線形代数・同演習 A　　講義プリント

複素数（Complex number）

複素数は $x+iy$（x, y は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）と表される数で，その全体を $\mathbb{C}$ で表す．複素数の加減乗除は $i^2=-1$ という関係に基づいて自然に定義される：

$$
\begin{aligned}
&(x_1+y_1i) \pm (x_2+y_2i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i \qquad \text{（複合同順）}\\
&(x_1+y_1i) \cdot (x_2+y_2i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)i\\
&(x_1+y_1i)/(x_2+y_2i) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{-x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2}{x_2^2+y_2^2} \cdot i
\end{aligned}
$$

加減乗除については実数の場合と同様の，結合・交換・分配法則が成立する．

問 1 上の商の定義が自然である事を説明しなさい．

複素数 $z=x+yi \in \mathbb{C}$ について，その**複素共役**（*complex conjugate*）を $\overline{z}=x-yi$ で定義する．特に

$$z \cdot \overline{z} = x^2+y^2 \geq 0$$

であり，等号は $z=0$ の場合のみ成り立つ．そこで複素数 z の**絶対値**（*absolute value*）を $|z|=\sqrt{z \cdot \overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ で定義する．

複素平面 (Complex plane)

複素数の全体 $\mathbb{C}$ は対応 $x+iy \mapsto (x,y)$ によって 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視される．このように複素数の全体と同一視された平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面と呼ぶ．複素数 $z \neq 0$ を平面上の点と見なしたときの極座標を (r,θ) とする．この θ を z の**偏角** *(argument)* と呼び，$\arg(z)$ と表す.（極座標の場合と同様に偏角 $\arg(z)$ には 2π の整数倍の任意性を認める事にする.）このとき z を

$$z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r=|z|,\ \theta=\arg(z)$$

と表す事ができる．これを複素数の**極表示**（*polar representation*）という．

複素数の演算のうち，和と差および実数倍は複素平面で考えるとベクトルとしての演算と同一視される．積と商については次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)\\
&|z/w| = |z|/|w| \qquad \arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)
\end{aligned}
$$

これらを利用すると複素数の積や商は（成分計算でない方法で）計算できる．

問 2 $(1+i)$ の絶対値と偏角を求め，$(1+i)^n$ を計算せよ．
問 3 方程式 $z^6=1$ の解を偏角と絶対値の関係に注目して求めよ.（解は六つある.）一般に $z^n=a$（$a \in \mathbb{C}$）の解についても考えよ．

オイラー (Euler）の公式

複素数 $z = x + iy$ について，指数関数 e^z を

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

と定義する[1]この指数関数を使うと，z の極表示は

$$z = r \cdot e^{i\theta} = e^a \qquad (r = |z|,\ \theta = \arg(z),\ a = \log|z| + i\arg(z))$$

と表すことができる．また積や商と絶対値・偏角の関係は「指数法則」

$$e^a e^b = e^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

と同じ事になる．

問 4 $z = e^a$, $w = e^b$ と表すことでこのことを確かめよ．
問 5 $e^{inx} = (e^{ix})^n$ の両辺を比べる事で，$\sin$, $\cos$ の n 倍角の公式を作れ．

複素数の指数関数を用いると三角関数は

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

と表すことができる．この表示を用いると三角関数を考えるとき便利な事が多い．

問 6 二項定理を用いて $\cos^n x$ を $\cos kx$, $k = 1, 2, \cdots, n$ で表す公式を作れ．

[1] この定義は一見すると唐突であるが，いろいろな意味で自然であることが後からわかる．