# 線形代数学・同演習Ａ　　期末テスト　（８月４日実施）

**1**　次の連立１次方程式について，次の問いに答えよ．

$$\begin{aligned} 3y + 3z - 2w &= -4 \\ x + y + 2z + 3w &= 2 \\ x + 2y + 3z + 2w &= 1 \\ x + 3y + 4z + 2w &= -1 \end{aligned}$$

(1) 拡大係数行列を書き出し，それを簡約化して階数を求めよ．

(2) 解を全て求めよ．

**答:** (1) 拡大係数行列の簡約化は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で階数は３．
(2) 解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ が正則行列であるかどうか判定し，正則であるならば逆行列を求めよ．　**答:** (1) $A$ は正則でない．$B$ は正則で逆行列は

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 31 & -17 & -22 \\ 9 & -5 & -6 \\ -17 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき, 行列式 $|A|$, $|AB|$, $|A^{-1}BA|$ を求めよ.

**答:** $|A| = 12$, $|B| = -4$ である．このことと行列式の積についての性質を用いれば

$$|AB| = |A||B| = -48 \qquad |A^{-1}BA| = |A^{-1}||B||A| = |B| = -4.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の行列について問いに答えよ．

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 14 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|C|$ を求めよ．

(2) 逆行列の $(3,2)$ 成分を求めよ．

**答:**(1) $-196$ (2) 余因子行列の $(3,2)$ 成分は

$$(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

で，逆行列の $(3,2)$ 成分はその $1/|C|$ 倍であるので 0.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $xy$ 平面上の 3 直線

$$\ell_i : a_i x + b_i y = c_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 3 直線が 1 点で交わるとき，等式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 一般に，上の等式が成り立つのは 3 直線がどのような関係にあるときか？

**答:**(1) 条件は同次連立方程式

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つことを意味している．そのための必要十分条件（の一つは）係数行列の行列式が 0 であることである．
(2) 等式が成り立つための必要十分条件は同次連立方程式が $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つこと．$x_3 \neq 0$ のときは (1) での議論から 3 直線は $(x_1/x_3, x_2/x_3)$ を通る．$x_3 \neq 0$ であるときは 3 直線の方向ベクトルが $(x_1, x_2)$ と直交するので 3 直線は平行になる．よって等式が成り立つのは 3 直線が 1 点で交わる，または，3 直線が平行である場合.（平行は重なる場合を含める．また，答えの 2 つの条件を同時に満たす場合もある.）