多様体論　演習問題

授業で出題した問題をまとめたものです.

ベクトル空間

問 1. V を体 K 上のベクトル空間とする．このとき V 上の2次線形形式のなす空間 $B(V,K)$ は自然に K 上のベクトル空間となることを示し，$B(V,K)$ は双対空間のテンソル積 $V^* \otimes V^*$ と同型になることを示せ.

位相空間

問 2. $\pi\colon X \to X'$ を全射，X を位相空間とする．このとき，次の $\mathcal{O}'$ は X' の位相であることを示せ（**商位相**という）.

$$\mathcal{O}' = \{O \subset X' \mid \pi^{-1}(O) \subset X \text{ は開集合}\}$$

また，位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ および写像 $\bar{f}\colon X' \to Y$ が $\bar{f} \circ \pi = f$ を満たすならば，$\bar{f}$ もまた連続となることを示せ.

問 3. Γ を有限群，X を Hausdorff 空間とする．Γ の X への作用 $\rho\colon \Gamma \times X \to X$ が連続であるとは，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し，$x \mapsto \rho(\gamma, x)$ が連続となることである．また，作用 ρ が**自由**であるとは，ある $\gamma \in \Gamma$ と $x \in X$ に対し $\rho(\gamma, x) = x$ ならば，$\gamma = 1$ となることである．有限群 Γ が Hausdorff 空間 X に自由かつ連続に作用するとき，自然な全射 $X \to X/\Gamma$ による商空間 X/Γ は Hausdorff 空間となることを示せ.

多様体の定義

問 4. 2次元球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ に対し，開集合

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_i > 0\}, \qquad U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_i < 0\}$$

および

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3), \quad \varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3), \quad \varphi_3^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

で定まる写像 $\varphi_i^\pm\colon U_i^\pm \to B^2$ を考える $(i = 1, 2, 3)$．ここで $B^2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\}$ は単位開円板である．このとき，$\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_i$ は S^2 の C^∞ 級座標近傍系であることを示せ.

問 5. 2次元球面 S^2 に対し，開集合

$$V^+ = S^2 - \{(0,0,-1)\}, \qquad V^- = S^2 - \{(0,0,1)\}$$

を考える．このとき各 $x \in V^+$ に対し，$(0,0,-1)$ と x を結ぶ直線が平面 $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ と交わる点の第1,2成分を $\psi^+(x) \in \mathbb{R}^2$ と書く．同様に各 $x \in V^-$ に対し，$(0,0,1)$ と x を結ぶ直線が平面 P と交わる点の第1,2成分を $\psi^-(x) \in \mathbb{R}^2$ と書く．すると，写像 $\psi^\pm\colon V^\pm \to \mathbb{R}^2$ が定まる.

(1) $\psi^+(x_1, x_2, x_3)$ および $\psi^-(x_1, x_2, x_3)$ を座標で表し，$\psi^\pm$ の逆写像を求めよ.

(2) $\{(V^+,\psi^+),(V^-,\psi^-)\}$ は S^2 の C^∞ 級座標近傍系であることを示せ．

問 6. 問 4 と問 5 の S^2 の C^∞ 級座標近傍系が同値であることを示せ．

問 7. 次の二つの $\mathbb{R}$ の C^∞ 級座標近傍系を考える．

(i) $\{(\mathbb{R},\mathrm{id}_\mathbb{R})\}$,

(ii) $\{(\mathbb{R},\phi)\}$，ただし $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\phi(x)=x^3$ で与える．

このとき，これらは実際に $\mathbb{R}$ の C^∞ 級座標近傍系になっていることを確認し，これらの座標近傍系は同値でないことを示せ．

問 8. 次の $\mathbb{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を考える．

$$(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)\quad\Leftrightarrow\quad y_1-x_1,y_2-x_2\text{はともに整数}.$$

同値関係 $\sim$ による商集合を T^2 と書き，同値類を対応させる全射 $f\colon\mathbb{R}^2\to T^2$ に関する商位相により T^2 を位相空間と思う（**2 次元トーラス**という）．このとき，T^2 はコンパクト Hausdorff 空間であることを示せ．また，これがなぜ「ドーナツの表面」と思えるのか簡単に説明せよ．

問 9. 前問の設定の下で，開集合

$$V_0=(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\times(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\quad V_1=(0,1)\times(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\quad V_2=(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\times(0,1),\quad V_3=(0,1)\times(0,1),$$

に対し包含写像 $\tilde{\psi}_i\colon V_i\to\mathbb{R}^2$ を考え，$\psi_i\colon V_i\to T^2$ を $\psi_i=f\circ\tilde{\psi}_i$ で定める．

(1) ψ_i の行き先を制限した $\psi_i'\colon V_i\to\psi_i(V_i)$ は同相写像であることを示せ．

(2) ψ_i' の逆写像を ϕ_i，$U_i=\psi_i(V_i)$ としたとき，$\{(U_i,\phi_i)\}_{i=0,1,2,3}$ は T^2 の C^∞ 級座標近傍系となっていることを示せ．

問 10. 同じ次元の C^∞ 級多様体 M, N に対し，その disjoint union $M\sqcup N$ は自然に C^∞ 級多様体となることを示せ．

問 11. C^∞ 級多様体 M, N に対し，直積空間 $M\times N$ もまた自然に C^∞ 級多様体となることを示せ．

問 12. 次の $\mathbb{R}^2$ の相対位相による位相空間 X は多様体の構造を持たないことを示せ．

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}.$$

問 13. $\mathbb{R}$ に，$\mathbb{R}$ に含まれない点 $0'$ を付け加えて得られる集合を $M=\mathbb{R}\sqcup\{0'\}$ とする．ここで $U_{a,b}=\{0'\}\cup(a,0)\cup(0,b)\subset M$（$a<0<b$ であり，$(a,0)$, $(0,b)$ は開区間）とする．このとき，M に $\mathbb{R}$ の位相と $\{U_{a,b}\}_{a,b}$ で生成される位相を入れて位相空間と思う．

(1) 任意の $x\in M$ に対し，開区間と同相な開近傍が存在することを示せ．

(2) M は Hausdorff 空間でないことを示せ．

C^∞ 級写像

問 14. C^∞ 級多様体 M の開部分集合 $U \subset M$ は自然に C^∞ 級多様体となることを示せ．さらに，包含写像 $U \to M$ は C^∞ 級写像となることを示せ．

問 15. C^∞ 級多様体 L, M, N と C^∞ 級写像 $f\colon L \to M$, $g\colon M \to N$ に対し，合成写像 $g \circ f\colon L \to N$ も C^∞ 級写像となることを示せ．

問 16. 関数 $p_i\colon S^2 \to \mathbb{R}$ を $p_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ で定めるとき，各局所座標による p_i の局所座標表示を求めて，p_i は C^∞ 級関数であることを示せ．

問 17. 問 7 で考えた通常とは異なる C^∞ 級多様体構造 $(\mathbb{R}, \phi)$ を与えた $\mathbb{R}$ を M とする．このとき，通常の $\mathbb{R}$ と M は微分同相であることを示せ．

問 18. 円周 $S^1 = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対し，写像 $f\colon S^1 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ を $((x, y), t) = (tx, ty)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $S^1 \times (0, \infty)$ の座標近傍系を具体的に与えて C^∞ 級多様体となることを示せ．

(2) f の局所座標表示を求めて f は C^∞ 級写像であることを示せ．

(3) f の各点での局所座標による Jacobi 行列を求めよ．

(4) f の像を求めよ．

(5) f は像との間の微分同相写像を与えることを示せ．

問 19. C^∞ 級多様体 M, N に対し，次のような性質を満たす C^∞ 級多様体 L および C^∞ 級写像 $p\colon L \to M$, $q\colon L \to N$ が存在することを示せ．また，このような L は微分同相なものを除いてただ一つであることを示せ：任意の C^∞ 級写像 $f\colon K \to M$, $g\colon K \to N$ に対し，ただ一つの C^∞ 級写像 $h\colon K \to L$ が存在して，$f = p \circ h$ および $g = q \circ h$ をみたす．

<u>接ベクトル</u>

問 20. C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級の曲線 $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ を考える．このとき，$c(0)$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 f に対して以下で定まる対応 $\frac{dc}{dt}\big|_{t=0}$ は M の $c(0)$ における接ベクトルを与えることを示せ（c の $t = 0$ における**速度ベクトル**という）：

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f) = \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}$$

問 21. C^∞ 級多様体 M の点 $p \in M$ における接ベクトル $v \in T_pM$ を任意にとる．このとき C^∞ 級曲線 $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ であって，$\frac{dc}{dt}\big|_{t=0} = v$ となるものが存在することを示せ．

問 22. 次の S^2 上の曲線 $c\colon \mathbb{R} \to S^2$ を考える：

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

(1) $t \in \mathbb{R}$ における速度ベクトルを $\frac{dc}{dt}\big|_t$ を問 2 で考えた座標近傍 $(U_1^\pm, \varphi_1^\pm), (U_2^\pm, \varphi_2^\pm)$ から定まる基底の一次結合で表せ．

(2) $p_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ で定まる関数 $p_i\colon S^2 \to \mathbb{R}$ の $t \in \mathbb{R}$ における微分 $\frac{dc}{dt}\big|_t (p_i)$ を求めよ．

問 23. n 次元 C^∞ 級多様体 M に対し，

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

とおき，$\pi\colon TM \to M$ を $v \in T_p M$ のとき $\pi(v) = p$ なる写像とする．M の各座標近傍 $(U, \varphi\colon U \to V)$ に対し $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n$ を $\Phi(v) = (\varphi(\pi(v)); dx_1(v), \ldots, dx_n(v))$ で定める．ただし $dx_i\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ は次で定まる関数とする．

$$v = dx_1(v)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n(v)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

このとき，ふたつの座標近傍 $(U, \varphi), (U', \varphi')$ に対し，$\Phi' \circ \Phi^{-1}\colon \varphi(U \cap U') \times \mathbb{R}^n \to \varphi'(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ が定義できて，C^∞ 級写像であることを示せ.（このことを用いると TM に適当な位相が入って C^∞ 級多様体となることが示せる．TM を M の**接束**という.）

問 24. C^∞ 級多様体 M の点 $p \in M$ の開近傍で定義された C^∞ 級実数値関数の全体を $\mathcal{S}_p$ とおく．$\mathcal{S}_p$ の元 $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}$ と $f_2\colon U_2 \to \mathbb{R}$ が同値であるとは，p の開近傍 $V \subset U_1 \cap U_2$ が存在して $f_1|_V = f_2|_V$ となることとする．

(1) $\mathcal{S}_p$ のこの同値関係による商集合 C_p^∞（p における C^∞ 級関数の茎（stalk）という）には自然に可換環（できれば $\mathbb{R}$ 上の可換代数）の構造が入ることを示せ．

(2) 接ベクトル $v \in T_p M$ を与えることと，次を満たす $\mathbb{R}$-線形写像 $v\colon C_p^\infty \to \mathbb{R}$ を与えることは同値であることを示せ：

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \qquad (\forall f, g \in C_p^\infty).$$

<u>写像の微分</u>

問 25. M, N を C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，M 上の C^∞ 級曲線 $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ に対し，次の等式を示せ．

$$(df)_{c(0)} \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}$$

問 26. $c(t) = (\cos t, \sin t)$ で定まる C^∞ 級曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の点 $t \in \mathbb{R}$ における微分 $(dc)_t$ の行列表示を与えよ．

問 27. 複素平面 $\mathbb{C}$ に座標 $x + iy \mapsto (x, y)$ を入れて 2 次元 C^∞ 級多様体と思う．このとき正則関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し，各 $z_0 \in \mathbb{C}$ における微分 $(df)_{z_0}$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ に関する行列表示（表現行列）を求めよ．

問 28. M, N を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．点 p での微分の階数が $\mathrm{rank}(df)_p = r$ ならば，p の近傍 V が存在して，任意の $q \in V$ に対し $\mathrm{rank}(df)_q \geq r$ となることを示せ．

<u>陰関数定理</u>

問 29. 次の定理を以下の手順に従って証明せよ．「$(n+k)$ 次元 C^∞ 級多様体 M と n 次元 C^∞ 級多様体 N の間の C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ と点 $p \in M$ に対し，微分 $(df)_p$ が全射ならば，p の開近傍 W が存在して，$f^{-1}(f(p)) \cap W \subset M$ は k 次元 C^∞ 級部分多様体である．」

(1) p における f の Jacobi 行列が

$$\begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix}$$

となる（I_n は n 次の単位行列）ような p の座標近傍 (U, φ) および $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) が存在することを示せ（線形代数の内容を思い出すとよい）.

(2) (1) のような座標近傍 (U, φ)，(V, ψ) に対し，

$$F(x_1, \ldots, x_{n+k}) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_{n+k}), x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$$

の $\varphi(p)$ における Jacobi 行列を求めよ.

(3) 逆関数定理を用いて，$\varphi(p)$ の近傍 $W' \subset \mathbb{R}^{n+k}$ と $((\psi \circ f)(p), 0, \ldots, 0)$ の近傍 $V' \subset \mathbb{R}^{n+k}$ の間の C^∞ 級微分同相写像 $\Phi \colon V' \to W'$ であって，$\Phi(((\psi \circ f)(p) \times \mathbb{R}^k) \cap V') = \varphi^{-1}(f^{-1}(f(p)) \cap W)$ となるものが存在することを示せ.

問 30. $f \colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級多様体 M からの C^∞ 級関数とする．このとき，$(df)_p \colon T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ が全射ならば，p の開近傍 U が存在して $W = f^{-1}(f(p)) \cap U$ は M の C^∞ 級部分多様体となるが，包含写像 $i \colon W \to M$ から誘導される写像 $(di)_p \colon T_pW \to T_pM$ の像は $\ker(df)_p$ に一致することを示せ.

問 31. $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の C^∞ 級部分多様体であることを，関数 $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ の微分を調べることにより示せ．また，問 30 の主張を用いて各 $p \in S^n$ で包含写像から誘導される $T_pS^n \to T_p\mathbb{R}^{n+1}$ の像を求めよ.

問 32. $\epsilon \in \mathbb{R}$ と多項式 $p(x, y) = x^2 - y^2$ に対し，集合 $M_\epsilon = p^{-1}(\epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ の概形を描け．また，M_ϵ が C^∞ 級部分多様体となるかを Jacobi 行列の計算から論じ，部分多様体とならないときはそのことを証明せよ.

問 33. $\epsilon \in \mathbb{R}$ と多項式 $p(x, y) = y^2 - x^3 + 3x$ に対し，$M_\epsilon = p^{-1}(\epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ の概形を描け．また，M_ϵ が C^∞ 級部分多様体となるかを Jacobi 行列の計算から論じ，部分多様体とならないときはそのことを証明せよ.

はめ込みと埋め込み

問 34. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ で定まる写像 $g \colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ と問 2 の座標近傍系について，次の問いに答えよ.

(1) g の局所座標表示を求め，C^∞ 級写像であることを示せ.

(2) 問 2 の座標近傍系に属する各座標近傍に関して，$(dg)_p(\frac{\partial}{\partial y_1})_p, (dg)_p(\frac{\partial}{\partial y_2})_p$ を求めよ.

(3) $\ker(dg)_p$ の次元を求めよ．また，f ははめ込みとなっているか答えよ.

問 35. 包含写像 $h \colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) h は C^∞ 級写像であることを示せ.

(2) h は埋め込みであることを示せ.

問 36. 次の曲線 $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ははめ込み，埋め込みとなるか？各点での速度ベクトルを求め，その結果を用いて答えよ．また，曲線の概形を描け.

(1) $c(t) = (t, t^2)$　　(2) $c(t) = (\cos t, \sin t)$　　(3) $c(t) = (t^2, t^3)$

問 37. $\alpha \in \mathbb{R}$ を無理数とし，$t \mapsto (t, \alpha t)$ で定まる写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ と射影 $\mathbb{R}^2 \to T^2$ を合成して得られる写像を $f\colon \mathbb{R} \to T^2$ とおく．このとき，f は単射かつはめ込みだが，埋め込みではないことを示せ．

問 38. 位相空間の間の連続写像 $f\colon M \to N$ が**固有**（proper）であるとは，任意のコンパクト部分集合 $K \subset N$ に対し，$f^{-1}(K)$ がコンパクトとなることである．また，C^∞ 級写像が**沈め込み**（submersion）であるとは各点での微分が全射となることである．C^∞ 級多様体の間の C^∞ 級沈め込み $f\colon M \to N$ が固有であるとする．このとき任意の $q \in N$ に対し，q の開近傍 U が存在して $f^{-1}(U)$ は $U \times f^{-1}(\{q\})$ と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

部分多様体

問 39. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ は $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ の C^∞ 級部分多様体であることを，定義を確認することにより示せ．

多様体の局所的な操作と張り合わせ

問 40. M を C^∞ 級多様体，$U \subset M$ を開集合とし，$p \in U$ とする．このとき，C^∞ 級関数 $h\colon M \to \mathbb{R}$ であって，次の 2 つの条件を満たすものが存在することを示せ．

(i) h の取る値は 0 以上 1 以下．また，h は p の近傍で 1 となる．

(ii) $\mathrm{supp}(h)$ を h の値が 0 でないような点の集合の閉包とするとき，$\mathrm{supp}(h) \subset U$．

また，このことを用いて相異なる有限個の点 $p_1, \ldots, p_n \in M$ と実数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対し，$f(p_i) = a_i$ となる C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

問 41. M を σ-コンパクトな C^∞ 級多様体，$\{U_i\}_{i \in I}$ を M の開被覆とするとき，次のような C^∞ 級関数の族 $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty$ が存在することを示せ．

(1) 各 ρ_j は M の各点で 0 以上 1 以下の値をとる．

(2) $\{\mathrm{supp}(\rho_j)\}_{j=1}^\infty$ は局所有限な M の被覆で，各 j に対し $\mathrm{supp}(\rho_j) \subset U_i$ なる $i \in I$ が存在．

(3) 各点 $p \in M$ で $\sum_{j=1}^\infty \rho_j(p) = 1$．

ベクトル場

問 42. M を C^∞ 級多様体とするとき，M 上の C^∞ 級ベクトル場であって，少なくとも 1 点では 0 ではないものが存在することを示せ．

問 43. X を C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．

(1) 点 $p \in M$ を含む二つの座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$，$(V; y_1, \ldots, y_m)$ があるとき，各 $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を $(\frac{\partial}{\partial y_j})_p$ たちの一次結合で表せ．

(2) X の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ に関する局所座標表示が与えられたとき，座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_m)$ に関する X の局所座標表示を求めよ．

問 44. S^2 上の時刻 $t=0$ で点 $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ を通る緯線方向の円周

$$c_{p_0}(t)=(r_0\cos(t+\theta_0),r_0\sin(t+\theta_0),z_0)$$

を考える．ここで $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，$x_0=r_0\cos\theta_0$, $y_0=r_0\sin\theta_0$．また，接ベクトル X_{p_0} を c_{p_0} の時刻 $t=0$ における速度ベクトルとする．

(1) 各点 p に対し，$X_p\in T_pS^2$ を問 2 の座標近傍に関する $(\frac{\partial}{\partial y_1})_p,(\frac{\partial}{\partial y_2})_p$ の一次結合で表せ．

(2) X は S^2 上の C^∞ 級ベクトル場であることを示せ．

(3) $X_p=0$ となる $p\in M$ をすべて求めよ．

問 45. X,Y を C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．X,Y の座標近傍 $(U;x_1,\ldots,x_m)$ に関する局所座標表示が与えられたとき，かっこ積（**Lie 括弧** (Lie bracket) ともいう）$[X,Y]$ の局所座標表示を求めよ．

積分曲線と 1 パラメーター変換群

問 46. $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場 X を次で定める．

$$X_p=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p.$$

(1) $c(0)=p_0=(x_0,y_0)$ となる X の極大積分曲線 c を求めよ．

(2) X に対応する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を求めよ（X を無限小変換 (infinitesimal transformation) とする 1 パラメーター変換群という）．

問 47. $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上の C^∞ 級ベクトル場

$$X=\frac{\partial}{\partial x_2}$$

は完備ではないことを示し，各点を始点とする極大積分曲線を求めよ．

問 48. $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上の C^∞ 級ベクトル場

$$X=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

は完備であることを示し，対応する 1 パラメーター変換群を求めよ．

問 49. 問 44 で与えた S^2 上の C^∞ 級ベクトル場 X は完備であることを示せ．また，対応する 1 パラメーター変換群を求めよ．

問 50. M をコンパクトな C^∞ 級多様体とし，$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を t についても C^∞ 級な M 上の C^∞ 級ベクトル場の族とする．このとき，C^∞ 級写像 $\varphi\colon\mathbb{R}\times M\to M$ が存在して，次の 2 条件を満たすことを示せ．

(i) 任意の $p\in M$ に対し，$\varphi(0,p)=p$,

(ii) C^∞ 級曲線 $t\mapsto\varphi(t,p)$ の速度ベクトルは $(X_t)_{\varphi_t(p)}$.

Riemann 計量

問 51. (M, g) を Riemann 多様体，$f\colon N \to M$ を C^∞ 級はめ込みとする．このとき，2 次線形形式 $f^*g\colon T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ を

$$(f^*g)(X, Y) = ((df)_pX, (df)_pY)$$

で定める．このとき，f^*g の局所座標表示を求め，f^*g が C^∞ 級であることと，Riemann 計量となっていることを確認せよ．

問 52. 問 51 のようにして S^2 の Riemann 計量を $\mathbb{R}^3$ の標準的な Riemann 計量から誘導する．このとき，問 2 の座標近傍系に関する Riemann 計量の局所座標表示を求めよ．

問 53. $f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級関数とし，g を M 上の Riemann 計量とする．各 $p \in M$ に対し，$(\mathrm{grad}\, f)_p \in T_pM$ を

$$X(f) = g((\mathrm{grad}\, f)_p, X)$$

が任意の $X \in T_pM$ について成り立つものとして特徴づける．

(1) この条件により $(\mathrm{grad}\, f)_p$ がただ一つに定まることを示せ．

(2) f と g の局所座標表示から $\mathrm{grad}\, f$ の局所座標表示を求め，$\mathrm{grad}\, f$ は C^∞ 級ベクトル場であることを示せ（$\mathrm{grad}\, f$ を**勾配** (gradient) という）．ただし，g の局所座標表示が $\sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ のとき，行列 (g_{ij}) の逆行列を (h_{ij}) と表してよい．

(3) $(df)_p = 0$ と $(\mathrm{grad}\, f)_p = 0$ は同値であることを示せ．

問 54. M 上の Riemann 計量 g_0, g_1 が与えられたとき，各点で 0 以上 1 以下の値を取る C^∞ 級関数 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ に対し，g_ϕ を

$$g_\phi(X, Y) = (1 - \phi(p))g_0(X, Y) + \phi(p)g_1(X, Y)$$

で定める（$X, Y \in T_pM$）．このとき，g_ϕ は M 上の Riemann 計量であることを示せ．

問 55. M を σ-コンパクトな C^∞ 級多様体とする．このとき，M 上の Riemann 計量が存在することを示せ．

問 56. (M, g) を連結な Riemann 多様体とする．曲線 $c\colon [a, b] \to M$ が**区分的 (piecewise)** C^∞ 級とは，c は連続であって，分割 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ が存在して，各 $[a_{i-1}, a_i]$ 上で c が C^∞ 級となること．またこのとき，

$$L(c) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

によって長さ $L(c)$ を定義し，関数 $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ は } p \text{ と } q \text{ を結ぶ区分的 } C^\infty \text{級曲線}\}$$

(1) M の任意の 2 点は区分的 C^∞ 級曲線で結べることを示せ．

(2) d は距離の公理を満たすことを示せ．

射影空間

問 57. 射影 $\pi\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ の点 $p \in S^n$ での Jacobi 行列を適当な座標近傍に関して求めよ．

問 58. $(n+1)$ 次実正則行列 A をかける作用 $x \mapsto Ax$（x は成分に $(x_0, \dots, x_n)$ をもつ列ベクトル）は C^∞ 級微分同相写像 $f_A\colon \mathbb{R}P^n \mapsto \mathbb{R}P^n$ を誘導することを示せ（A による**射影変換**という）．

問 59. 次で定義される複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 上の関数 $f\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}$ について考える．

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = \frac{|z_0|^2 + 2|z_1|^2 + 3|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}$$

(1) f は well-defined で，C^∞ 級関数となることを示せ．

(2) $(df)_p = 0$ となる点 $p \in \mathbb{C}P^2$ をすべて求めよ．

問 60. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に次で生成される同値関係 $\sim$ を考える．

$$(x, y) \sim (x + 1, -y)$$

このとき，商空間 $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\sim$ を**開いた Möbius の帯**（open Möbius band）という．

(1) M は自然に C^∞ 級多様体となることを示せ．

(2) 実射影平面から 1 点を除いて得られる $\mathbb{R}P^2 - [0 : 0 : 1]$ は M と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

問 61. 写像 $f\colon \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2$ を $f[x_0, x_1] = [x_0, x_1, 0]$ と定義したい．次の問いに答えよ．

(1) f は well-defined であることを示せ．

(2) f の局所座標表示を与え，C^∞ 級写像となることを示せ．

(3) f の各点での Jacobi 行列を計算し，埋め込みとなることを示せ．

問 62. $M = \{\ell \in \mathbb{R}P^3 \mid \ell は \mathbb{R}^3 に含まれる\}$ は $\mathbb{R}P^3$ の C^∞ 級部分多様体であることを，定義を確認することにより示せ．

問 63. 2 変数複素関数 $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を $f(z_1, z_2) = z_1^3 + z_2^3 + 1$ で定める．

(1) 局所座標 $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$ を $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ とし，同様に $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ を $\psi(x + iy) = (x, y)$ で与える．このとき，局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ を求めよ．

(2) 各点での Jacobi 行列を前問の局所座標系について求めよ．

(3) $0 \in \mathbb{C}$ は f の正則値であることを示せ．

問 64. $M_3 = \{(z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}P^2 \mid z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$ は $\mathbb{C}P^2$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

Lie 群

問 65. n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ をその成分により $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．このとき，正則行列の全体 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ は C^∞ 級多様体になることを示し，積を取る写像および逆行列を取る写像は C^∞ 級写像となることを示せ（このように，積と逆元を取る写像が C^∞ 級写像であるような群構造をもつ C^∞ 級多様体を **Lie** 群という）．

問 66. $I_n \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は単位行列とする．$T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を n 次正方行列全体 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ と自然に同一視して，以下の問いに答えよ．

(1) 行列の積を与える写像 $m\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に対し，$(dm)_{(I_n,I_n)}\colon \mathrm{M}(n,\mathbb{R})\oplus\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ を求めよ．

(2) 逆行列を与える写像 $i\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に対し，$(di)_{I_n}\colon \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ を求めよ．

(3) 転置行列を与える写像 $t\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に対し，$(dt)_{I_n}\colon \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ を求めよ．

(4) $\det\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し，$(d\det)_{I_n}\colon \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を求めよ．

問 67. 次の問いに答えよ．

(1) 行列式が 1 である実 n 次正方行列の全体 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の n^2-1 次元部分多様体であることを示し，$T_{I_n}\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ はトレースが 0 の n 次正方行列全体と同一視できることを示せ．

(2) n 次直交行列の全体 $\mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元部分多様体であることを示し，$T_{I_n}\mathrm{O}(n)$ は n 次歪対称行列全体と同一視できることを示せ．

問 68. n 次実一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ の開部分多様体であるので，各点 $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の接空間に対し，自然な同型 $T_g\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ があることに注意せよ．行列 $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対し，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上のベクトル場 A_* を行列の積

$$(A_*)_g = gA \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \cong T_g\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

により与える．このとき，A_* に対応する 1 パラメーター変換群は $(t,g) \mapsto g\exp tA$ で与えられることを示せ．ここで $\exp tA$ は行列の指数関数

$$\exp tA = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(tA)^i.$$