

次の複素積分を留数積分法で計算せよ .

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 1} dz, \quad C : |z| = 2 \quad (\text{反時計回り})$$

[解答] 被積分関数 $f(z) = z/(z^2 + 1)$ は $z = \pm i$ に特異点を持ち ,

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) f(z) = 1/2.$$

よってこれらは単純極で , 留数はともに $1/2$. (145p 参照) 積分経路はこれらの特異点と反時計回りに一周するので積分の値は

$$2\pi i(1/2 + 1/2) = 2\pi i.$$