数学２Ｂ　　小テスト　　No.1　　(5/13)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の関数が調和関数であることを確かめ，共役調和関数を求めよ.

$$u(x,y) = 3x^2y - y^3$$

[**解答**]

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$$

また共役調和関数は $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$（c は任意定数.）

数学２B　　小テスト　　No.2　　(5/20)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　正則関数 $f(z) = e^z$ で次の図形がどのような図形に移されるか？

(1) 直線 $\mathrm{Re}(z) = 0, \pm 1, \pm 2,$

(2) 直線 $\mathrm{Im}(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

ヒント：複素数 $z = x + iy$ に対して $e^z = e^x(\cos x + i \sin x)$ と定義したことを思い出そう.

[**解答**]（１）円 $|z| = 1, e^{\pm 1}, e^{\pm 2}.$
（２）半直線 $\arg(z) = 0, \pm 1, \pm 2.$

数学２B　　小テスト　　No.3　　(5/27)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　１次分数変換 $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ について次の問に答えよ.

(1) f を拡張された複素平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の変換と考えるとき，$f(i)$ と $f(\infty)$ はどのように定義するか？

(2) 実軸 $\mathrm{Im}(z) = 0$ の f による像を求めよ.（ヒント: 像は $f(0)$, $f(1)$, $f(\infty)$ を通る一般化された円になる.）

[**解答**]（１）$f(i) = \infty$, $f(\infty) = 1$.
（２）単位円周から１を除いた部分

数学２B　　小テスト　　No.4　　(6/3)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　１次分数変換 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ で次の条件をみたすものを求めよ.

$$f(-1)=1,\qquad f(0)=-1,\qquad f(1)=\infty.$$

[**解答**] $f(z)=\dfrac{3z+1}{z-1}$.

数学 2 B　　小テスト　　No.5　　(6/10)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　1 次分数変換 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ で単位円板 $|z|<1$ を単位円板にうつし，かつ，

$$f(-1/2)=0,\qquad f(0)=1/2$$

をみたすものが存在することを示せ．また，そのとき直線 $x=-1/2,0,1$ の像を図示せよ．

[解答] $f(z)=\dfrac{2z+1}{z+2}$.
直線の像は $f(\infty)=2$ をとおり，実軸と直交する円のうちそれぞれ $f(-1/2),f(0),f(1)$ を通る円になる．

数学 2 B　　小テスト　　No.6　　(6/17)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　領域 $D = \{z \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ を単位円板 $|z| < 1$ にうつす等角写像 f で $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ をみたすものを求めよ.（ヒント：まず $z \mapsto i\pi z$ でうつす.）

[**解答**] $f(z) = -i \cdot \dfrac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i}$.

数学２B　　小テスト　　No.7　　(6/24)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　三角関数 $f(z) = \cos(z)$ による領域 $D = \{x + iy \mid -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$ の像を求めよ．また，D 内の虚軸に平行な何本かの半直線について，像の概形を図示せよ．

[**解答**] 像は右反平面 $\mathrm{Re}(z) > 0$ から実軸上の区間 $(0, 1]$ を除いた部分．虚軸に平行な半直線の像は $(\pm 1, 0)$ を焦点とする双曲線の一部になる．

数学 2 B　小テスト　No.8　(7/1)

学生番号　　**氏名**

$\boxed{1}$　上半平面上の調和関数 $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ で実軸 $\mathbb{R}$ 上で境界条件

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (1, \infty)) \\ 0 & (x \in (-1, 1)) \\ -1 & (x \in (-\infty, -1)) \end{cases}$$

をみたすものを求めよ．また，領域

$$D = \{z = x + iy \mid -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$$

上の調和関数 ψ で，境界条件

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (x = -\pi/2) \\ 0 & (y = 0) \\ -1 & (x = \pi/2) \end{cases}$$

をみたすものを関数 φ と sin を用いて表せ.

[**解答**]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\pi - \arg(z-1) - \arg(z+1)}{\pi} \\ \psi(z) &= \varphi(\sin(z)) \end{aligned}$$

数学 2 B　　小テスト　　No.9　　(7/8)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　正則関数 $F(z) = iz^2$ を複素ポテンシャルとする流れ（ベクトル場）を求め，その流れ（ベクトル場）の概略を座標平面に図示せよ．

[**解答**] $F(z) = -2xy + i(x^2 - y^2)$ であるのでベクトル場は $V = (-2y, 2x)$. 図は省略.（後で習う知識を使えば流線は双曲線 $x^2 - y^2 = const.$ になることがわかる.）

数学２B　　小テスト　　No.10　　(7/15)

学生番号　　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　正則関数 $F(z) = i \log z$ を複素ポテンシャルとする流れの流線と等ポテンシャル線を求めよ．また，流線に流れの向きを書き入れよ．

[**解答**] $F(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$ と表したとき，$\Phi(z) = -\arg(z)$, $\Psi(z) = \log|z|$ である．流線は Ψ の等高線になるので，原点を中心とする円になる．また，流れは Φ の勾配流なので Φ の値が大きくなる向きにながれるので，流れは時計回りになる．

数学２B　　小テスト　　No.11　　(7/22)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　単位円上の調和関数 Φ で，次の境界条件を満たすものを級数の形で求めよ．

$$\Phi(e^{i\theta}) = |\theta| \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$