中間テスト問題 (B)

問題 1 次の問いに答えよ． *(20)*

1. 関数 $f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$ が調和関数であることを示せ．

2. 上の関数 f の共役調和関数 g を求めよ．

[**解答**] 1. 定義に基づいて計算すれば $\Delta f\equiv 0$ であるので，調和関数である．
２．$4x^3y-4xy^3+$ 定数．（求め方については教科書２６ページ参照．

問題 2 関数 $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4+i}$ について下の問いに答えよ． *(30)*

1. f の極を全て求め，極表示で表せ．

2. 部分分数分解せよ．（*1.* の解を使ってよい．）

3. 曲線 $C:[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto 2\cos t+2i\sin t$ に沿う積分 $\int_C f(z)dz$ の定義を示し，留数積分法で値を求めよ．

[**解答**] 1. $z^4=-i$ の解で $\zeta_k=\exp(-i\pi/8+i\pi k/2)$，$k=0,1,2,3$． ２．極 ζ_k は単純極で留数は $1/4$ であるので

$$f(z)=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{4(z-\zeta_k)}$$

３．求める積分の値は留数積分法により，$2\pi i\sum_{k=0}^{3}(1/4)=2\pi i$.

問題 3　1次分数変換 $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が $T(-i) = 0$, $T(0) = -i$, $T(i) = \infty$ を満たすとする．次の問いに答えよ．*(30)*

1. T と T^{-1} を求めよ．
2. T による単位円盤 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}$ の像を求め，図示せよ．

[**解答**] 1．$T(z) = (iz-1)/(z-i)$, $T^{-1}(z) = (iz-i)/(z-i)$．2．複素平面のうち，実軸の下の部分と無限遠点．(単位円周の像は $T(-i) = 0$, $T(i) = \infty$,$T(1) = -1$ と円円対応から実軸になる．従って円盤の内部は実軸の上か下かのどちらか．例えば $T(0) = -i$ から下側であることがわかる．

問題 4 以下の問いに答えよ．*(20)*

1. $(1+\sqrt{3}i)^i$ を求めよ．
2. 指数関数 $w = \cos z$ による次の領域の像を求めよ：

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/3 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \pi/3,\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\}$$

(注意：上の小問 2 は試験中に訂正した後のもの.)

[**解答**] 1．定義から

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3}i)^i &= \exp(i\log(1-\sqrt{3}i)) = \exp(i(\log 2 - \pi i/3 + 2n\pi i)\\ &= e^{\pi/4-2n\pi}(\cos(\log 2) + i\sin(\log 2))\end{aligned}$$

2．$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$ であることから，求める領域は楕円 $(x/\cosh 1)^2 + (y/\sinh 1)^2 = 1$ と楕円 $(x/\cosh 2)^2 + (y/\sinh 2)^2 = 1$ の間の部分のうち，双曲線 $(x/\cos(\pi/3))^2 - (y/\sin(\pi/3))^2 = 1$ の右側にある部分.