Higher homotopy normalities in topological groups

蔦谷 充伸　（九州大学）

トポロジーシンポジウム

2023 年 8 月 13 日

Contents

1. なぜ高次のものを考えるのか
2. A_n-写像と高次ホモトピー可換性
3. 高次ホモトピー正規性

この講演の主な結果は正規部分群の高次ホモトピー版である $N_k(\ell)$-写像を定義したこと，その特徴付けをファイバーワイズホモトピー論を用いて自然に行うことができたこと，具体例をいくつか計算できたこと，である．

なぜ高次のものを考えるのか

ホモトピーとは

- 位相空間 X, Y の間の連続写像 $f, g\colon X \to Y$ が**ホモトピック**（$f \simeq g$ と書く）とは，連続写像 $H\colon [0,1] \times X \to Y$ であって，任意の $x \in X$ に対し $H(0,x) = f(x)$，$H(1,y) = g(x)$ となるものが存在すること（この H を f から g への**ホモトピー**という）.
  - ホモトピックであることは写像の間の同値関係である.

「イコール」を「ホモトピック」で置き換える

- ホモトピックな写像のホモロジー群などへの誘導準同型は等しい（ホモトピー不変性）．
- 「イコール」に関する条件を「ホモトピック」に取り替えたものを定義して何が起こるかを知りたい．
- 位相空間 X と Y がホモトピー同値であるとは，写像（連続写像のことだが以下「連続」は略す）$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ が存在して，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ となること．
  - 同相写像の定義では $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ であったところを，$=$ を $\simeq$ に弱めていることに相当する．
  - 特にこのときホモロジー群への誘導準同型 f_*, g_* は互いに逆写像であるような同型写像．つまり，ホモトピー同値な空間のホモロジー群は同型．

$$H_*(X) \cong H_*(Y).$$

二項演算の性質の「イコール」を「ホモトピック」で置き換える

- 空間 X 上の二項演算 $m\colon X \times X \to X$ と基点 $* \in X$ について，以下の条件を考える．
  - $* \in X$ がホモトピー単位元とは，$x \mapsto m(x, *)$，$x \mapsto m(*, x)$ で定義される $X \to X$ が恒等写像とホモトピックとなること．
  - m がホモトピー結合的とは，写像 $X \times X \times X \to X$ として $m(m \times \mathrm{id}_X) \simeq m(\mathrm{id}_X \times m)$ となること．
- ホモトピー単位元を持つ二項演算との対 (X, m) を H-空間（または Hopf 空間）という．H-空間は Lie 群のホモトピー論との関係から詳しく調べられてきた．

結合的な二項演算とホモトピー結合的な二項演算

- ホモロジー群（などのホモトピー不変な対象）を通して見ると「真に結合的な二項演算」と「ホモトピー結合的な二項演算」は区別できない．これらの間に差はあるのだろうか？
  - ホモトピー結合的ですらない二項演算は八元数体の中の 7 次元球面 S^7 などの例が知られている．
  - ホモトピー結合的だが位相群とホモトピー同値にならない H-空間の例が知られている（Stasheff，1963）．

つまりこの導入で何が言いたいのか

- 条件をホモトピーレベルに緩めると本質的に弱い条件となってしまう．その差を埋める方向性の一つとして，高次ホモトピーを考えるというアイデアがある．
    - 実際，Stasheff の結果はホモトピー結合性の高次版である高次ホモトピー結合性に着目することで得られている．
    - 高次ホモトピーレベルで考えると何ができて，何ができないのか明らかにしたいということが本研究の動機の一つである．

A_n-写像と高次ホモトピー可換性

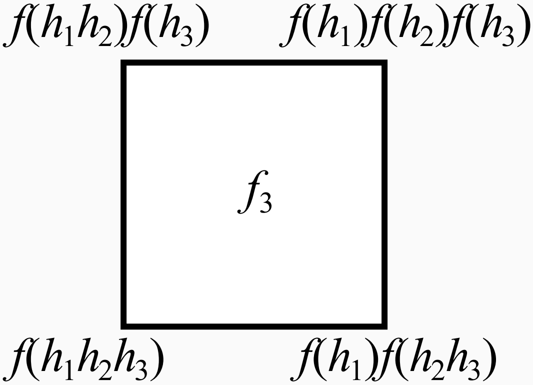
準同型を up to homotopy にする

- X, Y を H-空間とするとき写像 $f\colon X \to Y$ が H-写像（A_2-写像）であるとは，写像 $X \times X \to Y$ として $fm \simeq m(f \times f)$ が成り立つこと．
  - 準同型の条件式 $fm = m(f \times f)$ の $=$ を $\simeq$ に取り替えたものである．
- この条件の高次ホモトピー版が Sugawara（1960），Stasheff（1963）により考えられている（次ページ）．

H-写像の高次ホモトピー版，A_3-写像

- 位相モノイドの間の基点を保つ写像 $f\colon H \to G$ が A_3-写像であるとは次の条件を満たす写像 $f_2\colon [0,1] \times H^2 \to G$ と $f_3\colon [0,1]^2 \times H^3 \to G$ が存在すること．
  1. 任意の $h_1, h_2 \in H$ に対し $f_2(0; h_1, h_2) = f(h_1 h_2)$，$f_2(1; h_1, h_2) = f(h_1)f(h_2)$.
  2. 任意の $h_1, h_2, h_3 \in H$ に対し

     $f_3(0, t_2; h_1, h_2, h_3) = f_2(t_2; h_1 h_2, h_3)$,
     $f_3(1, t_2; h_1, h_2, h_3) = f(h_1) f_2(t_2; h_2, h_3)$,
     $f_3(t_1, 0; h_1, h_2, h_3) = f_2(t_1; h_1, h_2 h_3)$,
     $f_3(t_1, 1; h_1, h_2, h_3) = f_2(t_1; h_1, h_2) f(h_3)$.
- $\{f_i\}_{i=1,2,3}$（$f_1 = f$）をこの A_3-写像の A_3-形式という．


$f(h_1h_2)f(h_3)$
$f(h_1)f(h_2)f(h_3)$
f_3
$f(h_1h_2h_3)$
$f(h_1)f(h_2h_3)$

A_n-写像

- 同様の条件の高次ホモトピー版として A_n-形式

$$\{f_i \colon [0,1]^{i-1} \times H^i \to G\}_{i=1}^n$$

が定義される（$n = 1, 2, \ldots, \infty$）.

  - A_n-形式との対 $(f, \{f_i\}_{i=1}^n)$ を A_n-写像という.
  - 実際には基点の振る舞いに関する条件も課すが詳細は略す.
  - 準同型写像は A_∞-写像である.
  - これは位相モノイドの間の写像の「二項演算の保ち具合」の話であり，先に触れた二項演算のホモトピー結合性の話とは少々違う．二項演算の高次ホモトピー結合性については Stasheff が A_n-空間を定義している（1963）が，詳細は略す.

A_n-同値

- $(f,\{f_i\}_i)\colon H \to G$ が A_n-写像であるとき，f がホモトピー同値写像ならば $(f,\{f_i\}_i)$ は A_n-同値写像といい，ある位相モノイドの間に A_n-同値写像が存在するとき，それらは A_n-同値であるという．
  - A_n-同値は CW 複体のホモトピー型を持つ位相モノイドの同値関係となる（もう少し広いクラスでもよい）．
  - A_n-同値だが A_{n+1}-同値でない位相モノイドは存在する（次の例）．
  - 例（T, 2012）：$k \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{G}(P_k)$ を $c_2(P_k)[S^4] = k$ となる S^4 上の主 SU(2)-束 P_k の自己同型群（ゲージ変換群）とするとき，$\mathcal{G}(P_{3^n})$ は $\mathcal{G}(P_0)$ に A_n-同値だが A_{n+1}-同値ではない．

（高次）ホモトピー可換性

- H-空間 $X = (X, m)$ がホモトピー可換であるとは $(x, y) \mapsto m(x, y)$, $(x, y) \mapsto m(y, x)$ で定義される写像 $X \times X \to X$ がホモトピックとなること．
  - これらの写像が一致することが二項演算が可換であることに他ならない．
- X が位相モノイドであるとき，この条件は二項演算 $m\colon X \times X \to X$ が H-写像であることと同値．このことから，Sugawara（1960），McGibbon（1989）は次のようにして高次ホモトピー版を考えた．位相モノイド X が（Sugawara の意味で）C_n-空間であるとは，二項演算 $m\colon X \times X \to X$ が A_n-写像となること．

高次ホモトピー可換性についてはよい結果がある

- ホモトピー可換性については Hubbuck のトーラス定理（1969）など，様々な研究がされている．
  - Hubbuck のトーラス定理：連結有限 CW 複体のホモトピー型を持つホモトピー可換 H-空間はトーラスとホモトピー同値なものに限る．
- 各素数 p に関する p-局所化を考えると，可換性をもつ位相群はもう少し増える．例えば次の結果がある．
  - McGibbon（1984），Saumell（1995）：連結コンパクト Lie 群 G の有理コホモロジー環（奇数次の元で生成される外積代数となる）の生成元の最高次数を $2n-1$ とするとき，少数の例外を除いて G の p-局所化が C_k-空間となるための必要十分条件は $p > kn$ となること．
  - 例外については McGibbon（1984）と Kishimoto–Hasui–T.（2018）で解決されている．

高次ホモトピー正規性も気になるのはなぜか

- $H \subset G$ が Lie 群の閉正規部分群のとき，ホモトピーファイバー列
$$\cdots \to \Omega(G/H) \to H \to G \to G/H \to BH \to BG \to B(G/H)$$
がある．これは左に無限に延ばせるが，$\Omega(G/H)$ から左側はすべて高いホモトピー可換性のある積構造（二重ループ空間）を持つ．
  - ギリギリ可換性が保証できない $H \to G$ のあたりの障害理論が気になる．つまり正規部分群の高次ホモトピー版を記述すれば障害理論が得られるはずである．これが今回の研究の出発点である．

高次ホモトピー正規性

正規部分群の「イコール」を「ホモトピック」に取り替える？

- 位相群 G の部分群 $H \subset G$ が正規部分群であるとは，任意の $x \in H$ と $g \in G$ に対し $gxg^{-1} \in H$ となることであった．
  - この定義は H が G の部分集合であることを使っており，このままホモトピー版を作るのではなく，準同型写像 $H \to G$ の場合に拡張したもののホモトピー版を考えたい．

正規部分群の一般化 crossed module

- 位相群 G, H に対し準同型写像 $f\colon H \to G$ が crossed module であるとは，G の H への同型による作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ が与えられていて，次を満たすこと．
  - 任意の $x, h \in H$ に対し，$\rho(f(h))(x) = hxh^{-1}$ となる．
  - 任意の $x \in H$ と $g \in G$ に対し，$f(\rho(g)(x)) = gf(x)g^{-1}$ となる．
- つまり作用 ρ は H の H 自身への内部自己同型による作用を G に拡張したものであって，f を通じて G の内部自己同型とも整合的であることを要請している．
- $H \subset G$ が正規部分群のとき，$f\colon H \to G$ を包含写像，ρ を内部自己同型による作用とすれば条件を満たす．つまり正規部分群の包含写像 $H \subset G$ は crossed module である．

位相モノイドと A_n-写像の圏 $\mathcal{A}_n$

- crossed module の高次ホモトピー版を考えるために $\mathrm{Aut}(H)$ の高次ホモトピー版が欲しい．
- 適当な意味で位相モノイドを対象とし，それらの間の A_n-写像を射とする位相圏 $\mathcal{A}_n$ が構成される．
  - つまり各位相モノイド H, G に対し $\mathcal{A}_n(H, G)$ は H から G への A_n-写像のなす空間である．
  - そのような圏は講演者による構成がある（2016）．また，位相圏でなく高次圏を用いたモデルなど他のモデルもあり得る．
- これを用いれば簡単な言葉の置き換えで crossed module の高次ホモトピー版が定義できる（次ページ）．

$N_k(\ell)$-写像の定義

- 位相群 G に対し $\mathrm{conj}_G(g)$ は $g \in G$ による内部自己同型を表すとする.
- $\mathcal{A}_n(H, H)$ は位相モノイドとなる.
- 位相群 G, H に対し準同型写像 $f \colon H \to G$ が $N_k(\ell)$-写像であるとは，A_k-写像 $\rho \colon G \to \mathcal{A}_\ell(H, H)$ が与えられていて，次を満たすこと.
  - $\rho \circ f \colon H \to \mathcal{A}_\ell(H, H)$ は $\mathrm{conj}_H \colon H \to \mathcal{A}_\ell(H, H)$ と A_k-写像としてホモトピック.
  - f は H への作用 ρ と G への作用 conj_G に関して，“A_ℓ-写像による G の A_k-作用として同変”.

$N_k(\ell)$-写像はよい定義か？

- crossed module は自然に $N_\infty(\infty)$-写像である.
- 位相群 G が C_∞-空間であることと，単位群への写像 $G \to *$ が $N_\infty(\infty)$-写像であることは同値.
    - より一般に位相群 G が $C(k,\ell)$-空間（ある高次ホモトピー可換性，Kishimoto–Kono による）であることと，単位群への写像 $G \to *$ が $N_k(\ell)$-写像であることは同値.
    - これは位相群 G が可換であることと，単位群への写像 $G \to *$ が crossed module であることが同値であることの一般化.
- $N_1(1)$-写像はホモトピー正規写像と呼ばれる（McCarty，1964）.
- このように既存のいくつかの概念とは相性がよい.
- しかし，このような複雑な高次ホモトピーに関する条件が実際に確認できるのか？という大きな問題がある（「絵に描いた餅」では？）.

射影空間と A_n-写像の関係

- 位相モノイド G に対し n 次射影空間 B_nG が定義される（$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$）．これは次のような性質をもつ．
  - B_1G は G の被約懸垂 ΣG，$BG = B_\infty G$ は G の分類空間．
  - T. 2016：n 次射影空間は（適当な誘導写像が定まって）位相圏 $\mathcal{A}_n$ から基点付き空間の位相圏への連続関手を与える．
  - 次の自然な包含写像がある．

$$* = B_0G \subset B_1G \subset B_2G \subset \cdots \subset B_nG \subset B_{n+1}G \subset \cdots \subset \operatorname{colim}_n B_nG = BG$$

  - T. 2016：H, G が位相群のとき次の合成写像はホモトピー同値（つまり，A_n-写像は射影空間からの写像でコントロールできる）．

$$\mathcal{A}_n(H, G) \xrightarrow{B_n} \mathrm{Map}_*(B_nH, B_nG) \xrightarrow{\text{包含写像}} \mathrm{Map}_*(B_nH, BG)$$

  - $B_nS^0 = \mathbb{R}P^n$，$B_nS^1 = \mathbb{C}P^n$，$B_nS^3 = \mathbb{H}P^n$．

$N_k(\ell)$-写像のファイバーワイズホモトピーによる記述（主結果）

- $E_k G$ を普遍主 G-束 $EG \to BG$ を $B_k G$ 上に制限したものとする．
- すると，同伴束 $E_k G \times_{\mathrm{conj}} G$ はファイバーワイズ位相群（位相群束）である．
- 定理（T. 2023）
  位相群の間の準同型写像 $f\colon H \to G$ が $N_k(\ell)$-写像となるための必要十分条件は，ファイバーが H，底空間が $B_k G$ であるようなファイバーワイズ A_ℓ-空間 $E \to B_k G$ が存在して，f から誘導されるファイバーワイズ準同型 $E_k H \times_{\mathrm{conj}} H \to E_k G \times_{\mathrm{conj}} G$ が up to homotopy でファイバーワイズ A_ℓ-写像として E を “経由” すること．

主結果について

- ファイバーワイズホモトピー論を用いた特徴付けは，古典的な障害理論が適用しやすい．
- $$E_k H \times_{\mathrm{conj}} H \to E \to E_k G \times_{\mathrm{conj}} G$$
  のように E を経由することは，$N_k(\ell)$-写像の定義の一つ目，二つ目の条件と一つ目，二つ目の写像の存在がそれぞれ対応する．
- G と H を入れ替えた条件「ファイバーが G，底空間が $B_k H$ であるようなファイバーワイズ A_ℓ-空間を経由する」は常に成り立つ．
- $N_k(\ell)$ の k を下付き添え字にしたのは，k が底空間に対応するため．

商への積構造の誘導も出来るのか

- $H \subset G$ が閉正規部分群のとき，G/H も位相群になる．
- 準同型写像 $f\colon H \to G$ に対し，ホモトピー論的な商（ホモトピー商）は Borel 構成 $EH \times_f G$ である．
- 定理（T. 2023）
  位相群の準同型 $f\colon H \to G$ が $N_k(k)$-写像でかつ Borel 構成 $X = EH \times_f G$ に対し LS カテゴリーの評価 $\mathrm{cat}\, X \leq k$ が成り立つとき，X は H-空間の構造を持つ（つまりホモトピー単位元を持つ連続な二項演算を持つ）．
  - ただし，この積構造が自然なものかどうかは今のところわからない．
  - LS カテゴリーが出てくるのは，射影空間と LS カテゴリーの間に深い関係があるため（cf. Iwase による Ganea 予想の反例，1998）．

例：SU(n) の包含写像の p-局所化の正規性

- 定理（T. 2023）
  包含写像の p-局所化 $f\colon \mathrm{SU}(m)_{(p)} \to \mathrm{SU}(n)_{(p)}$（$2 \leq m < n$）について次が成り立つ．
  - $p \geq kn + \ell m$ ならば f は $N_k(\ell)$-写像である．
  - $\max\{kn - m, (k-1)n + 2\} < p \leq kn + (\ell - 1)m$ ならば f は $N_k(\ell)$-写像でない．
- この結果は完全なものではない（次ページ以降）．
- $N_k(\ell)$-写像であることの証明は球面のホモトピー群の計算結果を使う．
- $N_k(\ell)$-写像でないことの証明は，もし定理の E が存在したとして，Steenrod 作用素を計算すると矛盾が生じることを見る．
- $\mathrm{Sp}(n)$ や $\mathrm{Spin}(2n+1)$ についても同様の計算結果がある．

例：SU(2) $\to$ SU(3) の 3-局所的な正規性

k	1	2	3	4	5
$N_k(1)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(2)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(3)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(4)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(5)$	✗	✗	✗	✗	✗

例：SU(2) → SU(3) の 5-局所的な正規性

k	1	2	3	4	5
$N_k(1)$	✓	?	?	?	?
$N_k(2)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(3)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(4)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(5)$	✗	✗	✗	✗	✗

例：SU(2) $\to$ SU(3) の 7-局所的な正規性

k	1	2	3	4	5
$N_k(1)$	✓	?	?	?	?
$N_k(2)$	✓	✗	✗	✗	✗
$N_k(3)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(4)$	✗	✗	✗	✗	✗
$N_k(5)$	✗	✗	✗	✗	✗

例：SU(2) $\to$ SU(3) の 11-局所的な正規性

k	1	2	3	4	5
$N_k(1)$	✓	✓	✓	?	?
$N_k(2)$	✓	✓	✗	✗	✗
$N_k(3)$	✓	?	✗	✗	✗
$N_k(4)$	✓	✗	✗	✗	✗
$N_k(5)$	✗	✗	✗	✗	✗

まとめ

- なぜ高次の物を考えるのか
  - 高次のものは「イコール」と「ホモトピー」の間の部分を記述するのに使える．
- A_n-写像と高次ホモトピー可換性
  - 位相モノイドの間の A_n-写像，Sugawara の意味での C_n-空間．
- 高次ホモトピー正規性
  - 正規部分群の一般化である crossed module，crossed module の高次ホモトピー版である $N_k(\ell)$-写像．
  - $N_k(\ell)$-写像はファイバーワイズホモトピー論を用いた特徴づけがある，これを用いると古典的な障害理論が使いやすくなる．

ありがとうございました