

単位円板上の調和関数 Φ で次の条件を満たすものを求めよ .

(1) 単位円周上で

$$\Phi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta \leq \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 < \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

(ヒント : $T(1) = 0, T(i) = \infty, T(-i) = i$ をみたす一次分数変換を使う .)

[解答]

$$\Phi(z) = \frac{\arg(T(z))}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad T(z) = (i-1) \cdot \frac{z-1}{z-i}$$

(2) 単位円周上で

$$\Phi(e^{i\theta}) = \cos^3 \theta$$

(ヒント : $\cos^3 \theta$ のフーリエ展開を計算する . $\cos^3 z = (e^{iz} + e^{-iz})^3/8$ を使う .)

[解答]

$$\cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}$$

なので

$$\Phi(z) = \frac{z^3 + 3z}{4}$$