

次の有理関数を部分分数展開せよ .

$$R(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$$

[解答] 分母を因数分解すると

$$R(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

特異点 $\beta = \pm 1, \pm i$ は単純極 (位数が 1 の極) なので Laurent 展開の負ベキの部分は

$$\frac{c}{z-\beta} \quad (\text{ただし } c \text{ は点 } \beta \text{ での留数})$$

となる . ここで c は ($\beta^4 = 1$ に注意すると)

$$c = \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{(z-\beta)z}{z^4 - 1} = \lim_{z \rightarrow \beta} z \cdot \frac{z-\beta}{z^4 - \beta^4} = \beta \cdot \frac{1}{4\beta^3} = \frac{1}{4\beta^2} = \beta^2/4$$

よって

$$R(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$