

写像 $w = \cos z$ による次の領域 D の像を求め、図示せよ。

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \text{Im}(z) < 2\}$$

[解答]

複素数 $z = x + iy$ に対して

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x + \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x$$

であるので直線 $y = a$ の像は楕円

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad A = \cosh a, B = \sinh a.$$

になる。領域 D の像はこの楕円を $1 < a < 2$ の範囲で動かした場合の軌跡になる。 A, B が a について単調増加であることに注意すれば求める像は

$$A = \cosh 1, \quad B = \sinh 1$$

の場合の楕円と

$$A = \cosh 2, \quad B = \sinh 2$$

の場合の楕円の間部分になる（図は省略する。）