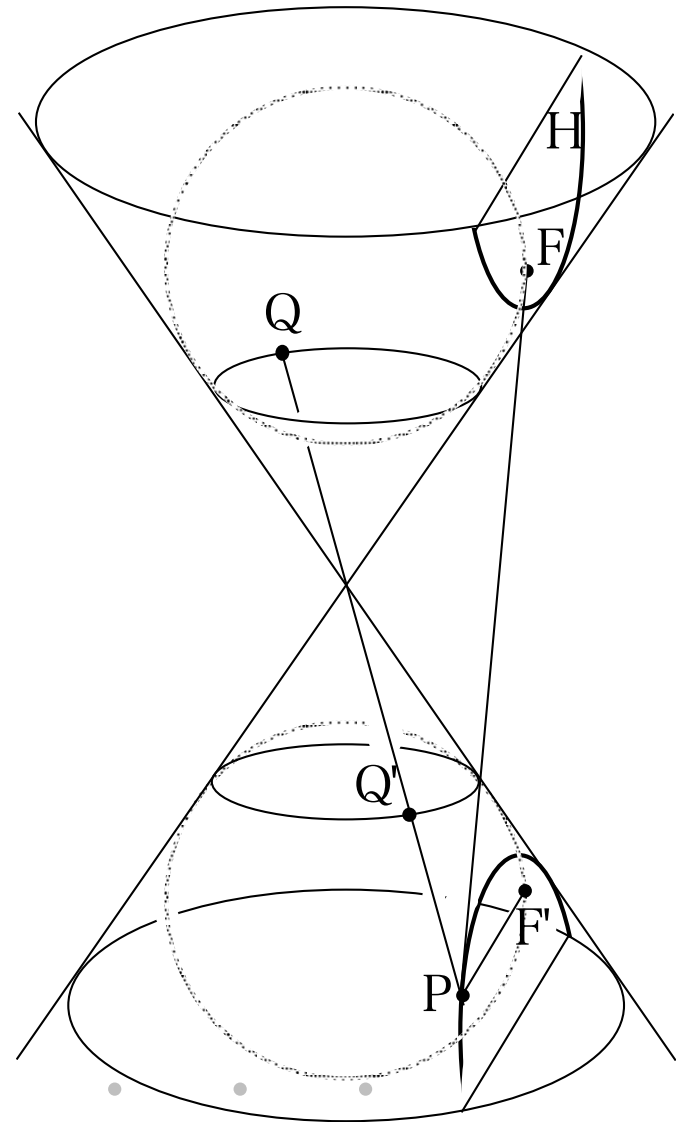
証明



アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の
双曲線を考える。

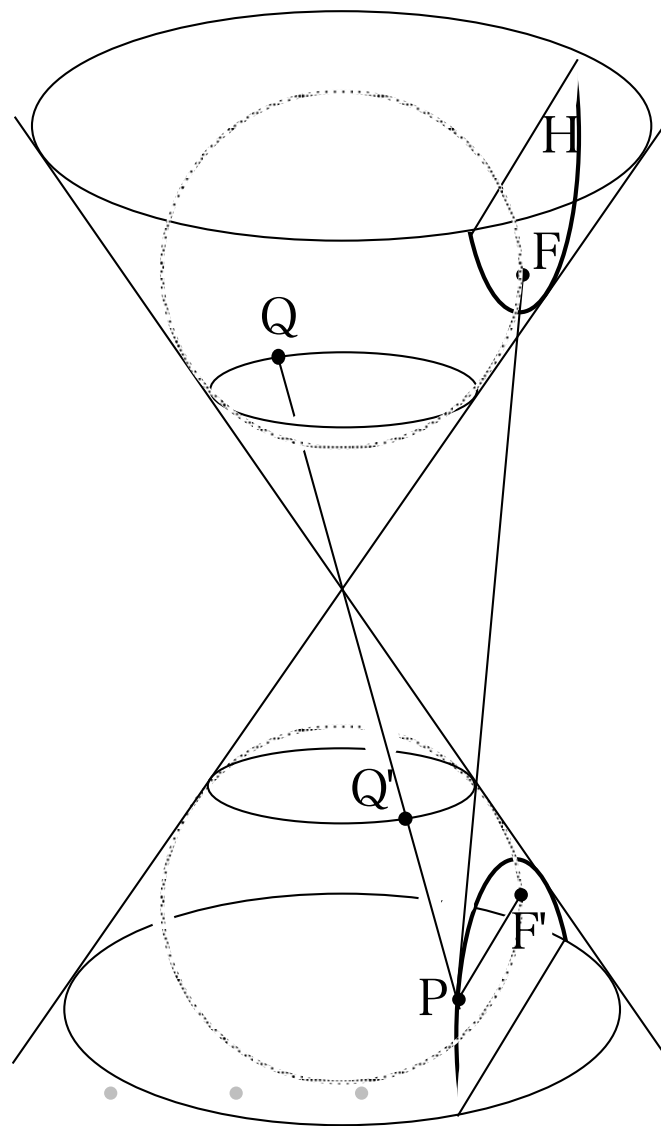


アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の双曲線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F, F' とする。



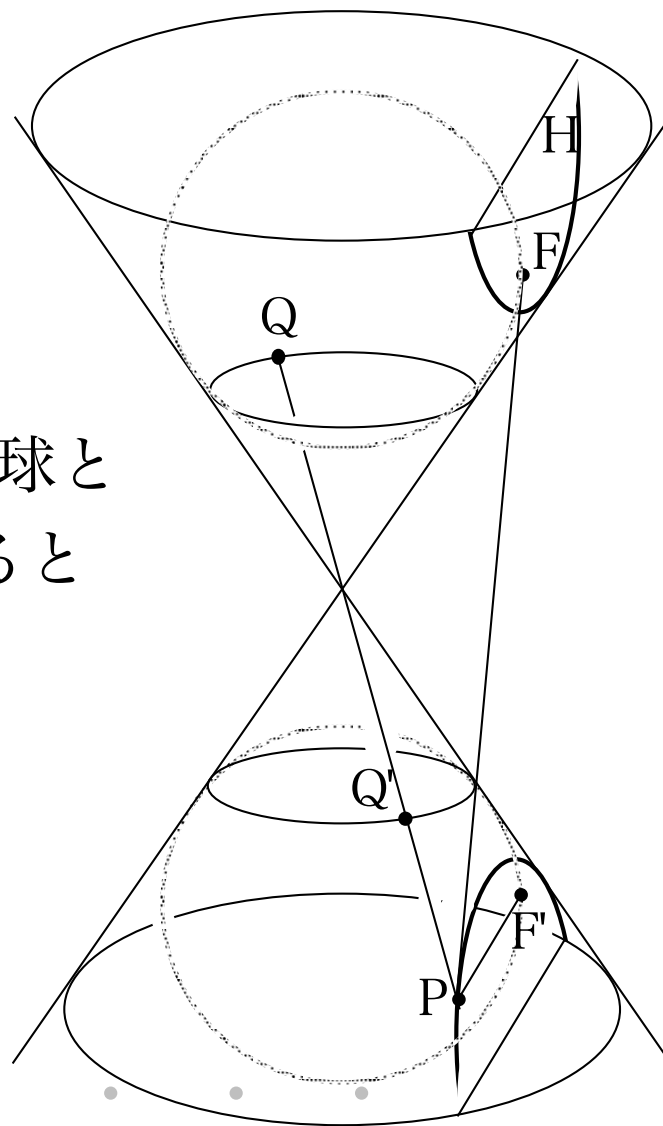
アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の双曲線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F, F' とする。

双曲線上の点 P を通る円錐の斜辺が球と円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると QQ' は P の一によらず一定である。



アポロニウスの円錐曲線論

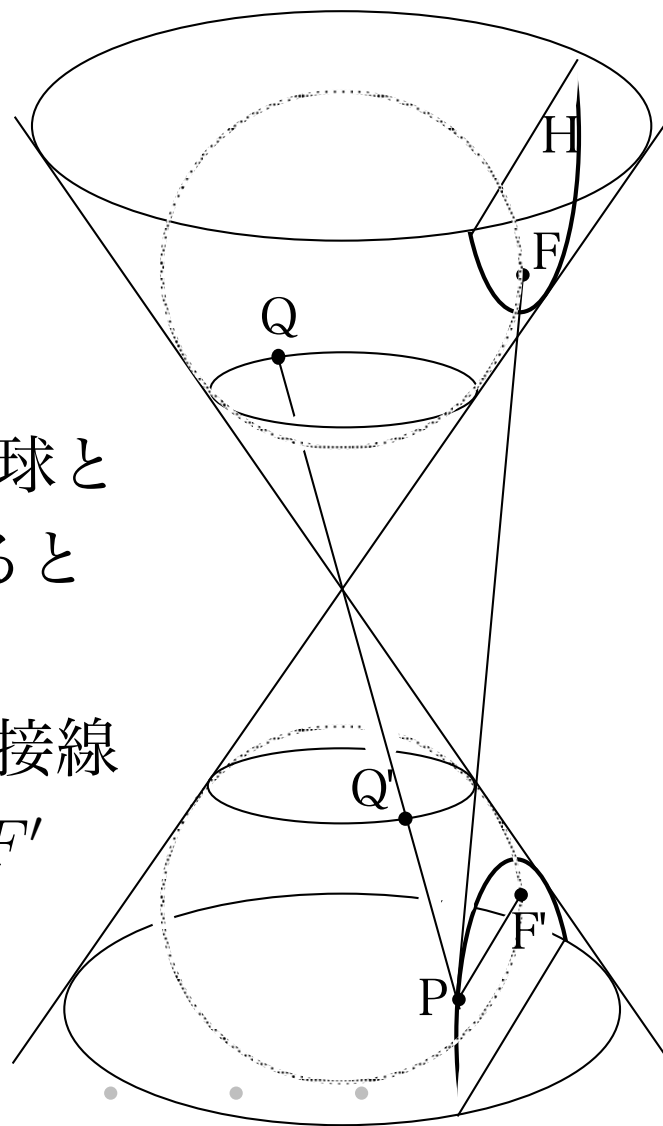
証明

円錐を平面 H で切った切り口の
双曲線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と
 H の接点を F, F' とする。

双曲線上の点 P を通る円錐の斜辺が球と
円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると
 QQ' は P の一によらず一定である。

ここで PQ と PF は同じ球に対する接線
なので $PQ = PF$ 。同様に $PQ' = PF'$



アポロニウスの円錐曲線論

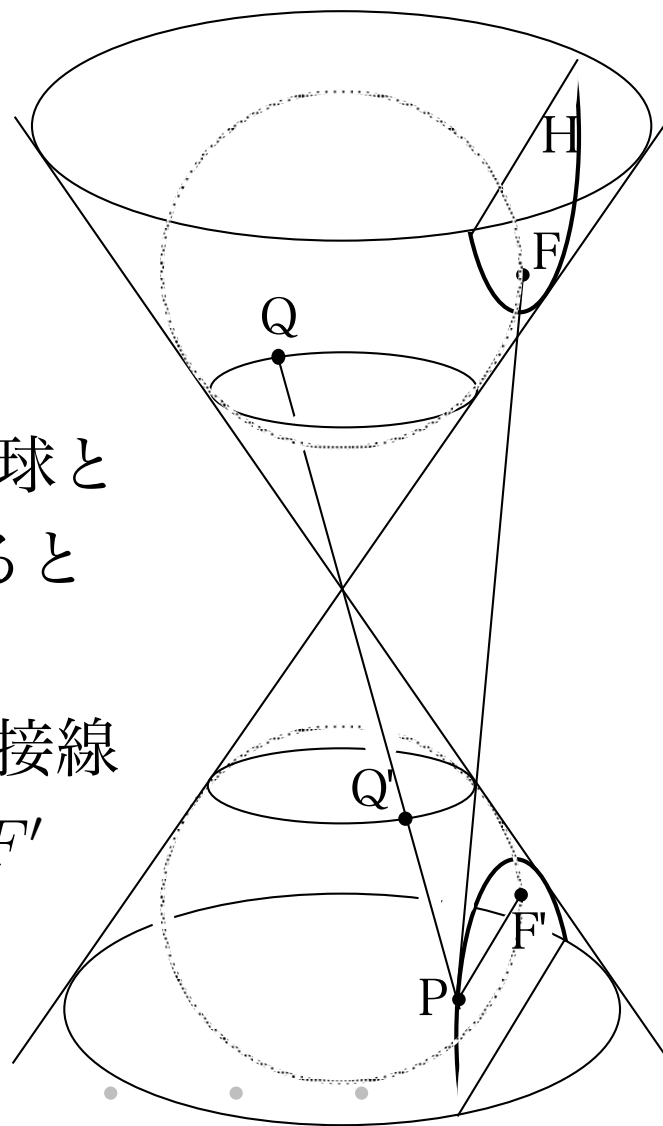
証明

円錐を平面 H で切った切り口の双曲線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F, F' とする。

双曲線上の点 P を通る円錐の斜辺が球と円錐の接円と交わる点を Q, Q' とすると QQ' は P の一によらず一定である。

ここで PQ と PF は同じ球に対する接線なので $PQ = PF$ 。同様に $PQ' = PF'$ 従って $PF - PF' = QQ' = \text{一定}$ となる。



アポロニウスの円錐曲線論

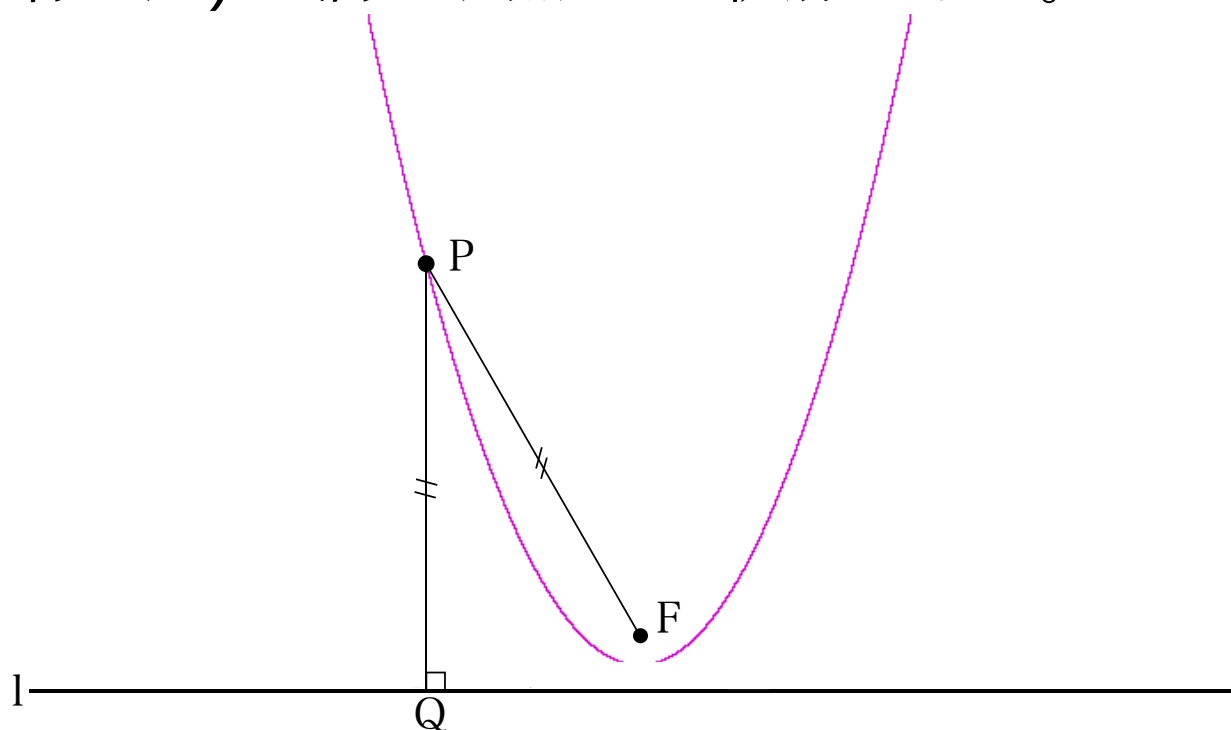
定理

放物線は、平面上のある定点 F (焦点) と F を通らないある直線 l (準線) に対し、 $PF = PQ$ (但し、 Q は P から l に下ろした垂線の足) を満たす点 P の軌跡である。

アポロニウスの円錐曲線論

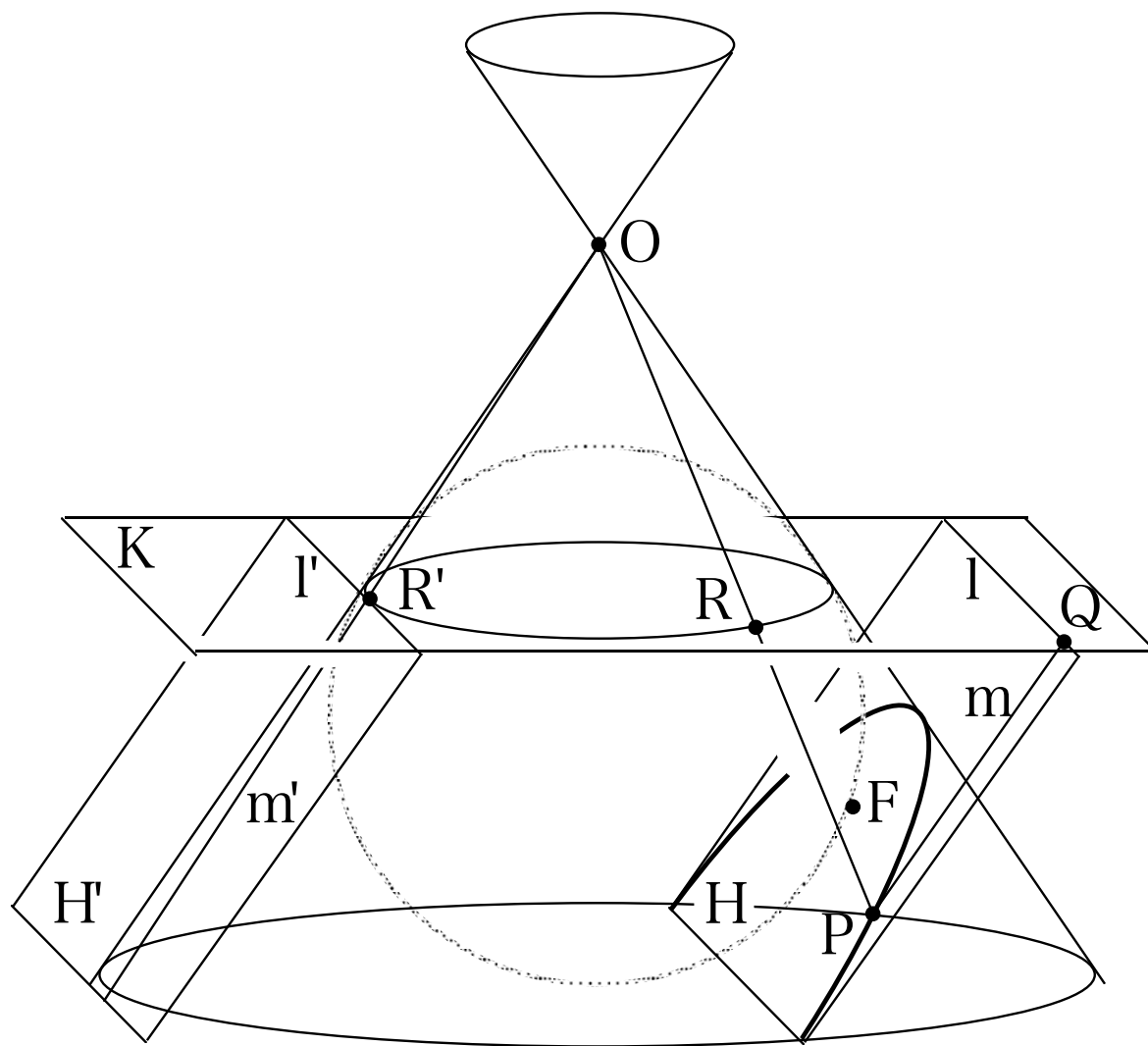
定理

放物線は、平面上のある定点 F (焦点) と F を通らないある直線 l (準線) に対し、 $PF = PQ$ (但し、 Q は P から l に下ろした垂線の足) を満たす点 P の軌跡である。



アポロニウスの円錐曲線論

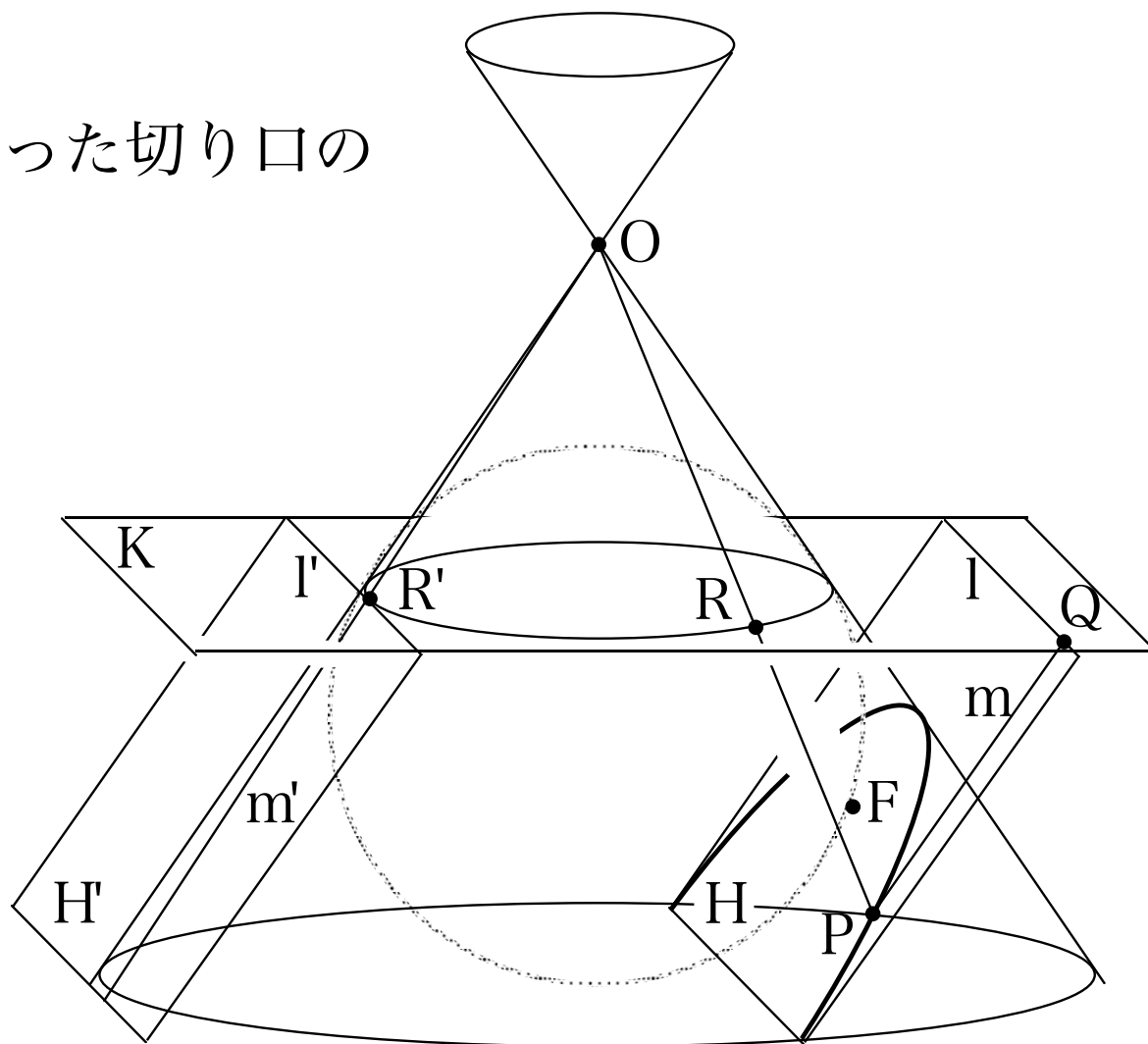
証明



アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

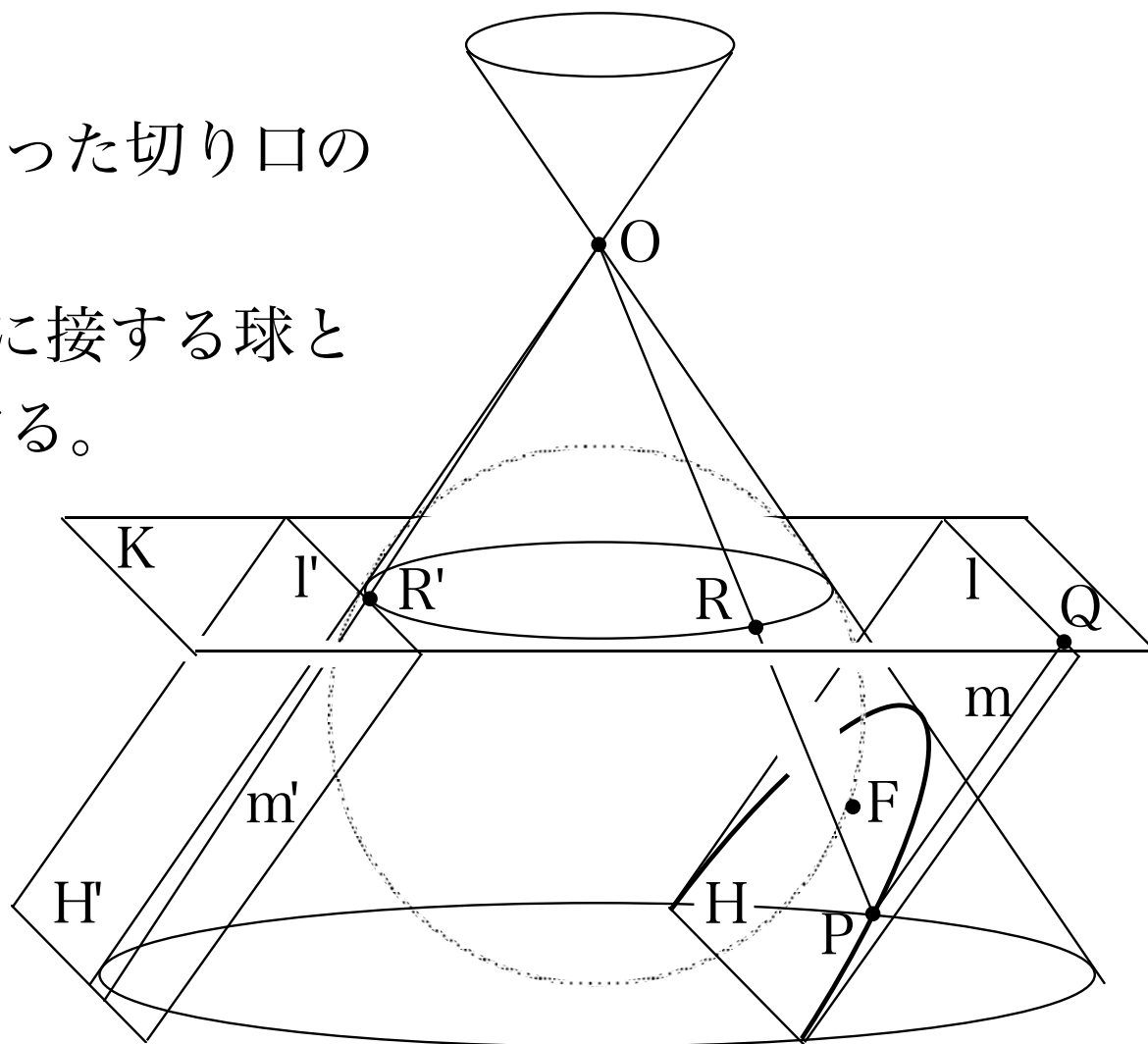


アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F とする。



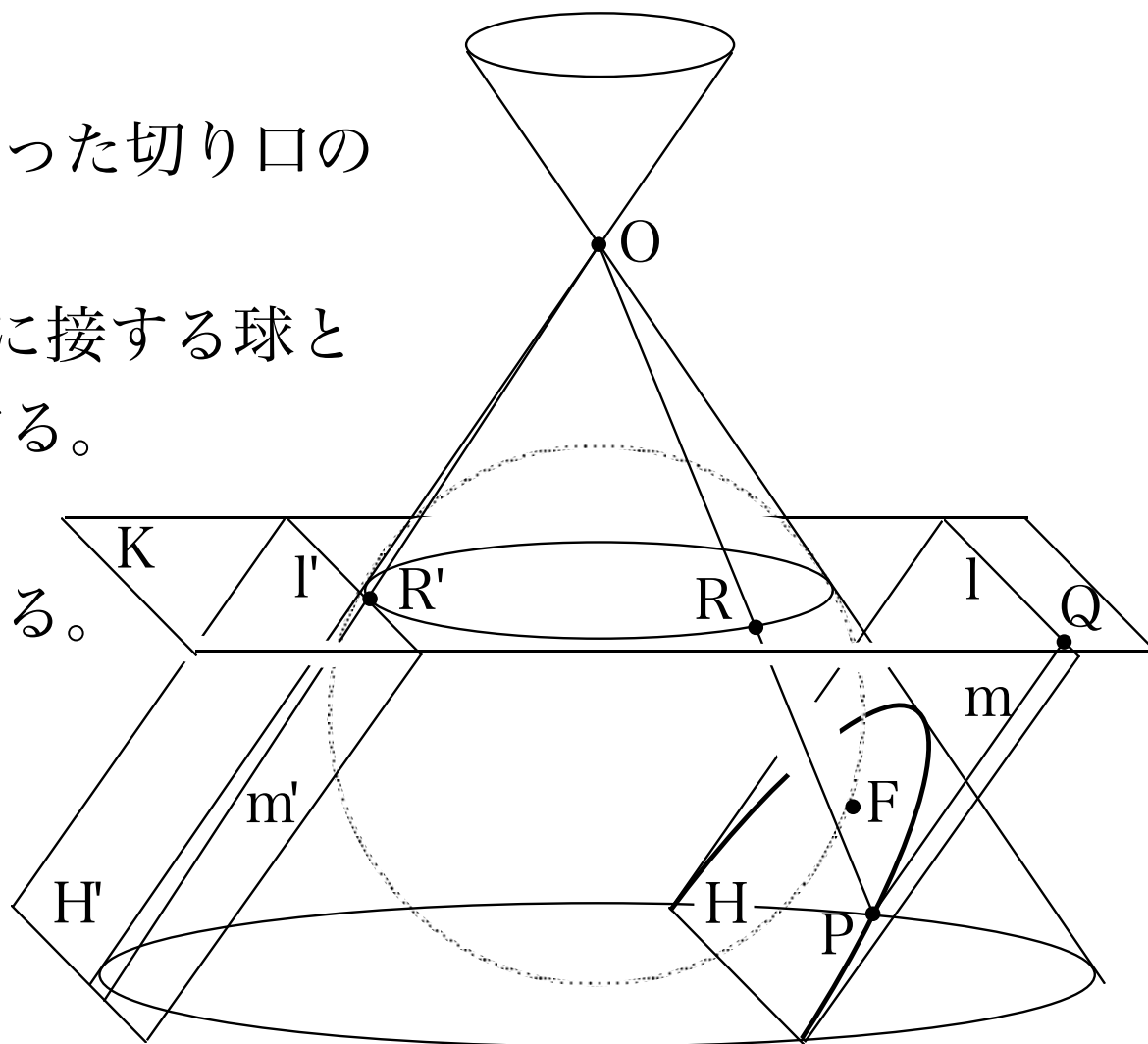
アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F とする。

球と円錐の接円を含む平面を K とする。



アポロニウスの円錐曲線論

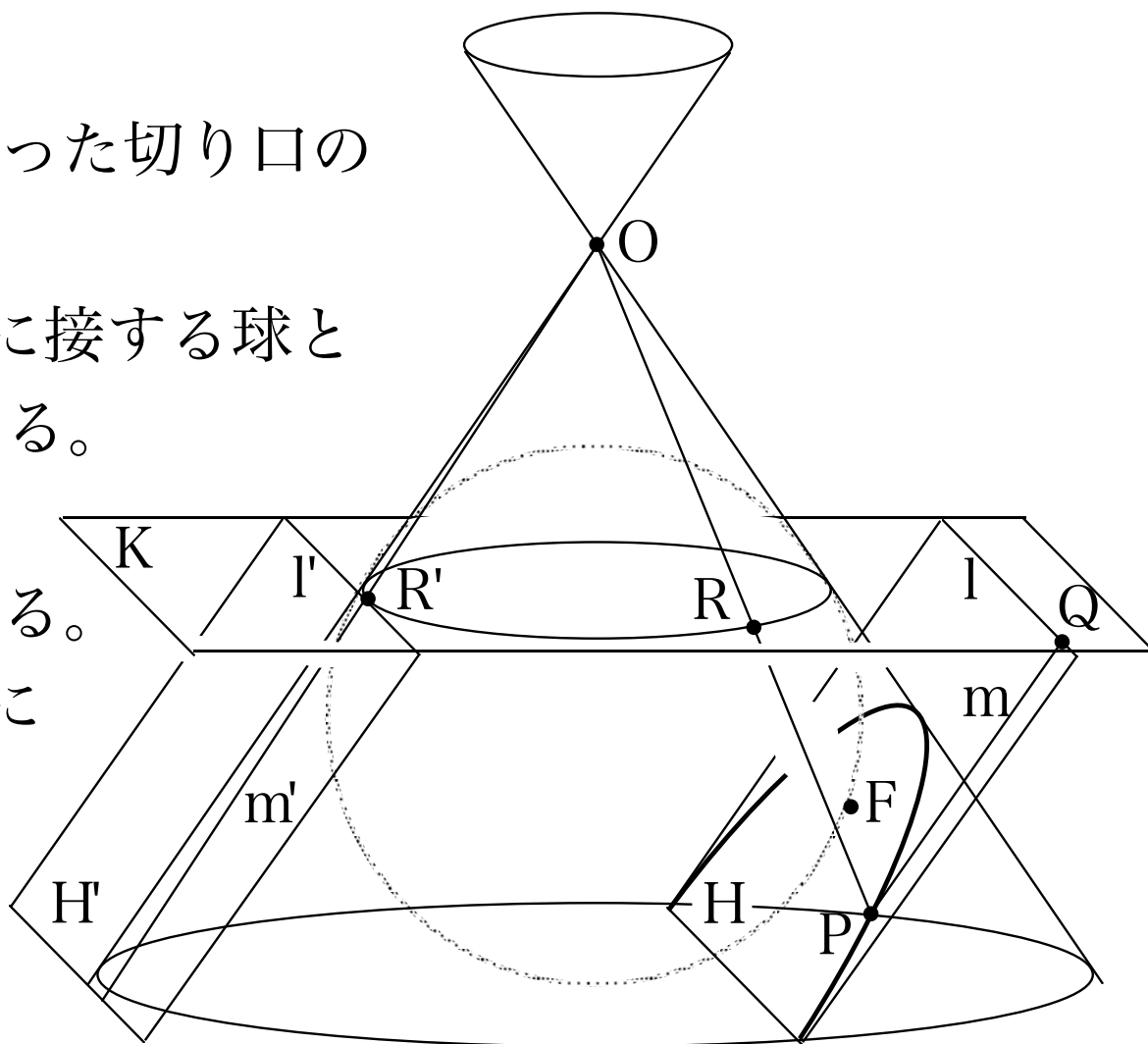
証明

円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F とする。

球と円錐の接円を含む平面を K とする。

H と平行で、円錐に接する平面を H' 、その接線を m' 。



アポロニウスの円錐曲線論

証明

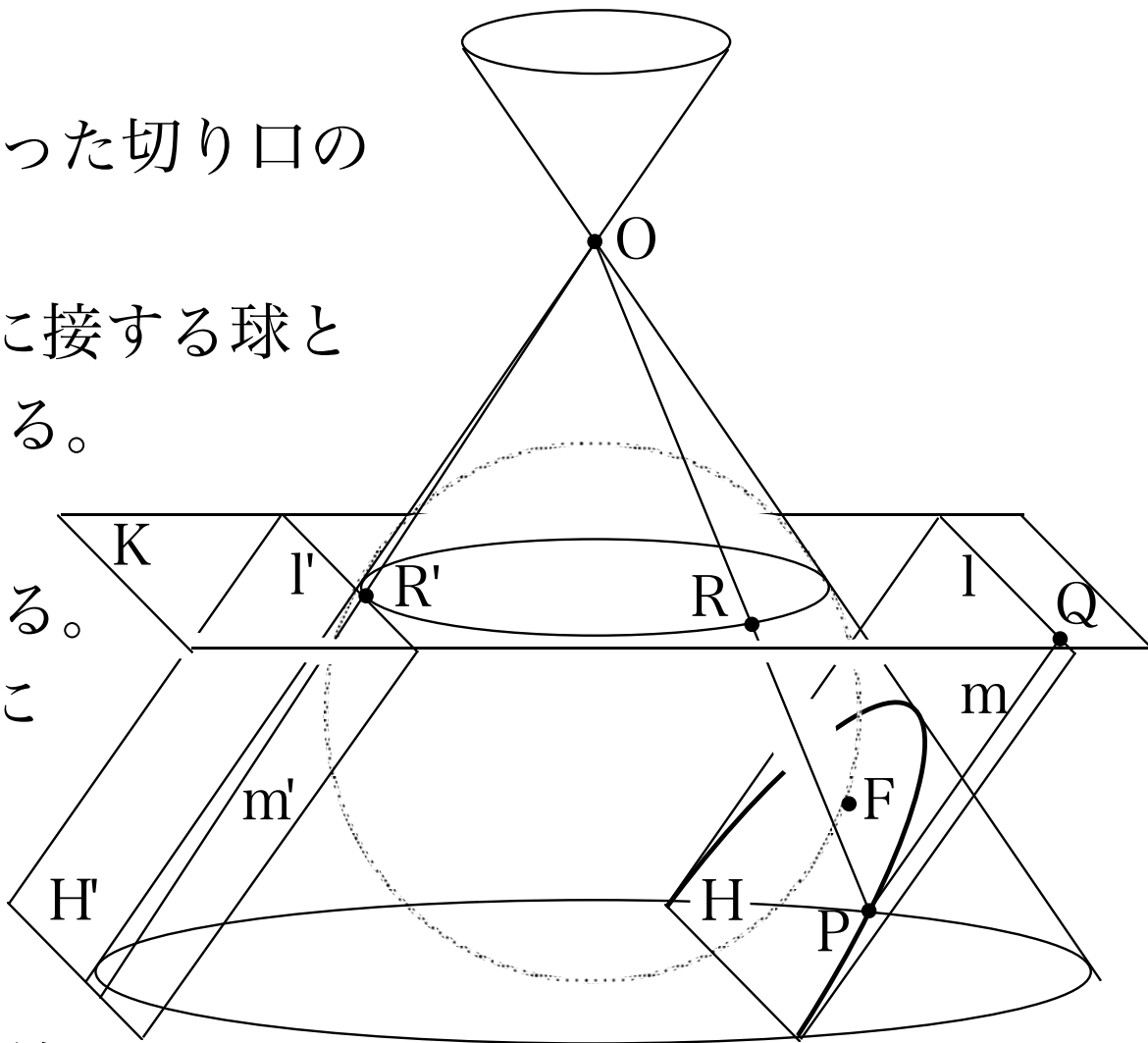
円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

円錐に内接し、 H に接する球と
 H の接点を F とする。

球と円錐の接円を $\triangle$ 含む平面を K とする。

H と平行で、円錐に接する平面を H' 、その接線を m' 。 $\angle$

放物線上の点 P を
通り m' に平行な直線を m 。



アポロニウスの円錐曲線論

証明

円錐を平面 H で切った切り口の放物線を考える。

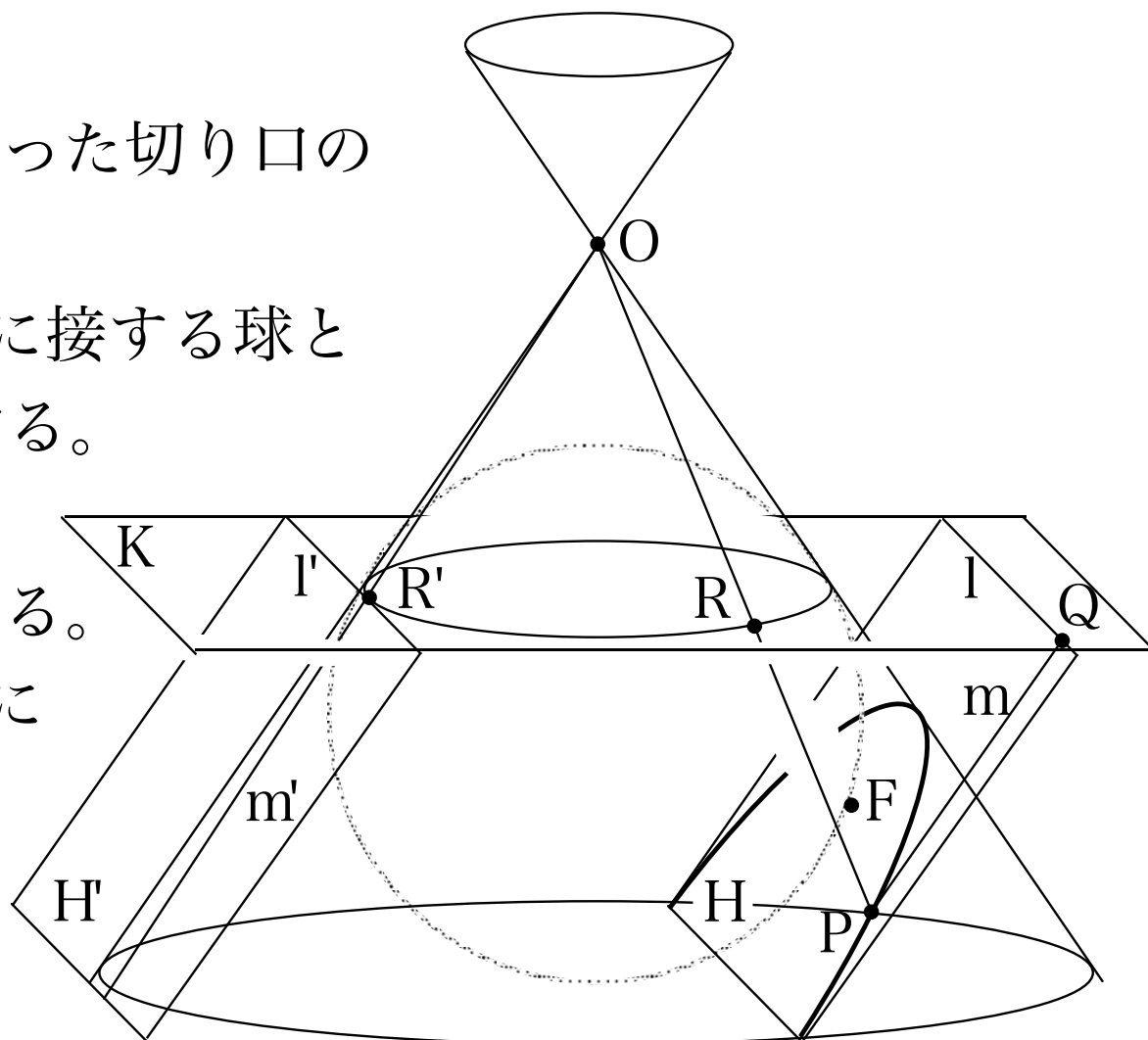
円錐に内接し、 H に接する球と H の接点を F とする。

球と円錐の接円を含む平面を K とする。

H と平行で、円錐に接する平面を H' 、その接線を m' 。

放物線上の点 P を

通り m' に平行な直線を m 。直線 l, l' 点 O, Q, R, R' を取る。



アポロニウスの円錐曲線論

証明続き

m' と l' は直交するので、
 m と l も直交する。

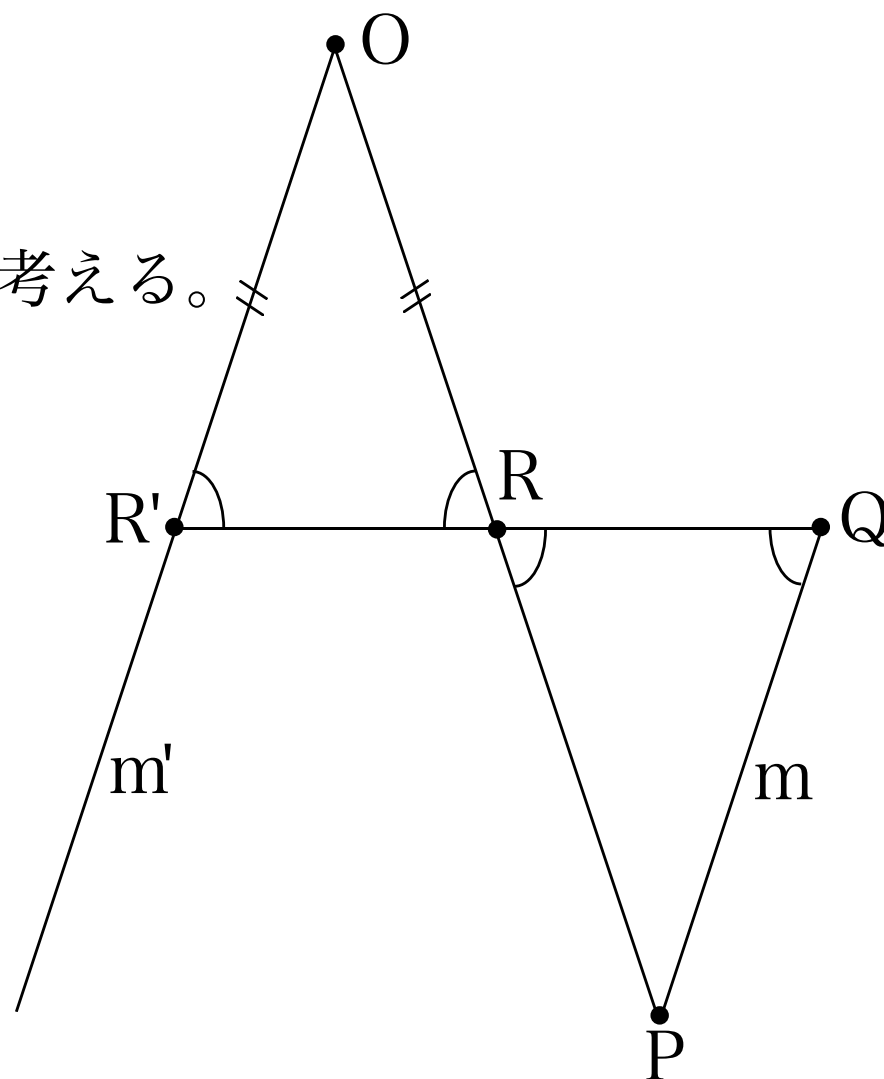
アポロニウスの円錐曲線論

証明続き

m' と l' は直交するので、

m と l も直交する。

平行線 m, m' を含む平面上で考える。



アポロニウスの円錐曲線論

証明続き

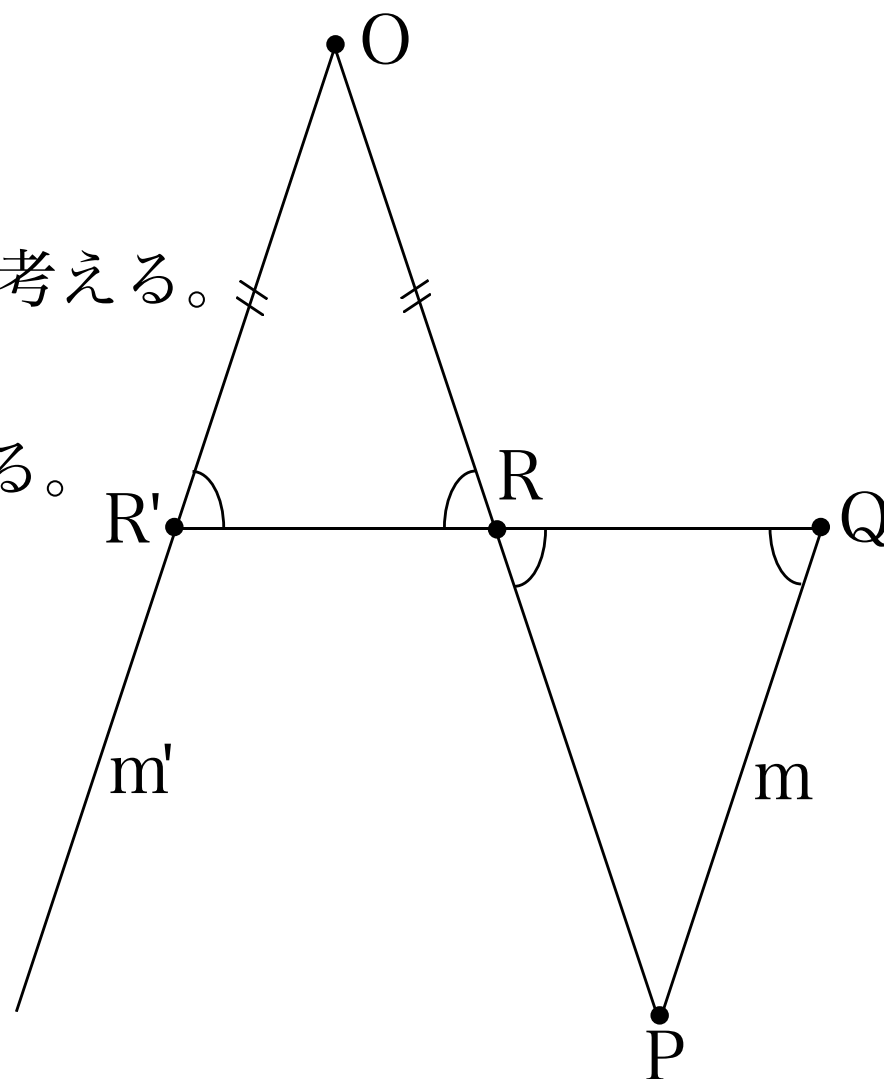
m' と l' は直交するので、

m と l も直交する。

平行線 m, m' を含む平面上で考える。

$OR = OR'$ なので

$\triangle ORR'$ は二等辺三角形である。



アポロニウスの円錐曲線論

証明続き

m' と l' は直交するので、

m と l も直交する。

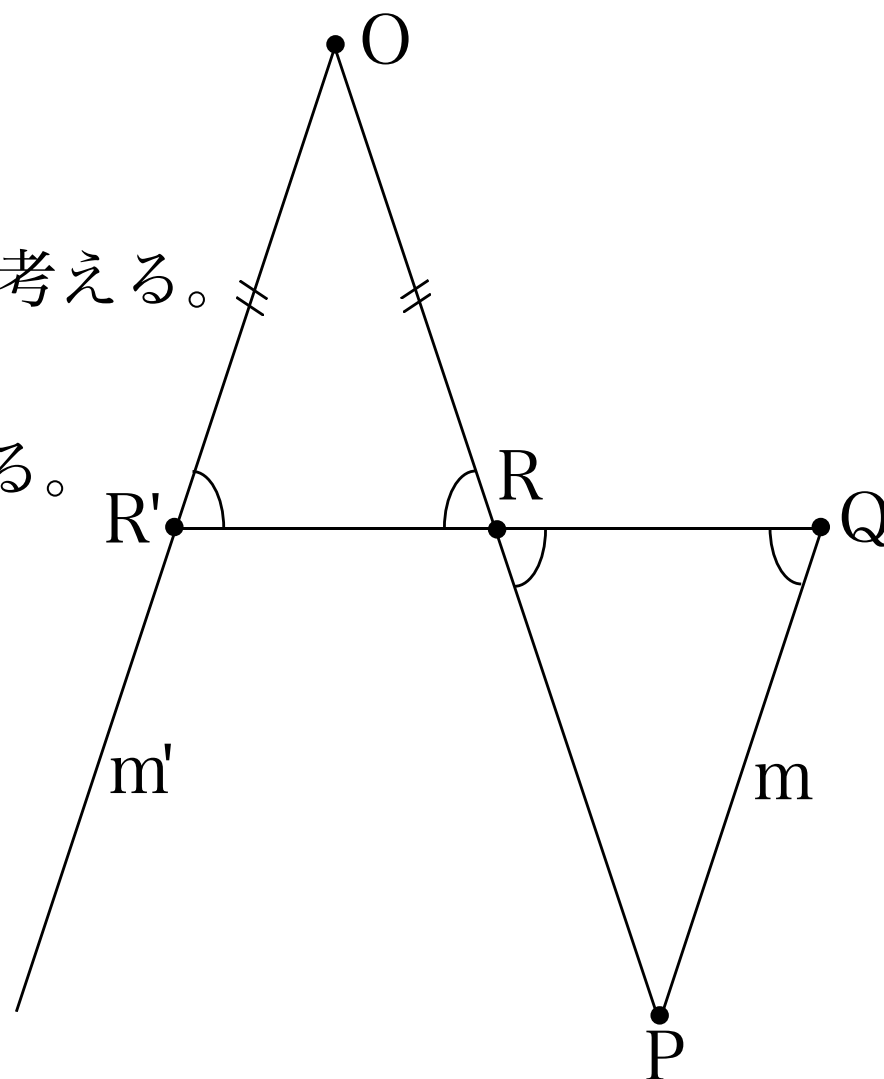
平行線 m, m' を含む平面上で考える。

$OR = OR'$ なので

$\triangle ORR'$ は二等辺三角形である。

m と m' が平行なので

$\triangle PQR$ も二等辺三角形。



アポロニウスの円錐曲線論

証明続き

m' と l' は直交するので、

m と l も直交する。

平行線 m, m' を含む平面上で考える。

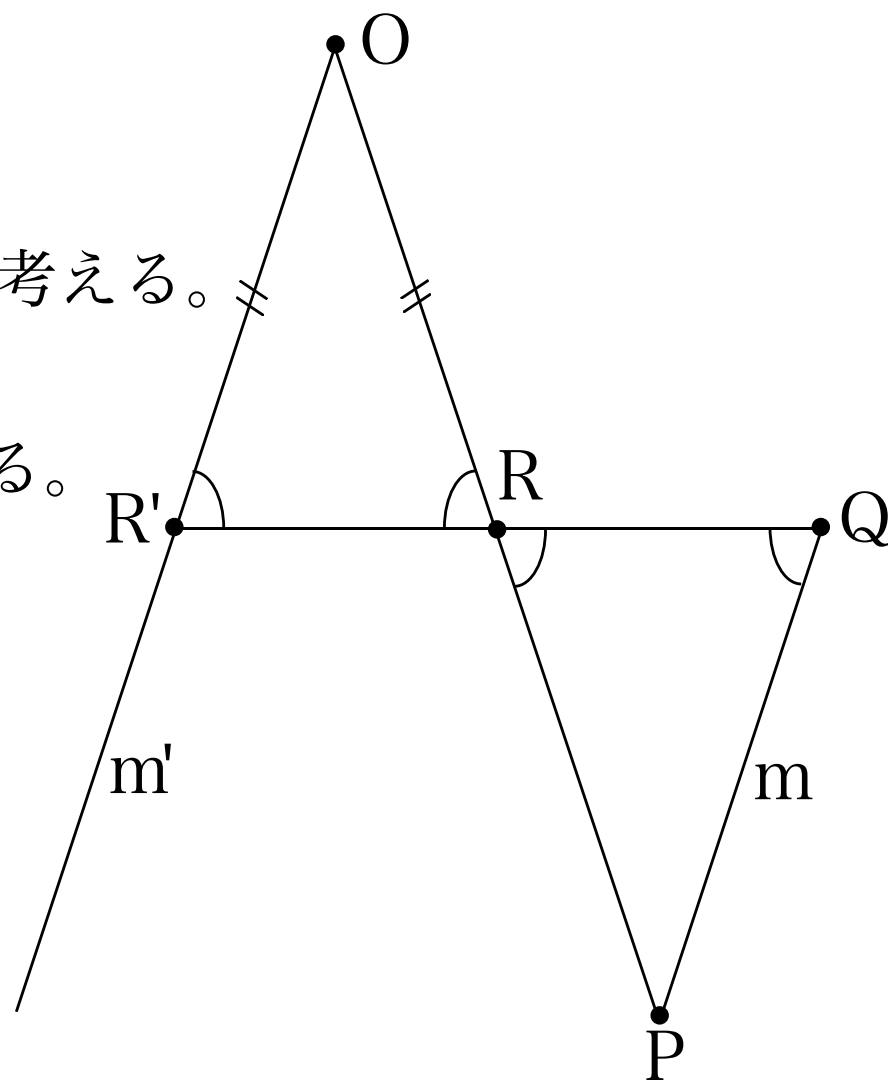
$OR = OR'$ なので

$\triangle ORR'$ は二等辺三角形である。

m と m' が平行なので

$\triangle PQR$ も二等辺三角形。

従って、 $PF = PR = PQ$



アポロニウスの円錐曲線論

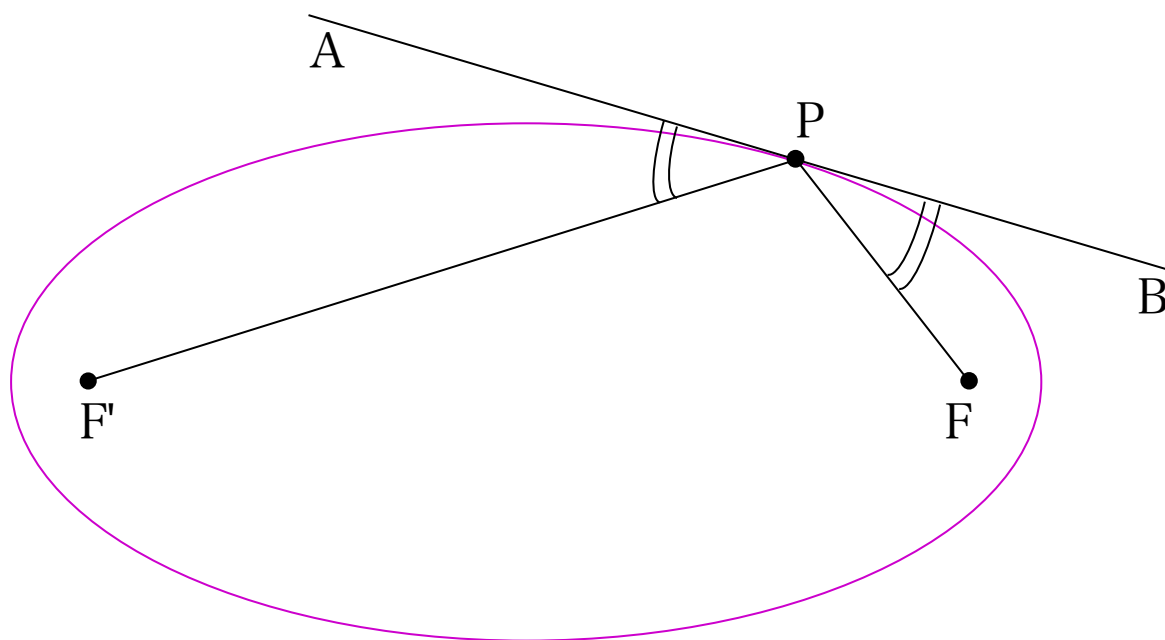
定理

P を楕円上の点とし、直線 AB を P におけるこの楕円への接線とする。このとき $\angle F'PA = \angle FPB$ である。

アポロニウスの円錐曲線論

定理

P を楕円上の点とし、直線 AB を P におけるこの楕円への接線とする。このとき $\angle F'PA = \angle FPB$ である。



アポロニウスの円錐曲線論

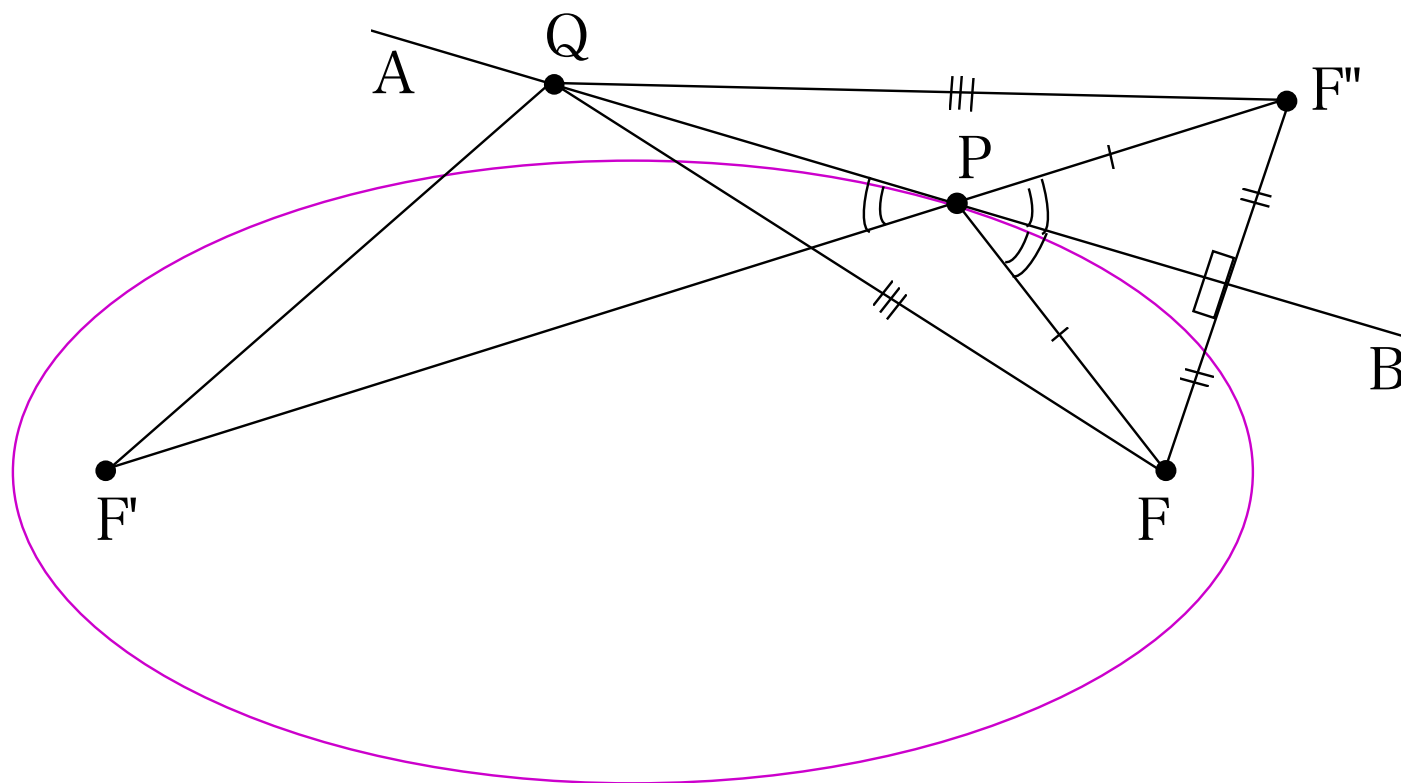
証明

$\angle F'PA = \angle FPB$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では楕円の外にあることを示す。

アポロニウスの円錐曲線論

証明

$\angle F'PA = \angle FPB$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では楕円の外にあることを示す。



アポロニウスの円錐曲線論

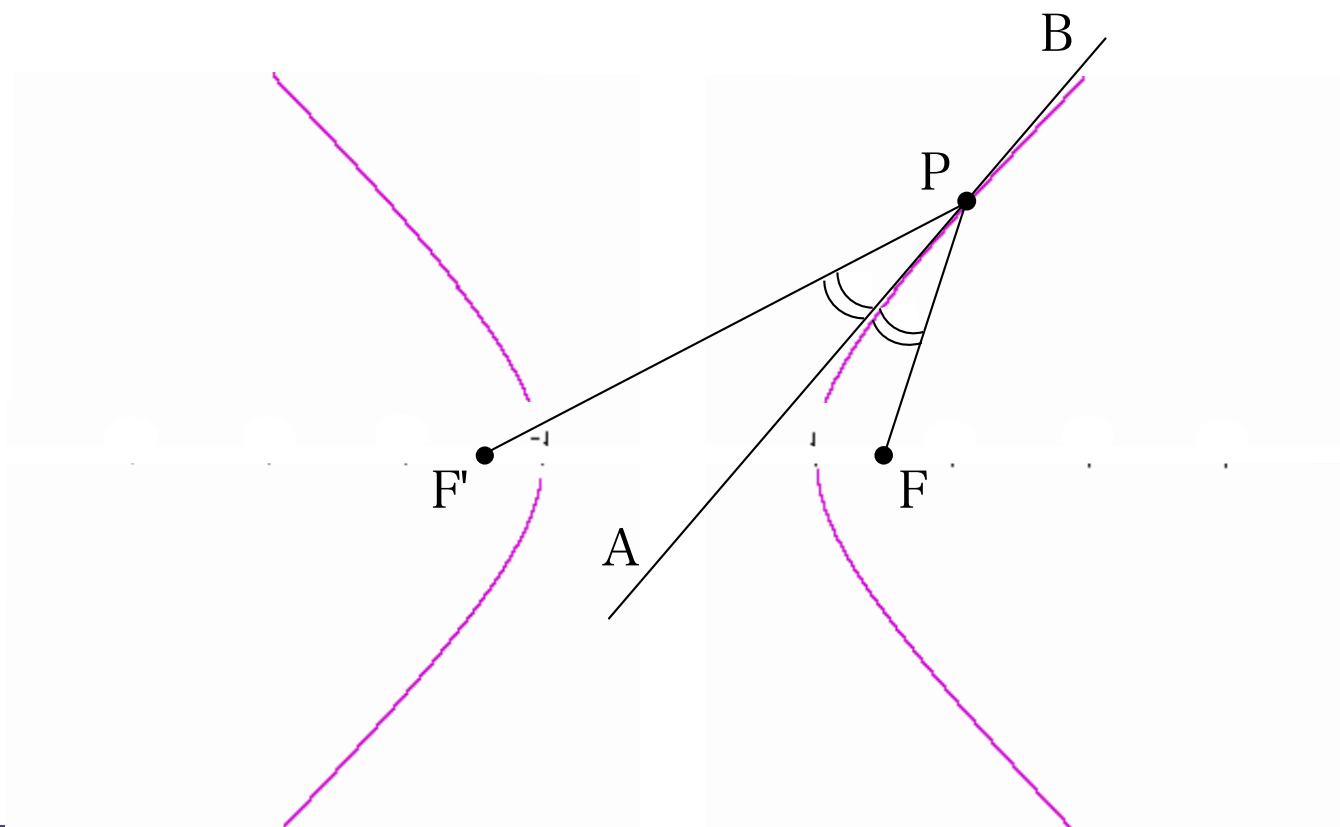
定理

P を双曲線上の点とし、直線 AB を P におけるこの双曲線への接線とする。このとき $\angle F'PA = \angle FPA$ である。

アポロニウスの円錐曲線論

定理

P を双曲線上の点とし、直線 AB を P におけるこの双曲線への接線とする。このとき $\angle F'PA = \angle FPA$ である。



アポロニウスの円錐曲線論

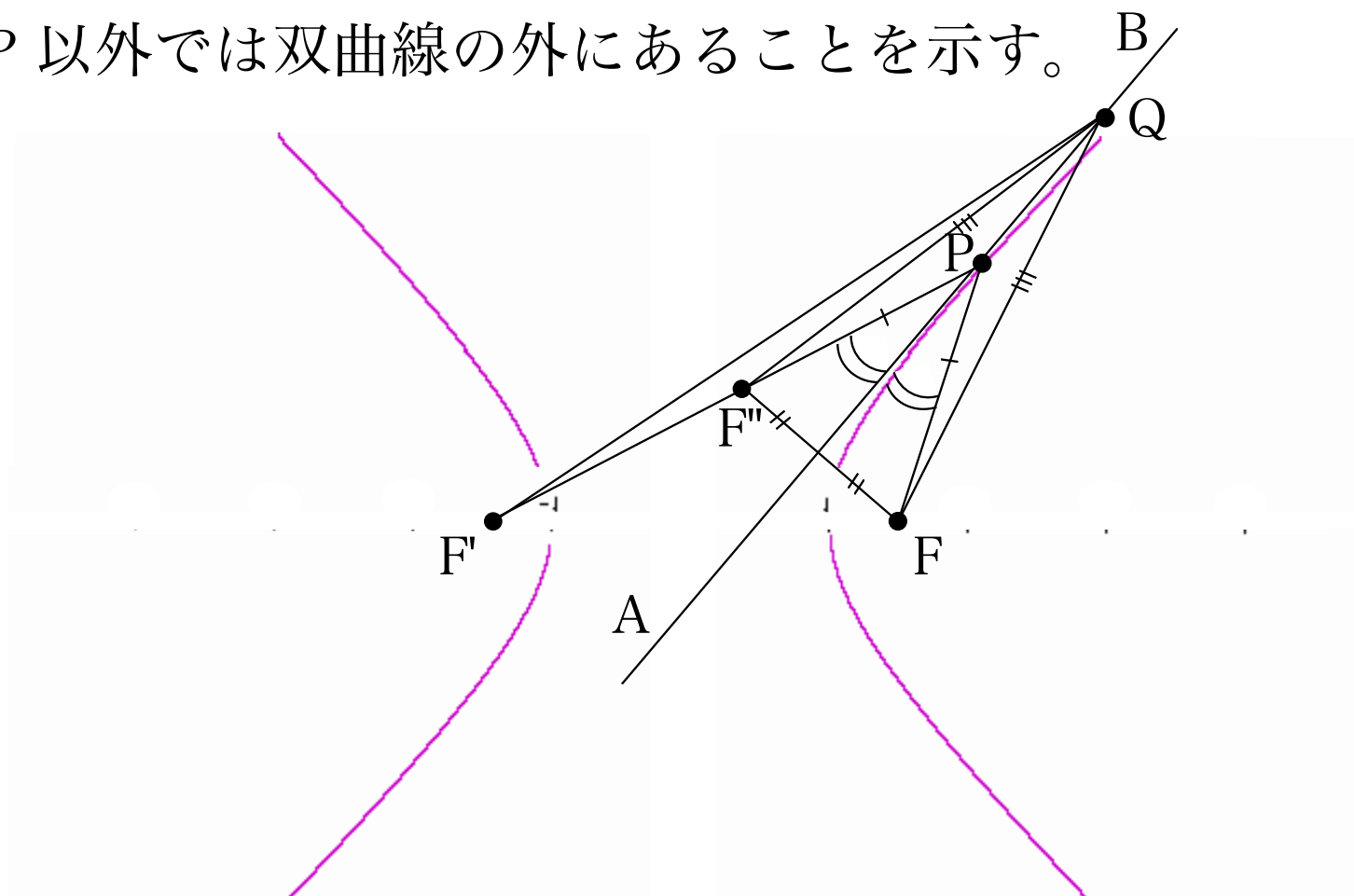
証明

$\angle F'PA = \angle FPA$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では双曲線の外にあることを示す。

アポロニウスの円錐曲線論

証明

$\angle F'PA = \angle FPA$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では双曲線の外にあることを示す。



アポロニウスの円錐曲線論

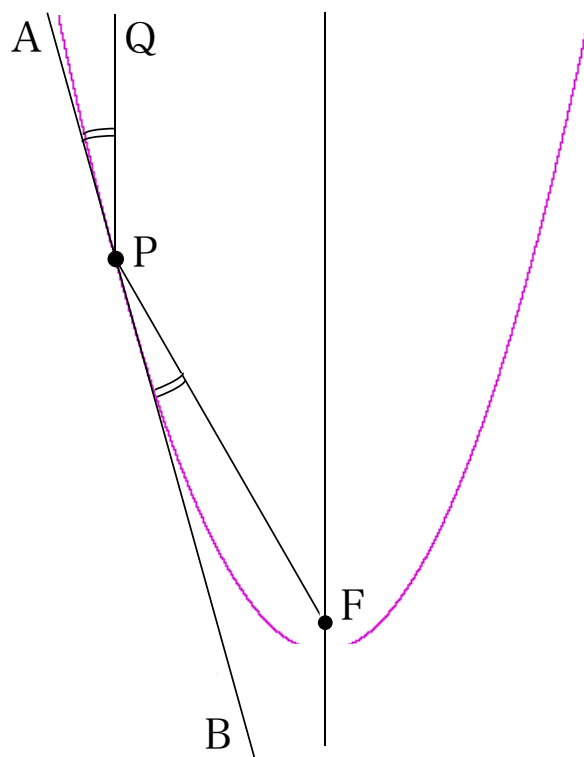
定理

P を放物線上の点とし、直線 AB を P におけるこの放物線への接線とする。 P から軸に平衡に引いた直線を PQ とする。このとき $\angle QPA = \angle FPB$ である。

アポロニウスの円錐曲線論

定理

P を放物線上の点とし、直線 AB を P におけるこの放物線への接線とする。 P から軸に平行に引いた直線を PQ とする。このとき $\angle QPA = \angle FPB$ である。



アポロニウスの円錐曲線論

証明

$\angle QPA = \angle FPB$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では放物線の外にあることを示す。

アポロニウスの円錐曲線論

証明

$\angle QPA = \angle FPB$ となる様に直線 AB を引くと、この直線が P 以外では放物線の外にあることを示す。

