中間テスト問題 (A)

問題 1 次の問いに答えよ．*(20)*

1. 関数 $f(x,y)=x^3-x^2+(1-3x)y^2$ が調和関数であることを示せ．

2. 上の関数 f の共役調和関数 g を求めよ．

[**解答**] 1. 定義に基づいて計算すれば $\Delta f\equiv 0$ であるので，調和関数である．
２．$-xy+3x^2y-y^3$．（求め方については教科書２６ページ参照．

問題 2 関数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4-i}$ について下の問いに答えよ．*(30)*

1. f の極を全て求め，極表示で表せ．

2. $f(z)$ を部分分数分解せよ．（*1.* の解を使ってよい．）

3. 閉曲線 $C:[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto 2\cos t+2i\sin t$ に沿う積分 $\int_C f(z)dz$ の定義を示し，留数積分法で値を求めよ．

[**解答**] 1. $z^4=i$ の解で $\zeta_k=\exp(i\pi/8+i\pi k/2)$，$k=0,1,2,3$．２．極 ζ_k は単純極で留数は $(4\zeta_k)^{-1}$ であるので

$$f(z)=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{4\zeta_k(z-\zeta_k)}$$

３．求める積分の値は留数積分法により，$2\pi i\sum_{k=0}^{3}(4\zeta_k)^{-1}=0$.

問題 3 一次分数変換 $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が $T(i) = 1$, $T(1) = \infty$, $T(\infty) = i$ を満たすとする．次の問いに答えよ．*(30)*

1. T と T^{-1} を求めよ．

2. T による単位円盤 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \le 1\}$ の像を求め，図示せよ．

[**解答**] 1．$T(z) = (iz+i)/(z-1)$, $T^{-1}(z) = (z+i)/(z-i)$．2．複素平面のうち，実軸の下の部分と無限遠点.（単位円周の像は $T(i) = 1$, $T(1) = \infty$, $T(-1) = 0$ と円円対応から実軸になる．従って円盤の内部は実軸の上か下かのどちらかに移される．例えば $T(0) = -i$ より下側であることがわかる.）

問題 4 以下の問いに答えよ．*(20)*

1. $(1-i)^i$ を求めよ．

2. 指数関数 $w = \sin z$ による次の領域の像を図示せよ：

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \pi/2,\ 1 \le \mathrm{Im}(z) \le 2\}$$

（注意：上の小問 2 は試験中に訂正した後のもの.）

[**解答**] 1．定義から

$$\begin{aligned}(1-i)^i &= \exp(i\log(1-i)) = \exp(i((1/2)\log 2 - \pi i/4 + 2n\pi i) \\ &= e^{\pi/4-2n\pi}(\cos((1/2)\log 2) + i\sin(1/2)\log 2))\end{aligned}$$

2．$\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ であることから，求める領域は楕円 $(x/\cosh 1)^2 + (y/\sinh 1)^2 = 1$ と楕円 $(x/\cosh 2)^2 + (y/\sinh 2)^2 = 1$ の間の部分のうち，第 1 象限にある部分.