2019年度幾何学II　演習問題2　　2019年10月9日

位相空間 X, Y の間の連続写像 $f, g\colon X \to Y$ に対し，$F\colon X \times [0,1] \to Y$ が f から g への**ホモトピー**であるとは，F は連続写像であって，任意の $x \in X$ に対し $F(x,0) = f(x)$ かつ $F(x,1) = g(x)$ となること．

例題.

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とする．このとき，恒等写像 $f\colon D^2 \to D^2$ から原点に値をとる定値写像 $f\colon D^2 \to D^2$ へのホモトピーを与えよ．

解答例. $F\colon D^2 \times [0,1] \to D^2$ を次で定義する．

$$F(x,y,t) = ((1-t)x, (1-t)y)$$

各成分が連続関数なのでこれは連続写像．そして

$$F(x,y,0) = (x,y) = f(x,y), \quad F(x,y,1) = (0,0) = g(x,y)$$

なので，F は f から g へのホモトピー．

問 1. 次の関数 f から g へのホモトピーを与えよ．$\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であることは用いてもよい．

(1) $X \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$f\colon X \to \mathbb{R}^3$ は $f(x,t) = (x,0)$ で定め，$g\colon X \to \mathbb{R}^3$ は $g(x,t) = (x,1)$ で定める．

(2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対し，$f\colon S^1 \to S^1$ は恒等写像とし，$g\colon S^1 \to S^1$ は $g(x,y) = (-x,-y)$ で定める（ヒント：回転行列）．

連続写像 $f, g\colon X \to Y$ が**ホモトピック**（または**ホモトープ**）であるとは，f から g へのホモトピーが存在すること．ふたつの写像が「ホモトピックである」という関係は同値関係であることが知られている．

例題. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は f 自身にホモトピックである（反射律）．

解答例. $F\colon X \times [0,1] \to Y$ を $F(x,t) = f(x)$ で定めると，F は第 1 成分への射影と連続写像 f の合成なので連続．さらに任意の $x \in X$ に対し，$F(x,0) = F(x,1) = f(x)$ なので，F は f から f へのホモトピー．ゆえに，f は f にホモトピック．

位相空間 X, Y の**ホモトピー型が等しい**（または**ホモトピー同値**）とは，連続写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ であって，$g \circ f$ が X の恒等写像，$f \circ g$ が Y の恒等写像とそれぞれホモトピックになるようなものが存在すること．

特に「ホモトピック」の反射律から，同相な位相空間のホモトピー型は等しい．

例題.

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

とするとき，S^1 と A のホモトピー型が等しいことを示せ．

解答例. $f\colon S^1 \to A$ を包含写像，$g\colon A \to S^1$ を $g(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ で定める．$g(x,y) \in S^1$ であることは

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

からわかる．f は包含写像なので連続，$(x,y) \in A$ ならば $x^2 + y^2 > 0$ なので g の各成分は連続関数となる（$x \mapsto \frac{1}{x}$ で定まる $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が連続であることを使っている）．

$(x,y) \in S^1$ に対し，

$$(g \circ f)(x,y) = g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (x,y)$$

となり，$g \circ f$ は S^1 の恒等写像に等しい.「ホモトピック」という関係の反射律から，$g \circ f$ は恒等写像にホモトピック.

また，$(x,y,t) \in A \times [0,1]$ に対し，

$$F(x,y,t) = (1-t)(g \circ f)(x,y) + t(x,y)$$

とおくと，$F(x,y,t)$ は点 $(g \circ f)(x,y)$ と点 (x,y) を結ぶ線分（A に含まれる）を $1-t : t$ の長さの比で分ける点なので，$F(x,y,t) \in A$ である．また，$g \circ f$ が連続であることから，F も連続である．さらに，

$$F(x,y,0) = (g \circ f)(x,y), \quad F(x,y,1) = (x,y)$$

なので，F は $g \circ f$ から A の恒等写像へのホモトピーである．したがって，$g \circ f$ は A の恒等写像にホモトピック.

以上から，S^1 と A のホモトピー型は等しい.

問 2. 一点集合 $P = \{p\}$ と D^2 のホモトピー型が等しいことを示せ（ヒント：表の例題）.

問 3. （★）$A \subset \mathbb{R}^2$ に対し，

$$CA = \{((1-t)a, (1-t)b, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t \leq 1, (a,b) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$$

を A の錐（cone）という．CA は一点とホモトピー型が等しいことを示せ.