小テスト No. 10　　　　学籍番号と名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の条件をみたす関数を求めよ：

(1) $f(z)$ は $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ で定義された調和関数で D の境界の $|z| = 1$ の部分で $f(z) = 0$，$|z| = 2$ の部分で $f(z) = 1$ をみたす.

[**解答**] 授業中に述べたように原点を中心とする回転で変化しない関数（つまり原点からの距離だけの関数）が調和関数になるのは

$$f(z) = a \ln |z| + b$$

の場合である．条件から $b = 0$, $a \ln 2 + b = 1$ であるので求める関数は

$$f(z) = \frac{\ln |z|}{\ln 2}$$

(2) $g(z)$ は $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 0, \Im(z) \geq 0\}$ で定義された調和関数で D の境界の $\Re(z) = 0$ の部分で $g(z) = 1$，$\Im(z) = 0$ の部分で $g(z) = 0$ をみたす. ($\arg(z) = \Re(\ln z)$ が調和関数であることを使う.）

ヒントから

$$g(z) = a \arg(z) + b$$

は調和関数である．条件に合わせて a, b をとると,

$$g(z) = \frac{2 \arg(z)}{\pi}$$