数学展望：レポート問題*@ 翁　林

1. $\alpha = \left(\sqrt{2}, 0\right)$, $\beta = \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を実数平面 $\mathbb{R}^2$ の元とし, σ_α, σ_β はそれぞれ α, β によって定義された実数平面の反射とする. 次の問いを答えよ.

(1) 次のことを証明せよ

(a) $\sigma_\alpha(x,y) = (-x, y)$.

(b) $\sigma_\beta(x,y) = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y, \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y\right)$.

(c) $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha = R(-\dfrac{\pi}{3})$.
ただし, $R(\theta)$ は実数平面の「中心は原点, 角度は θ の回転」[1]である.

(2) 例外ルート系 G_2 に関して, 次のことを知られている.

(a) $\Delta = \left\{\alpha, \beta\right\}$, $\quad \Phi^+ = \left\{\alpha,\ \beta,\ a+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\right\}$

(b)

$$\begin{aligned} W = \Big\{&\mathrm{Id.}\ R(-\frac{\pi}{3}),\ R(-\frac{2\pi}{3}),\ R(-\pi),\ R(-\frac{4\pi}{3}),\ R(-\frac{5\pi}{3}),\\ &\sigma_\alpha, R(-\frac{\pi}{3})\circ\sigma_\alpha,\ R(-\frac{2\pi}{3})\circ\sigma_\alpha,\ R(-\pi)\circ\sigma_\alpha,\ R(-\frac{4\pi}{3})\circ\sigma_\alpha,\ R(-\frac{5\pi}{3})\circ\sigma_\alpha\Big\} \end{aligned} \tag{1}$$

これらを用いて, Weyl 群 W の Φ^+ への作用関する次の表を完成せよ.

	α	β	$\alpha+\ \beta$	$2\alpha+\ \beta$	$3\alpha+\ \beta$	$3\alpha+2\beta$
Id	α	β	$\alpha+\ \beta$	$2\alpha+\ \beta$	$3\alpha+\ \beta$	$3\alpha+2\beta$
$R(-\frac{\pi}{3})$	$-(\alpha+\beta)$	$3\alpha+2\beta$	$2\alpha+\beta$	α	$-\beta$	$3\alpha+\beta$
$R(-2\frac{\pi}{3})$						
$R(-3\frac{\pi}{3})$						
$R(-4\frac{\pi}{3})$						
$R(-5\frac{\pi}{3})$						
σ_α	$-\alpha$	$3\alpha+b$	$2\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	β	$3\alpha+2\beta$
$R(-\frac{\pi}{3}\circ\sigma_\alpha$						
$R(-2\frac{\pi}{3})\circ\sigma_\alpha$						
$R(-3\frac{\pi}{3})\circ\sigma_\alpha$						
$R(-4\frac{\pi}{3})\circ\sigma_\alpha$						
$R(-5\frac{\pi}{3})\circ\sigma_\alpha$						

*締め切り: 6 月 15 日 @ 数理事務室

[1]平面の「中心は原点, 角度は θ の回転 R_θ」 は次の公式によって定まる.

$$R_\theta(x,y) = \Big((\cos\theta)x - (\sin\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y\Big)$$