2019 年度幾何学 II　演習問題 1　　2019 年 10 月 2 日

例題. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ からの写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$f(x,y) = (x^2, 2x+y)$$

f は連続写像であることを示せ．ただし，次のことは用いてよい．

- 写像 $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ が連続であるための必要十分条件は，それぞれの成分への射影 $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(p_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i)$ との合成写像 $p_i \circ g$ が連続となることである．
- $a(x,y) = x+y$ で定まる $a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続．
- $m(x,y) = xy$ で定まる $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続．
- $d(x) = (x,x)$ で定まる $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は連続．
- 包含写像は連続．
- 定数関数は連続．
- 連続写像と連続写像の合成は連続．

解答例. $(p_1 \circ f)(x,y) = x^2$ および $(p_2 \circ f)(x,y) = x+y$ が連続であることを示せばよい．

$$(m \circ d \circ p_1)(x,y) = m(d(p(x,y))) = m(d(x)) = m(x,x) = x^2$$

なので，$p_1 \circ f$ は包含写像 $U \to \mathbb{R}^2$ と $m \circ d \circ p_1$ の合成写像となる．ゆえに，$p_1 \circ f$ は連続．

$h(x,y) = (2,x,y)$ で定まる写像 : $U \to \mathbb{R}^3$ は各成分が連続関数なので連続写像．また，$m'(a,b,c) = (ab,c) = (m(a,b),c)$ も各成分が連続関数なので連続写像．

$$(a \circ m' \circ h)(x,y) = a(m'(h(x,y))) = a(m'(2,x,y)) = a(2x,y) = 2x+y$$

なので，$p_2 \circ f = a \circ m' \circ h$ となり，$p_2 \circ f$ は連続．

以上から，f は連続写像である．

コメント. 連続性は定義（ϵ-δ 論法や「開集合の逆像が開集合」という条件）を直接確認しても証明できる．しかし，複雑な写像を扱うときはそのやり方で証明するのは大変なことがある．上のように連続性を知っている写像の合成として書いて確認すると楽になることも多い．

問 1. 以下の (1),(2),(3) の関数 f が連続であることを示せ．ただし，上に箇条書きした事実と次に記すことは用いてよい．

- $s(x) = \sqrt{x}$ で定まる関数 $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続．
- 連続写像 $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ からの連続写像 $h\colon V \to \mathbb{R}^m$ に対し，$g(U) \subset V$ ならば，$h \circ g$ は連続．

(1) 実数の定数 $a,b \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = ax+b$ で定まる $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$．

(2) $f(x,y) = x^2+y^2$ で定まる $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$．

(3) $f(x_1,y_1,x_2,y_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y^2)^2}$ で定まる $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$．

コンパクト性を持つ空間は様々な良い性質を持つことが知られている．次の定理は Euclid 空間のコンパクト部分集合を特徴づける重要な定理である．

Heine–Borel の定理

部分集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトであるための必要十分条件は，K が有界閉集合となることである．

部分集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ が**有界**であるとは，適当な $R > 0$ に対し，原点を中心とする半径 $R > 0$ の開球 B が $K \subset B$ を満たすこと．

例題. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 K（長方形）がコンパクトであることを示せ．

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

ただし，表の事実と以下の事実は用いてもよい．

- $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ が連続ならば，任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ の逆像は閉集合．
- $a < b$ のとき，$\{a\}, [a, b], [a, \infty), (-\infty, b] \subset \mathbb{R}$ は閉集合．
- 閉集合と閉集合の共通部分は閉集合．

解答例. 射影 $p_1, p_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である．

$$p_1^{-1}([0, 2]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad p_2^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

は $\mathbb{R}$ の閉集合 $[0, 2], [0, 1]$ の連続写像による逆像なので閉集合である．その共通部分 $K = p_1^{-1}([0, 2]) \cap p_2^{-1}([0, 1])$ も閉集合である．

また，$(x, y) \in K$ ならば

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 3$$

なので，$B \subset \mathbb{R}^2$ を原点を中心とする半径 3 の開球（開円板）とすると，$K \subset B$ となる．

以上から K は $\mathbb{R}^2$ の有界な閉部分集合であることが分かったので，Heine–Borel の定理から，K はコンパクトである．

問 2. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合がコンパクトであることを示せ．

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$（単位円板）．

(2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$（単位円周）．

(3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$（アニュラス）．

(4) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$（直角二等辺三角形）．

問 3. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$（$x$ 軸）はコンパクトでないことを示せ．

問 4. （★）写像 $f\colon [0, 2\pi) \to C$（C は上記の単位円周）を $f(x) = (\cos x, \sin x)$ で定めると，$\cos, \sin$ が連続関数であることから，連続写像となる．また，全単射である．しかし同相写像ではない．f が同相写像ではないことを証明せよ．