1．調和関数と等角写像

1．熱方程式

平面上の領域 D に均質な物体があり、境界の温度が一定に保たれているとする。そして、領域 D 内には熱源はないものとする。このとき、D 内の点 (x, y) での時刻 t における温度 $H(x, y, t)$ は次の形の偏微分方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \triangle H \tag{1}$$

を満たすことが知られている。$\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ であり、$\triangle$ はと呼ばれる偏微分演算子である。ここで、境界の温度を一定に保ったまま（境界の温度は部分的に高いところや低いところがあっても良い)、十分に時間が経ったした状態を考える。このとき、温度分布は時間に依存しない一定の極限値に収束することが経験的に知られている。

$$h(x, y) = \lim_{t \to \infty} H(x, y, t)$$

とすると、h は式（１）より、偏微分方程式

$$\triangle h = 0$$

をみたす。この方程式の解を調和関数という。このように、調和関数は平衡状態にある温度分布を表す関数であり、物理的意味をもった応用上重要な関数である。

2．コーシー・リーマンの判定条件の復習

複素平面の領域 D で定義された複素数値関数

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

を考える。ここで、$u(x, y),\ v(x, y)$ は D で定義された滑らかな（１回連続的偏微分可能）関数とする。このとき、次の定理が成立する。

定理１　$f(z)$ が D で正則であるための必要十分条件は $u,\ v$ が D で次の偏微分方程式を満たすことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

補足　$f(z)$ が D で正則であるならば、その導関数 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ も D で正則であって、$u,\ v$ は C^2 級関数となる。そして、$u,\ v$ は D で調和な関数である。

３．正則関数による座標変換

定理２　$w=F(z)$ は z 平面の領域 D を w 平面の領域 G に移す正則関数であるとする．そして，$g(u,v)$ は G で調和な関数，つまり

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0$$

が成立しているとする．g に座標変換 F を施して得られる領域 D 上の関数

$$h(x,y)=g(F(x+iy))$$

を考える．このとき、$h(x,y)$ は領域 D における調和関数となる。

この定理は、調和関数の性質が正則関数を用いて座標変換したときに保たれることを意味する。ここに、正則関数の理論が物理学や工学で重要な意味を持つ理由の一端がある。応用上極めて重要な調和関数に関する境界値問題の解法は領域の形状によって大きく変化する。そこで、調和性を保つ正則関数を用いて座標変換し、領域を出来るだけ簡単な形の領域（典型領域）に移して解いたり、解の性質を調べたりすることがよく行われる。従って、正則関数を用いて、どのような領域をどのような領域に移すことが出来るかということが重要になる。そこでは、具体的な例が重要である。

定理２の証明

$z=x+iy,\ w=u+iv,\ f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とするとき、仮定により $u,\ v$ は　C^1 級の関数であって、定理１により

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つ。また、正則関数の実部、虚部はそれぞれ調和関数になるので

$$\triangle u=0,\ \triangle v=0$$

である。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\
\frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

故に

$$\triangle h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$$
$$+\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$$

４．等角写像

座標変換で重要なのは逆写像が存在する１対１写像による座標変換である。

定義　複素平面の領域 U を W に１対１に移す正則関数 $w = F(z)$ を等角写像と呼ぶ。この名前の由来は次の定理による。

定理３　領域 U を W に移す等角写像 F は次の意味で任意の曲線の交角を保つ写像になっている。つまり、領域 U 内の１点 p で交わる任意の曲線 $C_1,\ C_2$　に対して、その像曲線を $D_i = F(C_1),\ D_2 = F(C_2)$ とするとき、点 p における曲線 $C_1,\ C_2$ の交角と、点 $q = F(p)$ における曲線 $D_i,\ D_2$ の交角は常に等しい。

定理３の証明

$C_1:\ z = \varphi_1(t),\ -a < t < a,\ \varphi_1(0) = p,$
$C_2:\ z = \varphi_2(t),\ -a < t < a,\ \varphi_2(0) = p$
とすると、C_1　と　C_2　が点 p で交わる角度 θ　は

$$\theta = \arg \varphi_2'(0) - \arg \varphi_1'(0) = \arg \frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)}$$

である。像曲線は

$D_1:\ w = \psi_1(t) = F(\varphi_1(t)),\ -a < t < a,\ \psi_1(0) = q,$
$D_2:\ w = \psi_2(t) = F(\varphi_2(t)),\ -a < t < a,\ \psi_2(0) = q$
で与えられるので、その交わり角度 θ' は

$$\theta' = \arg \frac{\psi_2'(0)}{\psi_1'(0)} = \arg \frac{F'(p)\varphi_2'(0)}{F'(p)\varphi_1'(0)} = \arg \frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)} = \theta.$$

問　定理３の証明を Cauchy-Rieman の微分方程式を用いて直接証明せよ。

２．一次変換による等角写像

１．整一次変換

零でない複素数 $a(\neq 0)$ と任意の複素数 b をもちいて一次式

（１）　$$w = az + b$$

で定められる z 平面から w 平面への写像を整一次変換という。整一次変換は全平面を全平面に移す一対一写像であり、その逆変換は簡単に求められ、

$$z = \frac{w - b}{a}$$

逆変換も整一次変換である。いま、$a = re^{i\theta}$ （$r,\ \theta$：実数）とすると、（１）は

　１．$z\ \rightarrow\ z_1 = e^{i\theta}z$ （原点を中心とする角度 θ の回転）
　２．$z_1 \rightarrow\ z_2 = az_1$ （原点を中心とする相似比 a の相似拡大（又は縮小））
　３．$z_2 \rightarrow\ w = z_2 + b$ （b の方向への平行移動）

という３つの変換の合成である。従って、それは直線は直線に、円は円に移す変換になっていて、三角形は相似な三角形に（もっと一般に多角形は相似な多角形に）変換される。

問１　整一次変換 $w = az + b$ が単位円 $|z| = 1$ を単位円 $|w| = 1$ に移せば、$b = 0$ 且つ $|a| = 1$ であることを証明せよ。

２．分数一次変換

$a,\ b,\ c,\ d$ は $ad - bc \neq 0$ をみたす複素数とする。

（２）　$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

で定められる z 平面から w 平面への写像を分数一次変換という。単に一次変換というときに分数一次変換のことを意味する場合も多い。条件 $ad - bc \neq 0$ は（２）が定数写像にならないための条件である。$c = 0$ の場合は（２）は整一次変換になってしまうので、以下、$c \neq 0$ として考える。

逆変換　分数一次変換は逆変換を持ち、

$$wcz + wd = az = b$$

$$(wc - a)z = b - wd$$

（３）　$$z = \frac{b - wd}{cw - a}$$

となって、逆変換も分数一次変換である。

無限遠点　（２）の右辺の関数は $z=-\dfrac{d}{c}$ で極をもっていて、それ以外では正則な関数である。 z 平面の点が（２）の分母の零点 $z=-\dfrac{d}{c}$ に近づくとき w の絶対値は無限大に発散する。また、 z の絶対値が無限に大きくなるとき w の値は

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}=\frac{a}{c}$$

より、$w=\dfrac{a}{c}$ に近づく。これは逆関数の式（３）の分母の零点になっていて、w 平面の点が $w=\dfrac{a}{c}$ に近づくとき z の絶対値は無限大に発散じ、w の絶対値が無限に大きくなるとき z は $-\dfrac{d}{c}$ に収束する。つまり、

$$z\ \to\ -\frac{d}{c}\quad\Leftrightarrow\quad |w|\ \to\ \infty$$

$$|z|\ \to\ \infty\quad\Leftrightarrow\quad w\ \to\ \frac{a}{c}$$

という関係にある。そこで、「無限遠点」という概念を導入し、複素平面に無限遠点を一点追加した平面を考え、それを拡張された複素平面ということにする。そうすると、分数一次変換は拡張された複素平面の間の一対一変換と考えることが出来る。このように無限遠点は一点と考え、それを ∞ で表す。

$$z-\text{平面}\cup\{\infty\}\ \leftrightarrow\ w-\text{平面}\cup\{\infty\}$$

広義の円 拡張された複素平面では、直線も半径が無限大の円と考える。そして、円と直線を含めたものを「広義の円」という。

定理１　分数一次変換は広義の円を広義の円に移す。

（証明）　分数一次変換（１）は

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$$

と表すことが出来て、

1．$z\ \to\ z_1=cz+d$ （整一次変換）

2．$z_1\ \to\ z_2=\dfrac{1}{z_1}$ （反転写像）

3．$z_2\ \to\ w=(b-\dfrac{ad}{c})z_2+\dfrac{a}{c}$ （整一次変換）

という三つの変換の合成で表すことが出来る。従って、次の補題が証明されれば、定理１は証明されたことになる。

補題　反転写像

（４）
$$w = \frac{1}{z}$$
は広義の円が広義の円に移す。

（補題の証明）　$z = x + iy$ とするとき、広義の円は一般に

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

の形で表される。但し、A, B, C, D は実数で、$AD \neq 0$ 又は $(B, C) \neq (0, 0)$ である。この式を複素変数で表すと、

$$Az\overline{z} + B\frac{z + \overline{z}}{2} + C\frac{z - \overline{z}}{2} + D = 0$$

となる。これに、$w = \dfrac{1}{z}$ を代入すると、

$$A\frac{1}{w\overline{w}} + B\frac{\overline{w} + w}{2w\overline{w}} + C\frac{\overline{w} - w}{2w\overline{w}} + D = 0$$

$$A + B\frac{\overline{w} + w}{2} + C\frac{\overline{w} - w}{2} + Dw\overline{w} = 0$$

従って、$w = u + iv$ とすれば、

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

となって、w 平面の広義の円の式になる。

例題１　$w = \dfrac{1}{z}$ によるつぎの図形の像を求めよ。

（１） 二つの直線：$\mathrm{Re}z = 1,\ \mathrm{Re}z = -1$ の像曲線　（２） 領域 $\mathrm{Re}z > 1$ の像領域

問２ $w = \dfrac{1}{z}$ による領域 $1 < \mathrm{Re}z < 2$ の像領域を求めよ。

問３ $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ による上半平面 $\mathrm{Im}z > 0$ の像領域を求め、直線 $\mathrm{Im}z = 1$ の像曲線を求めよ。

3. 分数一次変換の不動点

分数一次変換

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

の不動点とは $f(z_0) = z_0$ となる点 z_0 のことをいう。分数一次変換は拡張された複素平面の座標変換と考え、無限遠点も含めて考える。すると、

$$\text{無限遠点が不動点} \Leftrightarrow\ c = 0\ \Leftrightarrow\ f \text{ は整一次変換}$$

という関係が成り立つ。

定理２　任意の分数一次変換は拡張された複素平面で必ず不動点をもち、恒等写像以外の場合は不動点の数は１個又は２個である。

（証明）　（イ）整一次変換の時　$w = Az + B$ の不動点は $Az + B = z$, すなわち $(A-1)z + B = 0$ の解で、$A \neq 1$ の時は $z = \dfrac{B}{A-1}$ ただ１つ。 $A = 1$ のときに解を持てば $B = 0$ で $w \equiv z$ となって f は恒等写像になる。

（ロ）整一次変換でないとき（$c \neq 0$）　不動点は

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

の解で、２個または１個（重根）である。

合成　分数一次変換の合成は分数一次変換である。

（証明）

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad t = g(w) = \frac{a'w+b'}{c'w+d'}, \quad h(z) = f(g(z))$$

とすると、

$$h(z) = \frac{a\frac{a'w+b'}{c'w+d'} + b}{c\frac{a'w+b'}{c'w+d'} + d} = \frac{aa'w + ab' + bc'w + bd'}{ca'w + cb' + dc'w + dd'}$$

これは分数一次変換である。

定理３（指定された３点を指定された３点に移す一次変換）　z 平面の異なる３点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ と w 平面の異なる３点 $w_1,\ w_2,\ w_3$ を任意に与えたとき、

$$f(z_i) = w_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

をみたす分数一次変換 $w = f(z)$ がただ一つ存在する。また、$w = f(z)$ は次の式で与えられる。

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

（証明）　この式の値を k で表すと、

(1) $z = z_1 \ \Leftrightarrow\ k = 0 \ \Leftrightarrow\ w = w_1$
(2) $z = z_2 \ \Leftrightarrow\ k = 2 \ \Leftrightarrow\ w = w_2$
(3) $z = z_3 \ \Leftrightarrow\ k = \infty \ \Leftrightarrow\ w = w_3$

従って、この式を w で解いて得られる一次変換は定理の条件を満たす。

次に定理の条件を満たす一次変換がただ１つであるを示す。

$$f_1(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, 3$$

$$f_2(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, 3$$

をみたす２つの分数一次変換 $f_1,\ f_2$ があったとする。分数一次変換の逆関数は分数一次変換であり、２つの分数一次変換の合成も分数一次変換であることから、

$$h(z) = f_2^{-1}(f_1(z))$$

も分数一次変換となる。そして、

$$h(z_i) = f_2^{-1}(w_i) = z_i,\ i = 1, 2, 3$$

となって、h は異なる３つの不動点をもつことになる。よって、定理２により、$h(z) \equiv z$ である。故に、すべての点 z に対して $f_2(z) = f_2(h(z)) = f_2(f_2^{-1}(f_1(z))) = f_1(z)$.

（注意）もし、これらの点の１つが ∞ であれば、その点を含む式の商を 1 で置き換えれば拡張された複素平面の場合に拡張できる。たとえば、$w_1 = \infty,\ z_2 = \infty$ の場合は

$$\frac{w_2 - w_3}{w - w_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

とすればよい。

問４　このことを確認せよ。

問５　$z = -1,\ 0,\ 1$ をそれぞれ、$0,\ 1,\ -1$ に移す分数一次変換を求めよ。

問６　２点 $z = i,\ z = -i$ を不動点とする分数一次変換をすべて求めよ。

４．ケーリー変換

分数一次変換

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

は z 平面の上半平面を w 平面の単位円の内部に一対一に移すもので、ケーリー変換と呼ばれている。

$$z \text{ が上半平面の点} \Leftrightarrow \ |z-i| < |z+i| \ \Leftrightarrow \ |w| < 1.$$

問７　z 平面の２つの直線族 $x = \mathrm{const.},\ y = \mathrm{const.}$ のケーリー変換による像を図示せよ。

問８　w 平面の原点を通る直線族のケーリー逆変換による像を図示せよ。

問９　ケーリー変換で左半平面　$\mathrm{Re}(w) < 0$ に移る z 平面の領域を図示せよ。

問１０　ケーリー変換で円弧菱形 $(|w| < 1,\ |w \pm 1 \pm i| > 1)$ の z 平面の領域を図示せよ。

５．典型領域の一次変換

定理４　上半平面を上半平面に移す分数一次変換の一般形は

(1)　　$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$,　$(a,b,c,d$：実数, $ad-bc$¿$0)$

で与えられる。

（証明）ステップ１.（１）の分数一次変換は実軸を実軸に移すことは、係数がすべて実数なので自明である。また、（１）を微分すると、

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

となり、$ad-bc$¿0　より、実軸上での導関数が正となって、実軸上で単調増大関数になっている。一般的に「等角写像は曲線左側は像曲線の左側に、右側は像曲線の右側に移す」ことから、上半平面を上半平面に移すことがわかる。

ステップ２. 上半平面を上半平面に移す分数一次変換が（１）の形で表されることを示す。実軸上の異なる３点を $x_1,\ x_2,\ x_3$ を取り、その像を , $u_1,\ u_2,\ u_3$ として、

$$\frac{w-u_1}{w-u_3} \cdot \frac{u_2-u_3}{u_2-u_1} = \frac{z-x_1}{z-x_3} \cdot \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}.$$

を w について解けば、 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ はすべて実数なので、（１）の形になる。条件 $ad-bc \neq 0$ は写像が定数にならない条件なので、計算しなくても成立している。$ad-bc$¿0 となる理由はステップ１で述べたとおりである。

補題２　単位円 $|z|=1$ を単位円 $|w|=1$ に移し、原点 $z=0$ を不動点とする分数一次変換は $w=e^{i\theta}z$ （θ : 実数）の形の変換だけである。

問１１　この補題を証明せよ。（ヒント．$w=\dfrac{z}{Az+B}$ の形でかけることを示し、次に、$f(z)=Az+B$ に対して、問１を用いよ。）

定理５　単位円版 $|z|\leqq 1$ を単位円版 $|w|\leqq 1$ に移す分数一次変換の一般形は

（２）　　$w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1},\quad (|\alpha|<1,\ \theta$：実数$))$

の形で与えられる。

（証明）ステップ１．（２）の分数一次変換が単位円 $|z|=1$ を単位円 $|w|=1$ に移すことを示す。（それを示せば、$|z|<1$ を $|w|<1$ に移すことは $|\alpha|<1$ よりわかる。）
そこで、$|z|=1$ とすると、$z\overline{z}=1$．故に

$$|w|=\frac{|z-\alpha|}{|\overline{\alpha}z-1|}=\frac{|z-\alpha|}{|\overline{\alpha}z-z\overline{z}|}=\frac{|z-\alpha|}{|z||\overline{\alpha}-\overline{z}|}=\frac{|z-\alpha|}{|\overline{\alpha-z}|}=1.$$

ステップ２．$w=f(z)$ は単位円版 $|z|\leqq 1$ を単位円版 $|w|\leqq 1$ に移す分数一次変換で、$f(\alpha)=0$ $(|\alpha|<1)$ をみたすものとする。変換（２）で $\theta=0$ とした変換

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$

を考え、その逆変換を $z=g(w)$ とする。そして $h(w)=f(g(w))$ とおくと、h は単位円 $|w|\leqq 1$ を $|w|\leqq 1$ に写し、原点 $w=0$ を不動点とする一次変換となる。従って、補題２により $h(w)=e^{i\theta}w$ である。よって、

$$f(z)=f(g(g^{-1}(z)))=h(g^{-1}(z))=e^{i\theta}g^{-1}(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$

を得る。

問１２　上半平面全体を上半平面全体に移し、点 $z=i$ を不動点とする分数一次変換の一般形を求めよ。

問１３ $|z|\leqq 1$ を $|w|\leqq 1$ に移し、$z=\dfrac{i}{2}$ を $w=0$ に、$z=0$ を $w=-\dfrac{i}{2}$ に移す分数一次変換が存在することを示し、その写像による $x=\text{const.}$ $y=\text{const.}$ の像曲線族を図示せよ。（ヒント．∞ 点の像と y 軸の像を先ず求め、それらとの関係を用いよ。）

3. 初等関数による等角写像

１．ベキ関数と角領域

例として $t = z^3$ を考える。この写像は原点を頂点とする頂角 $\dfrac{\pi}{3}$ の角領域

$$D \ : \ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}$$

を t 平面の右半平面 $\mathrm{Im}t > 0$ に一対一等角に移す。他方、容易にわかるように

$$w = \frac{t-1}{t+1}$$

は t 平面の右半平面を w 平面の単位円の内部 $|w| < 1$ に写像する一次変換である。この２つの写像を合成して

$$w = \frac{z^3-1}{z^3+1}$$

とすれば、z 平面の角領域 D を w 平面の単位円の内部 $|w| < 1$ に移す等角写像が得られる。

問１　$z = x + iy$ として、z 平面の次の角領域を w 平面の単位円の内部に等角写像を求めよ。

(1) $D_1 : \ 0 < y < x$
(2) $D_2 : \ 2 < y < x + 1$

２．指数関数（対数関数）による等角写像

指数関数 $w = e^z$ を用いると、z 平面の帯状の領域 $D : \ 0 < \mathrm{Im}z < \pi$ を w 平面の上半平面 $\mathrm{Im}w > 0$ に一対一等角に写像することが出来る。

$$w = e^z : \quad D : \ 0 < \mathrm{Im}z < \pi \qquad ----> \qquad \mathrm{Im}w > 0$$
（逆写像は $z = \mathrm{Log}w$）

この写像は、D の左側の半無限帯状領域 $D_1 \ : \ x < 0, \ 0 < y < \pi$ を w 平面の半円領域 $S_1 \ : \ |w| < 1, \ \mathrm{Im}w > 0$ に移す等角写像になっている。（右側半無限帯状領域 $D_2 : \ x > 0, \ 0 < y < \infty$ は上半平面の単位円外側部分 $S_2 : \ |w| < 1, \ \mathrm{Im}w > 0$ に移る。）

問２　帯状領域 $D : \ 0 < \mathrm{Im}z < \pi$ を単位円 $|w| < 1$ に移し、x 軸が円周 $|w| = 1$ の右側半円周 $\mathrm{Re}w > 0$ 部分に、D の上側の境界 $y = \pi$ が左側半円周 $|w| = 1, \ \mathrm{Re}w < 0$ に移す等角写像を求めよ。

また、$y = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}w) = \mathrm{Arg}w$ は上半平面 $\mathrm{Im}w > 0$ における有界な調和関数で、これを $\varphi(w)$ とすると、境界条件

$$\varphi(w) = \begin{cases} \pi & (u < 0,\ v = 0) \\ 0 & (u > 0,\ v = 0) \end{cases}$$

を満たす。このことは次節で用いる。

問３　領域 $D:\ x > 0,\ y > 0,\ xy < 1$ を単位円に移す等角写像を求めよ。

３．三角関数による等角写像 (半無限帯状領域を上半平面に移す)

$z = x + iy,\ w = u + iv$ として、三角関数 $w = \sin z$ による写像を半無限帯状領域

$$\Gamma:\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0$$

で考える。

（１）

$$w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

より、

（２）

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y$$

となる。

例題　式（１）を証明せよ

（解）

$$\sin z = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \sinh y$$

写像（１）による線分 $L_c:\ y = c\ (c > 0), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の像

上の写像 (1) による線分 $L_c:\ y = c\ (c > 0),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の像は、式 (2) に $y = c$ を代入してから x を消去すると

$$\frac{u^2}{(\cosh c)^2} + \frac{v^2}{(\sinh c)^2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

となって、原点を中心とする楕円であることがわかる。$c > 0$ なので、式（２）より $v > 0$ となって、L_c の像は実軸より上の部分に含まれることがわかる。また x が $-\frac{\pi}{2}$ から

$\dfrac{\pi}{2}$ まで変化すると u は単調に -1 から 1 まで増大する。従って、L_c の像は楕円の上半分（実軸より上の部分）にきっちり一致することがわかる。像の楕円の長軸は実軸上の $-\cosh y \leqq u \leqq \cosh y$ の部分であり、短軸は虚軸上の $-\sinh y \leqq v \leqq \sinh y$ の部分である。焦点 $(-f,\ 0),\ (f,\ 0)$ を求めると

$$f^2 = \cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$$

より、$(-1,\ 0),\ (1,\ 0)$ が焦点となる。つまり、c を変化しても焦点は変わらず、共焦点楕円群となることがわかる。$c = 0$ の時は $v = 0\ u = \sin x\ (-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2})$ で、像は２焦点を端点とする線分である。$c = 0$ から次第に c を大きくさせて $c \to \infty$ とすると、像の半楕円は単調に大きくなっていって、w 平面の上半平面全体を重複無く走査する。従って $w = \sin z$ により、領域 Γ が上半平面 $\mathrm{Im} w > 0$ と一対一に等角写像されることがわかる。

問３　上の等角写像　$w = \sin z$　による直線 $T_a:\ x = a$ の像曲線の満たす方程式を求め、その概形を図示せよ。

４．双曲線関数による等角写像 (半無限帯状領域を上半平面に移す)

問４　(1) $w = \cosh z = \cos(iz)$ を示せ。
（２） $w = \cosh z$ により z 平面の半無限帯状領域 D: $0 < y < \pi,\ x > 0$ が w 平面の上半平面に等角写像されることを示せ。
（３） この写像により D の境界

$$B_0:\ x = 0,\ 0 \leqq y \leqq \pi, \quad B_-:\ x \geqq 0,\ y = 0, \quad B_+:\ x \geqq 0,\ y = \pi$$

はそれぞれ、 w 平面の u 軸上のどの部分に対応するか。

問５ w 平面の二つの調和関数

$$\phi_1(w) = \mathrm{Im}\mathrm{Log}(w-1) = \arg(w-1)$$

$$\phi_2(w) = \mathrm{Im}\mathrm{Log}(w+1) = \arg(w+1)$$

を $w = \cosh z$ によって z 平面の半無限帯状領域 D に引き戻して考えたとき、それぞれ、境界 $B_0,\ B_-,\ B_+$ でどのような値を取る調和関数になっているか調べよ。

例題　z 平面の半無限帯状領域 $\Gamma:\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2},\ y > 0$　で有界な調和関数 $H(z)$ で 境界値が L_0 上で $1,\ T_{-1}$ と T_{+1} 上で 0 となるものを求めよ。

（解）　$H(z) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\{\mathrm{Log}(w-1) - \mathrm{Log}(w+1)\} = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\mathrm{Log}\dfrac{w-1}{w+1}$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}\frac{w-1}{w+1} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\frac{w-1}{w+1}}{\mathrm{Re}\frac{w-1}{w+1}}$$

$$\mathrm{Re}\frac{w-1}{w+1} = \mathrm{Re}\frac{u-1+iv}{u+1+iv} = \mathrm{Re}\frac{(u-1+iv)(u+1-iv)}{u^2+2u+1+v^2} = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+2u+1+v^2}$$

$$\mathrm{Im}\frac{w-1}{w+1} = \mathrm{Im}\frac{u-1+iv}{u+1+iv} = \mathrm{Im}\frac{(u-1+iv)(u+1-iv)}{u^2+2u+1+v^2} = \frac{2v}{u^2+2u+1+v^2}$$

$$\therefore H(z) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{2v}{u^2+v^2-1}$$

更に

$$\begin{aligned} u^2+v^2-1 &= \cosh^2 x\cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y - 1 \\ &= (\sinh^2 x + 1)\cos^2 y + \sinh^2 x\sin^2 y - 1 \\ &= \sinh^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) - \sin^2 y \\ &= \sinh^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

$$\therefore H(z) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\sinh x\sin y}{\sinh^2 x - \sin^2 y}$$

$$= \frac{1}{\pi}\arg(\sinh x + i\sin y)^2$$

$$= \frac{2}{\pi}\arg(\sinh x + i\sin y)$$

$$= \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sin y}{\sinh x}$$

答え　$H(z) = \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\dfrac{\sin y}{\sinh x}.$

問 6 半無限帯状領域 Γ で有界で、L_0 上で境界値 $0,\ T_{-1}$ と T_{+1} 上での境界値 a　をとる調和関数を求めよ。

5．Joukovski の翼

2 次変換 $w = z + \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ を考える。この逆変換は、$z^2 - wz + 1 = 0$ を解いて、

$$z = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$$

で得られる。逆変換は $w = \pm 2$ 以外では対応する z 平面の点が 2 個ずつある。$w = \pm 2$ に対応する z 平面の点はそれぞれ $z = \pm 1$ である。

z 平面の円 $|z| = r$ の像を調べる。$z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とすると、

$$w = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta$$

$$\therefore\ u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta,\ v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta$$

$r \neq 1$ のとき、$\alpha = r + \dfrac{1}{r},\ \beta = r - \dfrac{1}{r}$ とすれば、

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1$$

これは楕円であり、焦点を $(-f, 0),\ (f, 0)$ とすると、

$$f^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4$$

故に $(-2, 0),\ (2, 0)$ を焦点とする楕円になる。また、方程式から、$|z| = r$ の像と $|z| = \dfrac{1}{r}$ の像は同じであることがわかる。

$r = 1$ のときは、$u = 2\cos\theta,\ v = 0$ で、単位円の像は $w = \pm 2$ を端点とする線分 K（u 軸上の区間 $[-2, 2]$）になることがわかる。

$r = 1$ から r を大きくしていくと楕円は単調に大きくなり（前者を内部に含む)、$r \to \infty$ で楕円の半径は長軸も短軸も共に無限大に発散する。したがって、z 平面の単位円の外部が w 平面から線分 K を除いた領域と一対一に対応することがわかる。

$r = 1$ から r を小さくしていく場合も楕円は単調に大きくなり（前者を内部に含む）、$r \to 0$ で楕円の半径は無限大に発散する。従って z 平面の単位円の内部から原点を除いた領域が w 平面全体から K を除いた領域と一対一に対応することがわかる。

注意 $r > 1$ のときは $\mathrm{Im}z > 0 \iff \mathrm{Im}w > 0$ で、点 z が円 $|z| = r$ 上を正の向き（反時計回り）に回るとき、対応する w 平面の点も楕円上を正の向きに回る。しかし、$r < 1$ のときは $\mathrm{Im}z > 0 \iff \mathrm{Im}w < 0$ で、点 z が円 $|z| = r$ 上を正の向き（反時計回り）に回るとき、対応する w 平面の点は楕円上を負の向き（時計回り）に回る。つまり半径 r が 1 よりも大きな円から少しずつ小さくなっていくとき、像の楕円は半径が 1 になったときに線分 K につぶれて、円周を正の向きに回る回転は K の上を $w = 2$ から $w = -2$ までを往復する運動に変わる。さらに半径小さくすると、今度は楕円の上下が入れ替わって、点は楕円の上を負の向きに回る運動に変わるのである。

問 1 $0 < c < 1$ とするとき、円 $|z - c| = 1 + c$ の $w = z + \dfrac{1}{z}$ による像曲線の概形を描け

問 2 $0 < c < 1$ とするとき、円 $|z - c(i + i)| = |1 + c(1 + i)|$ の $w = z + \dfrac{1}{z}$ による像曲線の概形を描け

問 3 z 平面の領域 $|z - i| < \sqrt{2}$ の $w = z + \dfrac{1}{z}$ による像領域の概形を図示せよ。

４．調和関数と複素ポテンシャル

１．２次元完全流

平面を流れる非圧縮流体を考える。非圧縮で渦も湧き出しもない流れを完全流という。

渦とポテンシャル　平面の流れの速度ベクトルが C^1 級の関数 $V_1(x,y),\ V_2(x,y)$ を用いて

$$V = (V_1(x,y),\ V_2(x,y))$$

で与えられているとする。平面の区分的に滑らかな曲線 C が弧長 s で

$$C : x = x(s),\ y = y(s),\ 0 < s < L$$

とパラメータ表示されているとする。L は C の長さである。C の接線方向の V の成分 V_t は、C 上の点 P における長さ 1 の C の接ベクトル $T = \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds}\right)$ を用いて

$$V_t\ = V \cdot T = V_1\frac{dx}{ds} + V_2\frac{dy}{ds}$$

で表される。C が閉曲線であるとき、流れ V の C に沿った回転量 R は

$$R = \int_C V_t ds = \int_C \left(V_1\frac{dx}{ds} + V_2\frac{dy}{ds}\right) ds = \int_C V_1 dx + V_2 dy$$

で与えられる。いま、C は円であるとし、その内部を D で表わすと Green の公式により

$$R = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy$$

で表される。C が点 (a,b) を中心とする半径 r の円とするとき、D の面積は πr^2 であり、

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_C V_t ds = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy = \frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)$$

を得る。この値を 2 で割った値

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)\right)$$

を流れ V の点 (a,b) における回転という。V が**渦なし**の流れであるとは

$$2\mathrm{rot}V = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \equiv 0$$

をみたす流れのことである。V が渦なしの場合、単連結領域では

$$\Phi(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)} V_1dx+V_ydy$$

は点 (a,b) から (x,y) を結ぶ曲線の積分路に依らず関数として定まる。そして、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=V_1,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=V_2 \tag{1}$$

をみたす。このような関数 Φ を流れ V のポテンシャルという。

湧き出し　曲線 C の点 P における法線方向の V の成分は長さ 1 の法線ベクトル N が $\left(\frac{dy}{ds}-\frac{dx}{ds}\right)$ で与えられることから

$$V_n=V\cdot N=V_1\frac{dy}{ds}-V_2\frac{dx}{ds}$$

で与えられる。従って、C が閉曲線のとき、C を横切って流れ出す流量 (flux) が

$$F=\int_C V_nds=\int_C V_1\frac{dy}{ds}-V_2\frac{dx}{ds}ds=\int_C V_1dy-V_2dy$$

で与えられる。これは再び Green の公式により C　の内部 D における積分で

$$F=\iint_D\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\right)dxdy$$

と表される。そこで、$\dfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+\dfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)$ を点 (a,b) における V の湧き出し（flux) という。また、

$$\mathrm{div}V=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\equiv 0 \tag{2}$$

をみたす流れのことを湧き出しのない流れという。負の湧き出しが吸い込みと考え、湧き出しがない流れは吸い込みもないものとみなす。

2．完全流と複素ポテンシャル

V が完全流であるとする。そのポテンシャルを Φ とすると (1), (2) により

$$\triangle\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}=0$$

となり、Φ は調和関数である。いま、V に直交する流れ

$$W = (W_1, W_2) = (-V_2, V_1)$$

を考えると、

$$2\mathrm{rot}W = \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = \mathrm{div}V = 0$$

$$\mathrm{div}W = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} = -\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = -2\mathrm{rot}V = 0$$

となり、W も完全流である。そして、W のポテンシャルを Ψ とすると Ψ も調和関数であり、流れは

$$\Psi = \mathrm{const.}$$

で定められる曲線に沿って流れる。ここで、

$$f(z) = \Phi(z) + i\Psi(z),\ (z = x + iy)$$

とおくと、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_1 = W_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial y},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_2 = -W_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

より、コーシー・リーマンの微分方程式が成り立って、$f(z)$ は正則関数になる。この $f(z)$ のことを完全流 V の**複素ポテンシャル**という。複素ポテンシャルを用いると

$$V = V_1 + iV_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}$$

$$||V|| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|$$

となって、速度ベクトルが $f'(z)$ の共役複素数 $\overline{f'(z)}$ で与えられる。また、速度は絶対値 $|f'(z)|$ で計算されることになる。

例 1（一様な流れ）　$f(z) = az\ (a > 0)$ とすると、$\Phi = ax\ (\Psi = ay)$ である。従って、$V = (a, 0)$ となって、流れは x 軸に平行な方向の一様な（定速度の）流れである。

例 2（角をまわる流れ）　$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xy$ とすると、流れは $\Psi = 2xy = \mathrm{const.}$ に沿って流れるれ、x 軸と y 軸を壁とする角領域を流れる流れがこの複素ポテンシャルで記述されることがわかる。

問 1 (1) 例 2 の流れの第 1 象限〜第 4 象限での流線とその流れの方向を図示せよ。

(2) $f(z)=z^3$ を複素ポテンシャルとする流れの流線とその向きを図示せよ。

例３（原点で湧き出す流れ）　$f(z)=m\log z$ (m は実定数）とする。
$z=re^{i\theta}$ とおくと、$\Phi=m\log r,\ \Psi=m\theta$ となり、流線は原点を通る直線になる。そして、原点を中心とする半径 r の円 $C:|z|=r$ に対する法線速度は $V_r=\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=\dfrac{m}{r}$, 接線速度は $V_t=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0$ である。C を横切って外に流れ出る量 F は

$$F=\int_C\frac{\partial\Phi}{\partial r}ds=\int_0^{2\pi}\frac{m}{r}rd\theta=2\pi m$$

となる。従って、$m>0$ のときは原点は湧き出しであり、$m<0$ のときは吸い込みである。m は湧き出しの強さという。

問２　$f(z)=\log(z-a)-\log(z+a)=\log\dfrac{z-a}{z+a}$ を複素ポテンシャルとする流れは $z=a$ に強さ１の湧き出しがあり $z=-a$ に強さ１の吸い込みがある流れとなる。この流れの流線 $\Psi=\mathrm{const.}$ と等ポテンシャル線 $\Phi=\mathrm{const.}$ は共に円になることを示し、流線とその向きを図示せよ。

例３（１対の点電荷による電位）　均質な導体平面の電位 u は電荷のないところではラプラスの方程式 $\triangle u=0$ をみたし、調和関数になる。z 平面の実軸上の２点 $z=a, z=-a$　にそれぞれ $+1,\ -1$ の電荷があるとき、この電荷の対による電位の複素ポテンシャルを求めよ。

解　例３で述べたポテンシャルの重ね合わせで表現され、問２のポテンシャル

$$f(z)=f(z)=\log(z-a)-\log(z+a)=\log\frac{z-a}{z+a}$$

が求める複素ポテンシャルになる。

問３　円 $|z-\dfrac{5}{3}|=1$ で $u=1$, 円 $|z+\dfrac{5}{3}|=1$ で $u=-1$ なり、この２円の外側で調和な関数ををポテンシャルとする流れの複素ポテンシャルを求めよ。

問４　実軸上の $x\geqq 1$ で $u=1,\ x\leqq -1$ で $u=-1$ となり、全平面からこの２つの半直線を除いた領域で調和な関数をポテンシャルとする流れの複素ポテンシャルを求めよ。

問５　$f(z)=-\dfrac{i}{2\pi}\log z$ を複素ポテンシャルとする流れの流線とその向きを図示せよ。

例５（円筒のまわりの流れ）　複素ポテンシャルが

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

で与えられる流れを考える。$z = re^{i\theta}$ とおくと、

$$f(z) = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta$$

となり、流線は

$$\Psi(z) = \mathrm{Im} f(z) {=} (r - \frac{1}{r})\sin\theta = \mathrm{const.}$$

で与えられる曲線となる。$\Psi(z) = 0$ の流線は $r = 1$ と $\theta = 0$, つまり、単位円と x 軸になる。速度ベクトルは

$$\overline{f'(z)} = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2}$$

で与えられ、遠く（$|z|$ が大きなところ）では流れは左から右に平行に流れる一様な流れに近いことがわかる。流速が零になる点（**停留点**、あるいは**よどみ点**という）は、$f'(z) = 0$ の点、従って $z = \pm 1$ である。

問６　例５の流れの流線の概形を（流線には向きを付けて）描け。単位円の内側の流れも描くこと。

問７　例５の流れと問５の流れを重ね合わせた、

$$f(z) = z + \frac{1}{z} - \frac{Ki}{2\pi}\log z$$

を複素ポテンシャルとする流れの流線の概形を描け。また、流れの停留点を求めよ。但し K は正の定数とする。

３．円内の調和関数

複素平面の区分的に滑らかな閉曲線 C で囲まれた領域を D とする。D の境界 C 上で定義された関数 $U(\zeta)$ が与えられたとき、D 内の調和関数 $u(z)$ で

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) = U(\zeta) \tag{1}$$

が C 上の各点で成立するものを求める問題を**ディリクレ問題**という。$U(\zeta)$ が連続な場合は、この問題は一意的な解をもつ（解が存在し、しかも唯１つである）ことが知られている。$U(\zeta)$ が連続でない場合でも、区分的に連続であれば、条件 (1) を $U(\zeta)$ が連続な点 ζ に制限し、$U(\zeta)$ が不連続な点 ζ の近傍では $u(z)$ は有界という条件に置き換えれば、やはり一意的な解が存在することが知られている。

注意　「区分的に連続」というのは、不連続点が孤立点で、不連続点においても左右からの関数の極限値は存在するものをいう。従って、有界な区間や曲線上での区分的に連続な関数は必ず有界関数になる。

次の定理は、領域 D が円の場合のディリクレ問題の解の公式を与えるものである。

定理（ポアソンの公式）　$U(\zeta)$ は半径 $R\ (>0)$ の円周上で定義された区分的に連続な関数とする。そのとき、円 $D:|z|<R$ 内でのディリクレ問題の解は

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi \tag{2}$$

で与えられる。但し、 $0\leqq r<R,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする。この式をポアソンの公式といい、積分式の中の分数の部分をポアソン核という。

証明　この公式はフーリエ級数を用いて証明することも出来るが、コーシーの積分公式から導くことも出来る。しかし、この定理をここで述べたような一般の形で証明するのは容易ではないため、ここでは $u(z)$ が $|z|\leqq R$ で連続で $D:\ |z|<R$ で正則な関数 $f(z)$ の実部として表現できている場合に、$U(\zeta)=u(\zeta)$ として、公式（２）が成立することを示す。

コーシーの積分公式により

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta-z}d\varphi$$

が成り立つ。但し、$\zeta=Re^{i\varphi}$ である。ここで、$Z=\dfrac{R^2}{\overline{z}}$ とおくと、$|Z|>R$ であり、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta-Z}d\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Z}dz=0$$

である。そして、$|\zeta|=R$ 上では、

$$\frac{\zeta}{\zeta-Z}=\frac{\zeta}{\zeta-\frac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}}}=\frac{1}{1-\frac{\overline{\zeta}}{\overline{z}}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}-\overline{\zeta}}$$

故に

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}-\frac{\overline{z}}{\overline{z}-\overline{\zeta}}\right)d\varphi$$

が成り立つ。ここで、

$$\frac{\zeta}{\zeta-z}-\frac{\overline{z}}{\overline{z}-\overline{\zeta}}=\frac{\zeta(\overline{\zeta}-\overline{z})+\overline{z}(\zeta-z)}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{|\zeta|^2-|z)^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}$$

となって、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

を得る。この被積分関数の分数式の部分は実数なので、この式の実部を取ればポアソンの公式を得る。

級数展開　ポアソン核は

$$\frac{\zeta\overline{\zeta}-z\overline{z}}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\mathrm{Re}\frac{\zeta\overline{\zeta}-\zeta\overline{z}+\overline{\zeta}z-z\overline{z}}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\mathrm{Re}\frac{(\zeta+z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\mathrm{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$$

$$=\mathrm{Re}\frac{1+\frac{z}{\zeta}}{1-\frac{z}{\zeta}}=\mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)\left(1+\frac{z}{\zeta}+\frac{z^2}{\zeta^2}+\cdots\right)=1+2\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\zeta}+\frac{z^2}{\zeta^2}+\cdots\right) \tag{3}$$

ここで、

$$\mathrm{Re}\frac{z^n}{\zeta^n}=\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\varphi)=\frac{r^n}{R^n}(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)$$

（３）の級数は一様収束するので、

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\right]d\varphi$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos\varphi+b_n\sin\varphi) \tag{4}$$

ここで、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})\cos\varphi d\varphi$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})\sin\varphi d\varphi$$

である。(4) をフーリエ級数展開という。

例題　単位円 $|z|\leqq 1$ におけるディリクレ問題の境界条件

$$u(e^{i\varphi})=\begin{cases}\frac{\varphi}{\pi} & (0\leqq\varphi\leqq\pi)\\ -\frac{\varphi}{\pi} & (-\pi\leqq\varphi\leqq 0)\end{cases}$$

に対する解のフーリエ級数展開を求めよ。

解

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(r\cos\theta+\frac{r^3}{3^2}\cos 3\theta+\frac{r^5}{5^2}\cos 5\theta+\cdots\right)$$

問１　単位円 $|z|\leqq 1$ におけるディリクレ問題を境界条件

$$u(e^{i\varphi}) = \sin^3 \varphi$$

のもとで解け。

問 2　単位円 $|z| \leqq 1$ におけるディリクレ問題を境界条件

$$u(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 1 & (0 < \varphi < \pi) \\ -1 & (-\pi < \varphi < 0) \end{cases}$$

に対する解のフーリエ級数展開を求めよ。

問 3　問 2 の解が

$$u(e^{i\varphi}) = \frac{2}{\pi}[\arg(1+z) - \arg(1-z)]$$

で与えられることを示せ。また、解の定数曲線 $u = \text{const.}$ が円弧であることを示せ。