
微分積分学 中間テスト (解答)

1 (10点 × 3) (1) $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

(2)

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} = x - \frac{x^2}{2} + o(|x^2|)$$

コメント：設問がやや曖昧であったので，剰余項が2次でもよい．

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{\log(1+x) - x\}^4}{\{\log(1+x)\}^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2/2 + o(x^2))^4}{(x + o(x))^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2 + o(1))^4}{(1 + o(1))^8} = 2^{-4}$$

2 (20点 × 2) (1) $\partial z/\partial x = 2xy^3 \cos(x^2y^3)$, $\partial z/\partial y = 3x^2y^2 \cos(x^2y^3)$

(2) 合成微分の法則から

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (2y + 3x)xy^2 \cos(x^2y^3) \\ &= (5u + v)(u + v)(u - v)^2 \cos((u + v)^2(u - v)^3) \end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -(u - 5v)(u + v)(u - v)^2 \cos((u + v)^2(u - v)^3).$$

3 (10点 × 3) (1) 連立方程式を解いて $(a, b) = (3/7, 1/7)$

(2) 2次までのテイラー展開は

$$f(x, y) = (2/7) - (x - 3/7)^2 - (x - 3/7)(y - 1/7) - 2(y - 1/7)^2 + o(x^2 + y^2)$$

コメント： $(x - 3/7)$ が単に x になっているという間違いが非常に多かった．点 (a, b) のまわりで考えていることに注意．

(3) $D = 7 > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ なので極大になる．