第6章　1 次 変 換

この章では非常に特別な形をした関数（1次変換）を扱う．何か問題をとくときに，1次変換をしてときやすい形に写すことはしばしば行われる．そればかりか，1変数関数論においては本質的重要性をもっている（6.7節）．

6.1　1 次 変 換

この章では，

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ (ad-bc\neq 0)$$

という形の関数を考える．この関数を1次変換といい，その全体を $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$[1] とかく．リーマン球面 $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{P}$ の上へ1対1正則に写す関数の全体になっている（5.2節参照，とくに問1）．$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ は，$S,\ T\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ に対し合成 $S\circ T(z)=S(T(z))$ を乗法とみて群をつくる．複素数の2次正方行列で逆行列をもつものの全体の作る群を $GL(2,\boldsymbol{C})$ とかき，$GL(2,\boldsymbol{C})$ から $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ の上への写像 Φ を

$$\Phi:\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

で定義すると，これは準同形写像である．群という言葉になじみのうすい読者のためにいっておくと，以上のことは次の問題の内容が成立するというだけのことである．

問1　(i)　$S,\ T,\ U\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})\Rightarrow (S\circ T)\circ U=S\circ(T\circ U)$,

(ii)　$S\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})\Rightarrow S^{-1}\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$[2],

(iii)　恒等写像 $I(z)=z$ は $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ の元，

(iv)　$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ の元の合成，逆写像の計算には行列の計算を用いてよい，すなわち，$A,\ B\in GL(2,\boldsymbol{C})$ に対し $\Phi(AB)=\Phi(A)\circ\Phi(B)$，$\Phi(A^{-1})=\Phi(A)^{-1}$．

1)　automorphism．自己同形（52頁，問2およびその前後を参照）．
2)　S^{-1} は S の逆写像．

問2　$S(z)=(2z+1)/(z+1)$，$T(z)=(3z+1)/(2z+1)$，$U(z)=(z-3)/(z+2)$ のとき，(i)　$S\circ T(z)$，(ii)　$T\circ S(z)$，(iii)　$U^{-1}(z)$，(iv)　$(S\circ T)\circ U(z)$ を求めよ．

6.2　非 調 和 比

1次変換の性質を調べるのに，非調和比という1次変換で不変な量を導入してそれを手掛りにしたい．1次変換

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ (ad-bc\neq 0)$$

は $\boldsymbol{P}$ から $\boldsymbol{P}$ の上への1対1写像であり，$c\neq 0$ なら $S(\infty)=a/c$，$S(-d/c)=\infty$，$c=0$ なら $S(\infty)=\infty$ となることを注意しておく．

補題 6.2.1　$z_1,\ z_2,\ z_3$ を $\boldsymbol{P}$ の相異なる3点とすると，$S\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ で，$S(z_1)=1$，$S(z_2)=0$，$S(z_3)=\infty$ をみたすものがある．

証明　$z_1,\ z_2,\ z_3$ が無限遠点 ∞ と異なれば，$S(z)=\{(z-z_2)/(z-z_3)\}\cdot\{(z_1-z_3)/(z_1-z_2)\}$ でよい．z_i が無限遠点のときには，この式で z_i を ∞ にとばせばよい．つまり，$z_1=\infty$ なら $S(z)=(z-z_2)/(z-z_3)$，$z_2=\infty$ なら $S(z)=(z_1-z_3)/(z-z_3)$，$z_3=\infty$ なら $S(z)=(z-z_2)/(z_1-z_2)$ が求めるものである．

注意　この章では無限遠点を別扱いにしなければならないことが多い．しかし，この証明のように，∞ でない場合を考えその点を ∞ に収束させて ∞ の場合がえられるだろう．いちいちこの例外をことわらず，省略することがある．

補題 6.2.2　$1,\ 0,\ \infty$ を動かさない $S\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ は恒等写像 I である．

証明　$S(z)=(az+b)/(cz+d)$ で，$S(1)=1$，$S(0)=0$，$S(\infty)=\infty$ とせよ．容易に，$S(z)=z$ をうる．

定理 6.2.3（3点を3点に写す1次変換の存在と一意性）

$\{z_1,\ z_2,\ z_3\}$，$\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}$ の相異なる3点とする．このとき，$S\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ で $S(z_i)=w_i$ $(i=1,2,3)$ をみたすものは存在しただ1つ．

証明　存在　補題6.2.1により，$T\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ は $T(z_1)=1$，$T(z_2)=0$，$T(z_3)=\infty$ をみたし，$U\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ を $U(w_1)=1$，$U(w_2)=0$，$U(w_3)=\infty$

をみたすものとする．$S=U^{-1}\circ T$ が求めるものである．

一意性 $S(z_i)=w_i\ (i=1,2,3)$, $S_1(z_i)=w_i\ (i=1,2,3)$ としよう．同じ U を使って，$U\circ S_1\circ S^{-1}\circ U^{-1}$ を考えると $1, 0, \infty$ を動かさず，前補題より $U\circ S_1\circ S^{-1}\circ U^{-1}=I$ となる．左から U^{-1}，右から $U\circ S$ をかけて $S_1=S$ をうる．

問1 i を0に，∞ を2に，0を1に写す1次変換を求めよ．

問2 $\{z_1, z_2\}$, $\{w_1, w_2\}$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}$ の相異なる2点とすると，$S(z_i)=w_i\ (i=1, 2)$ をみたす1次変換 S は無数にある．$\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}$ の相異なる4点とすると，$S(z_i)=w_i\ (i=1, 2, 3, 4)$ をみたす1次変換 S は存在するとは限らない．

定義 6.2.4 z_1, z_2, z_3, z_4 を $\boldsymbol{P}$ の相異なる4点とするとき，z_2 を1に z_3 を0に z_4 を ∞ に写す1次変換 S をとり，S による z_1 の像 $S(z_1)$ を z_1, z_2, z_3, z_4 の**非調和比**といい，(z_1, z_2, z_3, z_4) とかく．

前定理によりこの S は一意的で，補題6.2.1を用いて書き下すと

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

である．(z_1, z_2, z_3, z_4 の中に ∞ があるときは，この式でその z_i を $z_i\to\infty$ とする．)

問3 次の式を証明せよ．

(i) $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)=\overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$,

(ii) $c\neq 0$ なら，$(cz_1, cz_2, cz_3, cz_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

定理 6.2.5（非調和比は1次変換で不変）

任意の $T\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ と任意の相異なる4点に対し，

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

証明 z_2 を1, z_3 を0, z_4 を ∞ に写す1次変換を S, $T(z_2)$ を1, $T(z_3)$ を0, $T(z_4)$ を ∞ に写す1次変換を U としよう．$U\circ T$ は z_2 を1, z_3 を0, z_4 を ∞ に写すから $U\circ T=S$ である．ゆえに，$S(z_1)=U(T(z_1))$ で，非調和比の定義からこれは $(z_1, z_2, z_3, z_4)=(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ と同じである．

問4 a を α に，b を β に，c を γ に写す1次変換は，等式 $(z, a, b, c)=(w, \alpha, \beta, \gamma)$ を w についてとくことにより求まる．この方法で，1を2に，2を i に，3を -1 に写す1次変換を求めよ．

問5 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}$ の相異なる4点とするとき，$S(z_i)=w_i\ (i=1, 2, 3, 4)$ をみたす $S\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ が存在するための必要十分条件を非調和比を用いてかけ．

6.3 円 円 対 応

非調和比の不変性を用いて1次変換の性質を調べよう．1次変換は複素平面 $\boldsymbol{C}$ ではなくてリーマン球面 $\boldsymbol{P}$ で考察するべきであり，$\boldsymbol{C}$ 上の円周は $\boldsymbol{P}$ 上の円周に，$\boldsymbol{C}$ 上の直線は $\boldsymbol{P}$ 上の ∞ を通る円周に対応する．それで，これからは直線は円周の特別なものとみなし，**円周といえば直線も含むものとする**．

補題 6.3.1 $\boldsymbol{P}$ 上の相異なる4点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円周上にある $\Leftrightarrow$ (z_1, z_2, z_3, z_4) が実数．

定理 6.3.2（1次変換による円円対応）

円周 C の1次変換 S による像 $S(C)$ はまた円周である．

証明 補題を仮定すれば定理の証明は容易である．円周 C 上に3点 z_1, z_2, z_3 をとると，$S(z_1), S(z_2), S(z_3)$ は1つの円周 C' を定める．z を C 上の任意の点とすると，(z, z_1, z_2, z_3) は補題より実数で，それは非調和比の不変性から $(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ に等しく，$S(z)$ は C' 上にあることが補題からまたわかる．ゆえに $S(C)\subset C'$ となり，S^{-1} も1次変換だから $S(C)=C'$ がいえる．

補題の証明 まず，4点 z_i が中心 a，半径 r の円周上にあるとしよう．$z_i-a=r^2/(\bar{z}_i-\bar{a})\ (i=1, 2, 3, 4)$ をみたす．

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\underset{(イ)}{=} (z_1-a, z_2-a, z_3-a, z_4-a)\\ &= \left(\frac{r^2}{\bar{z}_1-\bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_2-\bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_3-\bar{a}}, \frac{r^2}{\bar{z}_4-\bar{a}}\right)\\ &= \overline{\left(\frac{r^2}{z_1-a}, \frac{r^2}{z_2-a}, \frac{r^2}{z_3-a}, \frac{r^2}{z_4-a}\right)}\\ &\underset{(ロ)}{=} \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}\end{aligned}$$

z_1-a

となる．ここで，(イ)は１次変換 $z \mapsto z-a$ を，(ロ)は $z \mapsto (r^2/z)+a$ をほどこし非調和比の不変性を使った．これで (z_1, z_2, z_3, z_4) が実数になることがわかった．

次に，４点 z_i が直線 $z=a+tb$ ($b \neq 0$, t は実数) 上にあるとしよう．$z_i=a+t_ib$ (t_i は実数) とする．$(z_1, z_2, z_3, z_4)=(z_1-a, z_2-a, z_3-a, z_4-a)=(t_1b, t_2b, t_3b, t_4b)=(t_1, t_2, t_3, t_4)$ で，これは実数になる．

次に，(z_1, z_2, z_3, z_4) が実数と仮定する．まず，z_2, z_3, z_4 が中心 a，半径 r の円周上にある場合を考える．前半と同じ計算をして (z_1, z_2, z_3, z_4) が実数に注意すれば，$(z_1, z_2, z_3, z_4)=(r^2/(\bar{z}_1-\bar{a})+a, z_2, z_3, z_4)$ がえられ，$z_1=r^2/(\bar{z}_1-\bar{a})+a$，すなわち z_1 が同じ円周上にあることがわかる．z_2, z_3, z_4 が直線上にあるときは，$z_i=a+t_ib$ ($b \neq 0$, t_i は実数, $i=2, 3, 4$) とかくと，$(z_1, z_2, z_3, z_4)=((z_1-a)/b, t_2, t_3, t_4)$ となり，これと t_i が実数だから

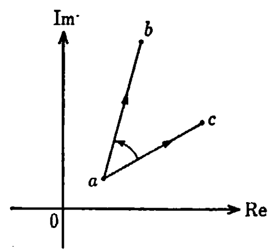
$$((z_1-a)/b, t_2, t_3, t_4) = \overline{((z_1-a)/b, t_2, t_3, t_4)}$$
$$= (\overline{(z_1-a)/b}, t_2, t_3, t_4)$$

となり，$(z_1-a)/b=t_1$ が実数になる．$z_1=a+t_1b$ で，z_1 も同じ直線上にある．

幾何学的説明[1]　実数ということは偏角が０か π ということである．

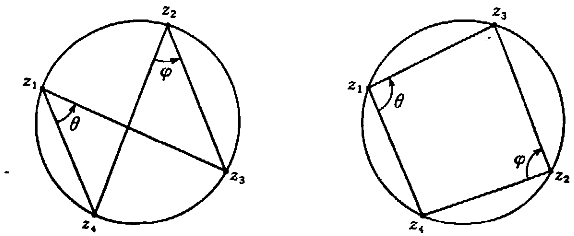
$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} - \arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

で，複素数 $b-a$ は a から b に向かうベクトルをあらわし $\arg(b-a)$ はそれの実軸とのなす角であり，$\arg(b-a)/(c-a)=\arg(b-a)-\arg(c-a)$ は線分 $\overrightarrow{ac}$ から線分 $\overrightarrow{ab}$ へのなす角をあらわすことに注意せよ．(偏角の多価性 (2π の整数倍の差) とか，点の位置関係は適当に解釈する．図示による‘証明’はこの点のあいまいさがつきまとう．) ゆえに，$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$ または π は，次頁の図で $\theta-\varphi=0$ または π を意味し，‘円周角の一定’あるいは‘円の内接四角形の対頂角の和は π’ということを意味している．



1) 直観的にかく．お話として読んでほしい．

１次変換 S により円周 C は円周 $S(C)$ に写るが，そのとき，C の‘内部’，‘外部’はそれぞれ $S(C)$ の‘内部’，‘外部’に写る．これは‘正しい’が，さて，リーマン球面上に円周 C があるとき C の内部とは何か？（例えば C が赤道なら．）円周 C 上に３



点 z_2, z_3, z_4 を（順序をこの順につけて）とると C に向きが定まる．C の補集合は２つの連結成分にわかれ，$\mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ は z_1 がどちらの成分に属するかで正か負になる．(z_1 が C 上にあれば０である．) z_1 が C の向きの左側の成分に属すれば負，右側なら正となることは，上の図からわかる．(z_1 を円の内外へ少し動かして θ の増減をみよ．$\theta-\varphi=\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)$ である．) 円周 C 上に３点 z_2, z_3, z_4 を順にとり向きをつけ，$\{z_1 | \mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)<0\}$ をかりに C の内側というと，円周 $S(C)$ を $S(z_2)$, $S(z_3)$, $S(z_4)$ により向きをつけると，１次変換 S によって C の内側は $S(C)$ の内側に写ることが，非調和比の不変性からわかる．

6.4 対称点保存

次のように定義すれば，その次の定理は非調和比の不変性からほとんど明らかであろう．

定義 6.4.1　点 z, z^* が円周 C に関し対称 $\Leftrightarrow$ C 上に相異なる３点 z_1, z_2, z_3 があり，$(z, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z^*, z_1, z_2, z_3)}$.

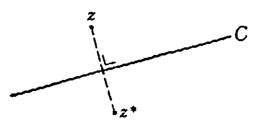
定理 6.4.2 (対称点保存)　S を１次変換，z と z^* は円周 C に関し対称 $\Rightarrow$ $S(z)$ と $S(z^*)$ は $S(C)$ に関し対称．

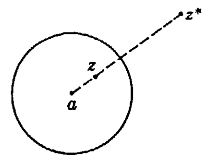
しかし，これでは対称の意味がはっきりしないので，次の補題を示す．上の定義では，$(z, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z^*, z_1, z_2, z_3)}$ をみたす C 上の３点 z_1, z_2, z_3 が１組あればよいようにかいたが，そのときには C 上の任意の相異なる３点の組に対しても同じ等式が成り立つこともわかるだろう．

補題 6.4.3　点 z, z^* が円周 C に関し対称

$\Leftrightarrow$（i） C が直線のとき：C は線分 $\overrightarrow{zz^*}$ の垂直二等分線．

（ii） C が中心 a，半径 r の円周のとき：z と z^* は a からでる半直線上にあり，$|z-a|\cdot|z^*-a|=r^2$．（とくに z が中心 a なら $z^*=\infty$．）





$|z-a|\cdot|z^*-a|=r^2$

証明 まず，（i）（ii）の条件を式にかく．直線 C を $z=a+bt$（t は実数）とかく．$|b|=1$ として $b=e^{i\theta}$ としてよい．a が原点になるように平行移動し，次に $-\theta$ だけ原点を中心に回転する．つまり，$z\mapsto\zeta=e^{-i\theta}(z-a)$ とすると，直線 C は実軸になる．ζ 平面で，z, z^* の像 $e^{-i\theta}(z-a)$, $e^{-i\theta}(z^*-a)$ が実軸に関し（i）の意味で対称なのは $e^{-i\theta}(z-a)=\overline{e^{-i\theta}(z^*-a)}$ となることである．これをかきなおすと $(z-a)/b=\overline{((z^*-a)/b)}$ となる．次に円の場合，z, z^* が a からでる半直線上にあるというのは $z^*-a=k(z-a)$ $(k>0)$ とかける．

$$|z-a||z^*-a| = |z-a|^2\cdot\frac{|z^*-a|}{|z-a|} = |z-a|^2\frac{(z^*-a)}{(z-a)} = (\bar{z}-\bar{a})(z^*-a)$$

となり，（ii）の条件は $(\bar{z}-\bar{a})(z^*-a)=r^2$ とかける．逆に，この式が（ii）と同じであることもいえる．

補題の証明をする．まず，C が直線 $z=a+bt$ のとき．

$z_i=a+bt_i$（t_i は実数，$i=1, 2, 3$）とする．$(z, z_1, z_2, z_3)=(z-a, z_1-a, z_2-a, z_3-a)=(z-a, bt_1, bt_2, bt_3)=((z-a)/b, t_1, t_2, t_3)$ となる．同様に $(z^*, z_1, z_2, z_3)=((z^*-a)/b, t_1, t_2, t_3)$ で，$(z, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z^*, z_1, z_2, z_3)}$ は t_i が実数だから $(z-a)/b=\overline{((z^*-a)/b)}$ と同値，すなわち（i）と同値である．

次に，C が円 $|z-a|=r$ のとき．$z_i-a=r^2/(\bar{z}_i-\bar{a})$ $(i=1, 2, 3)$ である．

$$\begin{aligned}(z, z_1, z_2, z_3) &= (z-a,\ z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a)\\ &= (z-a,\ r^2/(\bar{z}_1-\bar{a}),\ r^2/(\bar{z}_2-\bar{a}),\ r^2/(\bar{z}_3-\bar{a}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \overline{(\bar{z}-\bar{a},\ r^2/(z_1-a),\ r^2/(z_2-a),\ r^2/(z_3-a))}\\ &\underset{(イ)}{=} \overline{\left(\frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a,\ z_1,\ z_2,\ z_3\right)}\end{aligned}$$

となる．（(イ)では，1次変換 $z\mapsto r^2/z+a$ を用いた．）ゆえに，対称の定義の式は $z^*=r^2/(\bar{z}-\bar{a})+a$，すなわち（ii）と同値である．（$z$ が中心 a なら z^* は無限遠点 ∞ になることも，上の式変形からわかる．）

6.5 単位円，上半平面の自己等角写像

正則関数は等角写像であるから（定理1.6.1），1次変換は等角写像である．まず，単位円 $\Delta=\{|z|<1\}$ を Δ の上に写す1次変換 S を求めよう．$a\in\Delta$ が原点に写るとすると，単位円周 $\partial\Delta$ に関する a の対称点は $1/\bar{a}$ だから，$1/\bar{a}$ が無限遠点に写る．ゆえに，$S(z)=c(z-a)/(\bar{a}z-1)$ となる（c は定数）．$|z|=1$ なら $|S(z)|=1$ だから，$1=|c||z-a|/|\bar{a}z-1|=|c||z-a|/(|\bar{z}||\bar{a}z-1|)=|c||z-a|/|\bar{a}-\bar{z}|=|c|$ がわかる．

$$S(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1},\quad (|a|<1,\ 0\leqq\theta<2\pi) \tag{6.5.1}$$

が求めるものである．

問 1 (6.5.1) の S が単位円 Δ を Δ の上に1対1に写すことを直接に確かめよ．

次に，上半平面 $H=\{z;\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ を単位円 Δ の上に写す1次変換 T を求めよう．$a\in H$ が $0\in\Delta$ に写るとすると，a の ∂H に関する対称点 $\bar{a}$ が ∞ に写ることになり，$T(z)=c(z-a)/(z-\bar{a})$ がわかる．$z\in\partial H$，つまり z が実数のとき $|T(z)|=1$ より，$1=|c||z-a|/|z-\bar{a}|=|c|$ をうる．ゆえに，

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\quad (\mathrm{Im}\,a>0,\ 0\leqq\theta<2\pi) \tag{6.5.2}$$

が求めるものである．

問 2 (6.5.2) の T が H を Δ の上に1対1に写すことを直接に確かめよ．

問 3 単位円 Δ を上半平面 H の上に写す1次変換を求めよ．

次に，上半平面 H を H に写す1次変換 S を求めよう．実軸上の3点 α_i が実軸上の3点 β_i に写るから，$(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(S(z), \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ となり，これを $S(z)$ についてとくと，$S(z)=(az+b)/(cz+d)$（a, b, c, d は実数）

の形になることがわかる．逆に，a, b, c, d が実数なら z が実数のとき $S(z)$ も実数になる．$\mathrm{Im}\,S(z)=(ad-bc)(\mathrm{Im}\,z/|cz+d|^2)$ となり，

$$(6.5.3)\qquad S(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ (a,\ b,\ c,\ d\ \text{は実数},\ ad-bc>0)$$

が H を H に写す．分母分子を定数倍して $ad-bc=1$ にできる．

以上のようにして，$\varDelta$ や H を相互に写す1次変換を求めたが，次節で証明するように正則関数による写像（等角写像）がそれだけであることがわかり，次の定理をうる．

定理 6.5.1 （i） 単位円 $\varDelta$ を $\varDelta$ の上へ1対1に写す正則関数 $f(z)$ は

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1},\ (|a|<1,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

の形をしており，それに限る．

（ii） 上半平面 H を H の上へ1対1に写す正則関数 $f(z)$ は

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ (a,\ b,\ c,\ d\ \text{は実数},\ ad-bc=1)$$

の形をしており，それに限る．

（iii） 上半平面 H を単位円 $\varDelta$ の上へ1対1に写す正則関数 $f(z)$ は

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\ (\mathrm{Im}\,a>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

の形をしており，それに限る．

問4　円の外 $\{|z-2|>2\}$ を上半平面へ写す1次変換を1つ求めよ．

問5　$\{z;\ 0<\arg z<\pi/3\}$ を単位円の上へ1対1に写す等角写像を求めよ．（ヒント：まず3乗してみる．）

問6　半円 $\{z;\ |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ を単位円の上へ1対1に写す等角写像を求めよ．（ヒント：$|z|=1$ と実軸との交点を1次変換で ∞ に写してみよ．）

問7　1/4 円 $\{z;\ |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,z>0\}$ を単位円の上へ1対1に写す等角写像を求めよ．（ヒント：まず2乗せよ．）

6.6　シュヴァルツの補題と写像の一意性

定理 6.5.1 の一意性を証明するために，次章でも重要な役割を果たす補題を述べる．

補題 6.6.1（シュヴァルツ）　$f(z)$ は $\varDelta=\{|z|<1\}$ で正則，$|f(z)|<1$ とする．（つまり，$\varDelta$ から $\varDelta$ への正則写像．）さらに，$f(0)=0$ をみたすなら，任意の $z\in\varDelta$ で $|f(z)|\leqq|z|$ が成立する．

さらにこのとき，$|f(z_0)|=|z_0|$ をみたす点 $z_0\in\varDelta$，$z_0\neq0$ が存在すれば，$f(z)=cz$，$|c|=1$ である．

証明　$f(0)=0$ より，$\varphi(z)=f(z)/z$ は $\varphi(0)=f'(0)$ とおけば原点も含めて $\varDelta$ で正則である．$0<r<1$ に r をとり，$|z|\leqq r$ で最大値の原理（系 2.2.2）を用いると，

$$\sup_{|z|\leqq r}|\varphi(z)|=\sup_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\frac{1}{r}\sup_{|z|=r}|f(z)|\leqq\frac{1}{r}$$

が成り立つ．$|z|\leqq r$ のとき，$|f(z)/z|\leqq1/r$ がわかったが，$r\to1$ として，$|z|<1$ で $|f(z)/z|\leqq1$，ゆえに $|f(z)|\leqq|z|$ がわかる．

1点 $z_0\in\varDelta$，$z_0\neq0$ で $|f(z_0)|=|z_0|$ となると，$\varphi(z)=f(z)/z$ は z_0 で最大値をとり，ゆえに定数関数 c になり，$|c|=1$ である．

系 6.6.2　$f(z)$ は $|z|<1$ で正則，$|f(z)|<1$ をみたし，$f(0)=0$ とする．このとき，$|f'(0)|\leqq1$ である．ここで，$|f'(0)|=1$ が成立するのは，$f(z)=cz$，$|c|=1$ のときに限る．

証明　補題の証明中の $\varphi(z)$ に，$z=0$ で最大値の原理を適用すればよい．

定理 6.5.1 の一意性の証明　（i） φ を単位円 $\varDelta$ を $\varDelta$ の上へ1対1正則に写す写像とする．このとき，φ は (6.5.1) の形の1次変換であることを示す．

φ は上への写像だから $\varphi(a)=0$ をみたす $a\in\varDelta$ がある．a を0に写し $\varDelta$ を $\varDelta$ の上に写す1次変換 $\zeta=S(z)=(z-a)/(\bar{a}z-1)$ をとる．$\varphi\circ S^{-1}(\zeta)$ は $\varDelta$ を $\varDelta$ の上へ1対1に写し $\varphi\circ S^{-1}(0)=0$ であり，ゆえに，$(\varphi\circ S^{-1})^{-1}(w)$ も同様である．この両者にシュヴァルツの補題を用いて，$|\varphi\circ S^{-1}(\zeta)|\leqq|\zeta|$，$|(\varphi\circ S^{-1})^{-1}(w)|\leqq|w|$ をうる．第2の不等式で $w=\varphi\circ S^{-1}(\zeta)$ とおくと，$|\zeta|\leqq|\varphi\circ S^{-1}(\zeta)|$ となり，第1の不等式は等号で成立し，ゆえに，$\varphi\circ S^{-1}(\zeta)=c\zeta$，$|c|=1$ がわかる．$\zeta=S(z)$ とおくと，$\varphi(z)=cS(z)=c(z-a)/(\bar{a}z-1)$ となる．

（ii） φ は上半平面 H を H の上へ1対1正則に写すとしよう．φ はこの

とき (6.5.3) の形の1次変換になることを示す.

まず $\varphi(i)=i$ と仮定する. $S(z)=(z-i)/(z+i)$ により, 上半平面 H は単位円 $\varDelta$ に写り, i は0に写る. $S\circ\varphi\circ S^{-1}$, $(S\circ\varphi\circ S^{-1})^{-1}$ にシュヴァルツの補題を用いて, (i) $|S\circ\varphi\circ S^{-1}(\zeta)|\leqq|\zeta|$, (ii) $|(S\circ\varphi\circ S^{-1})^{-1}(\omega)|\leqq|\omega|$ が成り立ち, $\omega=S\circ\varphi\circ S^{-1}(\zeta)$ を (ii) に代入し, 結局 $|S\circ\varphi\circ S^{-1}(\zeta)|=|\zeta|$ がわかり, $S\circ\varphi\circ S^{-1}(\zeta)=c\zeta$, $|c|=1$ をうる. $\zeta=S(z)$ とおき, $S\circ\varphi(z)=cS(z)$ となる. $(\varphi(z)-i)/(\varphi(z)+i)=c(z-i)/(z+i)$ から, $\varphi(z)=\{i(1+c)z-(1-c)\}/\{(1-c)z+i(1+c)\}$ となり, $c=1$ ならば $\varphi(z)=z$, $c\neq1$ なら $|c|=1$ に注意し分母分子に $1-\bar{c}$ をかけて $\varphi(z)=\{(-2\,\mathrm{Im}\,c)z-|1-c|^2\}/\{|1-c|^2z-2\,\mathrm{Im}\,c\}$ となり φ は (6.5.3) の形である.

$\varphi(i)=\alpha+\beta i\neq i$ のとき, $\beta>0$ だから $T(z)=(z-\alpha)/\beta$ は H を H に $\alpha+\beta i$ を i に写す. $\tilde{\varphi}=T\circ\varphi$ は H を H の上へ1対1正則に写し $\tilde{\varphi}(i)=i$ だから (6.5.3) の形で, $\varphi=T^{-1}\circ\tilde{\varphi}$ もまたそうなる.

注意 φ が1次変換になることは, (i) を使えば明らかである. $\varphi(a)=b$ $(a\in H)$ として, $S(z)=(z-a)/(z+\bar{a})$, $R(w)=(w-b)/(w+\bar{b})$ とおき, $R\circ\varphi\circ S^{-1}=U$ を考えると $\varDelta$ を $\varDelta$ の上に1対1に写し, (i) より1次変換になる. $\varphi=R^{-1}\circ U\circ S$ だから φ もそうなる.

(iii) よりもっと一般なリーマンの写像定理 (定理5.7.1) の一意性の証明をしよう. D を単連結領域, f, g は D を単位円 $\varDelta$ の上へ1対1に写す正則関数で, $z_0\in D$ で $f(z_0)=g(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$, $g'(z_0)>0$ をみたすものとする. このとき, $f=g$ を示す.

$f\circ g^{-1}$, $g\circ f^{-1}$ にシュヴァルツの補題の系6.6.2を適用する. $|(f\circ g^{-1})'(0)|\leqq1$, $|(g\circ f^{-1})'(0)|\leqq1$ となるが, $g\circ f^{-1}=(f\circ g^{-1})^{-1}$ と逆関数の微分法より $(g\circ f^{-1})'(0)=1/(f\circ g^{-1})'(0)$ となり, 結局 $|(f\circ g^{-1})'(0)|=1$ となり, 系6.6.2より $f\circ g^{-1}(w)=cw$, $|c|=1$ をうる. 合成関数と逆関数の微分法より, $c=(f\circ g^{-1})'(0)=f'(z_0)/g'(z_0)$ となり, 仮定より $c>0$ ゆえに $c=1$ がわかる. $f\circ g^{-1}(w)=w$, ゆえに $f=g$ をうる.

問 上半平面 H を単位円 $\varDelta$ の上に1対1正則に写す関数は (6.5.2) の形の1次関数に限る.

6.7 1次変換の重要性

1次変換は性質がよくわかり簡単だから有用であるが, 実は本質的な意味をもっていることを証明なしにかいておく. 気軽に読んでほしい. (くわしくは, 文献〔9〕,〔10〕を参照.)

第1の事実. 任意の領域 (リーマン面でもよい) D に対し, 普遍被覆面 $\tilde{D}$ が存在する. (普遍被覆面とは単連結リーマン面 $\tilde{D}$ で, $\tilde{D}$ から D の上への正則写像 φ でちょっとした条件 (定義7.3.1参照) をみたすもの.)

第2の事実. 単連結リーマン面は, リーマン球面 $\boldsymbol{P}$ か, 全平面 $\boldsymbol{C}$ か, 単位円 $\varDelta=\{|z|<1\}$ のいずれかと解析的同形である (**ケーベの一意化定理**).

第3の事実. φ: $\tilde{D}\to D$ を普遍被覆面とし, $\tilde{D}$ の解析的自己同形群を $\mathrm{Aut}(\tilde{D})$ とかく. $\Gamma=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(\tilde{D})|\varphi\circ\sigma=\varphi\}$ は $\mathrm{Aut}(\tilde{D})$ の部分群で真に不連続で不動点なし[1] とよばれる条件をみたす. $\tilde{D}$ 上の正則 (有理形) 関数 $\tilde{f}$ で, 任意の $\sigma\in\Gamma$, $w\in\tilde{D}$ に対し $\tilde{f}(\sigma(w))=\tilde{f}(w)$ をみたすものを, Γ に関する保形関数という. このとき, D 上の正則 (有理形) 関数 f に対し $\tilde{f}=f\circ\varphi$ は Γ に関し保形関数になるし, 逆に Γ に関する保形関数 $\tilde{f}$ に対し D での正則 (有理形) 関数 f があり $\tilde{f}=f\circ\varphi$ とかける.

第4の事実. 単連結リーマン面 $\tilde{D}$ の解析的自己同形群 $\mathrm{Aut}(\tilde{D})$ の真に不連続で不動点なしの部分群 Γ をとる. $w, w'\in\tilde{D}$ に対し $w'=\sigma(w)$ となる $\sigma\in\Gamma$ が存在するとき, w, w' を Γ 同値とよび, その同値類の集合を $D=\tilde{D}/\Gamma$ とかく. D はリーマン面となり, 自然な写像 φ: $\tilde{D}\to D$ は普遍被覆面になる.

以上のことから, $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$, $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$, $\mathrm{Aut}(\varDelta)$ の真に不連続で不動点なしの部分群 Γ をすべて求めることが, すべてのリーマン面を求めることになるし, その Γ に関する保形関数がすべての正則 (有理形) 関数になる. $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ は1次変換群であるし, $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ は $z\mapsto az+b$ $(a\neq0)$ の形の1次変換の全体, $\mathrm{Aut}(\varDelta)$ は $z\mapsto e^{i\theta}((z-a)/(\bar{a}z-1))$ $(0\leqq\theta<2\pi,\ |a|<1)$ の形の1次変換の全体であり, いずれにしても1次変換の作る群である. 1変数の正則 (有理形) 関数論は, 1次変換群の (真に不連続で不動点なしの) 部分群とその保形関数の研究であるといえる.

実は, 普遍被覆面が $\boldsymbol{P}$ か $\boldsymbol{C}$ になるのは, $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{C}-\{0\}$ とトーラスだけで, その他はすべて単位円 $\varDelta$ になることがわかる. 次章でこの場合を双曲型と名づけ研究するが, 少数の例外を除きほとんどすべての領域 (リーマン面) が双曲型なのである.

---

1) $\tilde{D}$ の任意のコンパクト集合 K に対し, $\{\sigma\in\Gamma|\sigma(K)\cap K\neq\phi\}$ が有限集合になるとき, Γ は真に不連続という. 恒等写像でない任意の $\sigma\in\Gamma$ と任意の $w\in\tilde{D}$ に対し $\sigma(w)\neq w$ となるとき, Γ は不動点なしという.

多変数関数論では，（２次元以上の）単連結複素多様体はいろいろあってケーベの一意化定理のようにはいかない．また，単連結複素多様体の解析的自己同形群も複雑で，例えば２次元ユークリッド空間 C^2 の $\mathrm{Aut}(C^2)$ も大きすぎてよくわからない．

問１　$\sigma\in\mathrm{Aut}(P)$ が恒等写像でないときは，$\sigma(z)=z$ となる $z\in P$ が必ず存在する．（１つか２つのどちらかである．）

問２　$\sigma\in\mathrm{Aut}(C)$ が恒等写像でないとき，$\sigma(z)=z$ となる $z\in C$ が存在しないのは $\sigma(z)=z+b$ $(b\neq0)$ とかけるときである．

問３　$\mathrm{Aut}(C)$ の部分群 Γ が σ_n: $z\mapsto z+b_n$ $(b_n\neq0,\ \lim_{n\to\infty}b_n=0)$ を含むならば，Γ は真に不連続ではない．

注　問１から $\mathrm{Aut}(P)$ の真に不連続で不動点なしの部分群は｛恒等写像｝だけで，P を普遍被覆面とするリーマン面は P だけである．問１，問２と定理 8.1.1 から，$\mathrm{Aut}(C)$ の真に不連続で不動点なしの部分群は，｛恒等写像｝と $\omega\neq0$ があり $\Gamma_1=\{z\mapsto z+n\omega\,|\,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ と 112 頁で定義する $\Gamma_2=\Gamma(\omega_1,\ \omega_2)$ の３種類である．C/Γ_1 は平行な帯となり，定数をかけ次に e^z で写すと $C-\{0\}$ に写る．C/Γ_2 はトーラスで，それは第８章で研究する．

第７章　ポアンカレ計量

この章では，単位円（＝上半平面）にポアンカレ計量とよばれる計量をいれ，それから双曲型領域に正則写像が「距離」を縮小する写像となるような「距離」を定義する．それを用いて，関数論全体の中で重要な位置をしめるピカールの大定理を証明し，さらに正規族について論ずる．（なお，その途中で，複素平面から２点を抜いた残りが双曲型領域であることを用いるが，その証明は 8.8 節に残される．）最後の節の円環領域は，複素多様体のモジュラス，解析的自己同形群などについて，最も簡単な実例を提供するもので，覚えておいて損はしない．

7.1　ベルグマン計量

この節は読まなくてもよい．ただ次節においてポアンカレ計量を頭ごなしに定義するので，その弁解をする．

D を複素平面の領域とし，

$$L_h^2(D)=\left\{f(z);\ D\text{ で正則},\ \iint_D|f(z)|^2dxdy<+\infty\right\}$$

とおく．$f,\ g\in L_h^2(D)$ に対し，

$$(f,\ g)=\iint_D f(z)\overline{g(z)}dxdy$$

と定義する．$L_h^2(D)$ は普通の関数の和と定数倍の演算で線形空間（複素数体上の）となり，$(f,\ g)$ は内積を定義する．$\|f\|=\sqrt{(f,\ f)}$ とおく．次の定理が成り立ち，$L_h^2(D)$ は完備で，ヒルベルト空間になる．

定理 7.1.1　$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}\subset L_h^2(D)$．任意の $\varepsilon>0$ に対し番号 n が定まり，$n<p<q$ なら $\|f_p-f_q\|<\varepsilon$ をみたすとする．このとき，$f\in L_h^2(D)$ が存在し，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$．

証明は方針だけかいて読者にまかす．まず，$f(z)$ が $\varDelta_r=\{z;\ |z-z_0|\leq r\}$ で正則ならば，$|f(z_0)|^2\leq\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_{\varDelta_r}|f(z)|^2dxdy$ を示す．（$f(z)^2$ にコーシーの積分公式を使う．）次にこれを用いて，D 内のコンパクト集合上で $\{f_n\}$ が一様収束の条件（定理 V.3.1）をみたすことを示し，f_n がある f に D でコンパクト一様収束することをみ

る．$f\in L_h^2(D)$ で，$\|f_n-f\|\to 0$ はみやすい．

問 1*　$L_h^2(C)=\{0\}$.

問 2*　$\Delta=\{z;\ |z|<1\}$，$\Delta^*=\{z;\ 0<|z|<1\}\Rightarrow L_h^2(\Delta)=L_h^2(\Delta^*)$
（リーマンの除去可能特異点定理（3.2.3(i)）の拡張）．

$L_h^2(D)$ はたかだか可算個の完備な正規直交系 $\{\varphi_n(z)\}$ をもつことが示される．$K(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(z)|^2$ は D でコンパクト一様収束し，D で実解析的関数となる．$B(z)=\partial^2\log K(z)/\partial z\partial\bar{z}$ を D のベルグマン計量という．D が有界領域の場合などは $L_h^2(D)$ は十分たくさんの関数を含み，いたるところ $B(z)>0$ となる．このとき，曲線 C の「長さ」を $\int_C\sqrt{B(z)}|dz|$ と定義し，2 点 p, q の「距離」をそれを結ぶ曲線の「長さ」の下限と定義する．次節で D が単位円のときには証明をするが，D の解析的自己同形（D を D の上に 1 対 1 正則に写す写像）により，この「距離」は不変である．つまり，このベルグマン「距離」は D の解析的自己同形群で不変な距離であり，この群とこの「距離」で領域 D の幾何学が成立する．

次節で単位円 Δ の幾何学を行うために，Δ のベルグマン計量を計算しておく．$1, z, z^2, \cdots$ は $L_h^2(\Delta)$ の元で，線形独立であり，任意の $L_h^2(\Delta)$ の元はこの線形結合の極限としてかける．（証明を読者は試みよ．$f_n\to f$ とは $\|f_n-f\|\to 0$ のことに注意．）これを正規直交化すると，$\sqrt{1/\pi}$, $(\sqrt{2/\pi})z$, $\cdots$, $(\sqrt{(n+1)/\pi})z^n$, $\cdots$ となる．$K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)/\pi)|z|^{2n}=(1/\pi)(1/(1-|z|^2)^2)$ となり，$B(z)=\partial^2\log K(z)/\partial z\partial\bar{z}=2/(1-|z|^2)^2$ となる．

7.2　単位円の非ユークリッド幾何学

単位円 $\{|z|<1\}$ を Δ とかく．Δ 内の正則曲線 C の「長さ」$l(C)$ を $l(C)=\int_C|dz|/(1-|z|^2)$ と定義する[1]．$|dz|/(1-|z|^2)$ を単位円の**ポアンカレ計量**という．

補題 7.2.1　φ: $\Delta\to\Delta$ を上への 1 対 1 正則写像とする．このとき，Δ 内の正則曲線 C に対し，$l(C)=l(\varphi(C))$.

証明　定理 6.5.1 より $w=\varphi(z)=e^{i\theta}(z-a)/(\bar{a}z-1)$ とかける（$|a|<1$, $0\leqq\theta<2\pi$）．曲線 C を $z=z(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ とすると，曲線 $\varphi(C)$ は $w=w(t)=e^{i\theta}(z(t)-a)/(\bar{a}z(t)-1)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ とかける．

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|e^{i\theta}\frac{(\bar{a}z-1)-(z-a)\bar{a}}{(\bar{a}z-1)^2}\right|=\frac{1-|a|^2}{|\bar{a}z-1|^2},$$

$$1-|w|^2=1-\frac{|z-a|^2}{|\bar{a}z-1|^2}=\frac{|\bar{a}z-1|^2-|z-a|^2}{|\bar{a}z-1|^2}=\frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|\bar{a}z-1|^2}$$

となる．

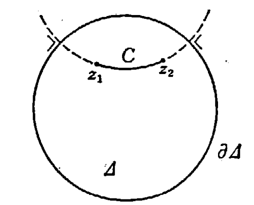
$$\begin{aligned}l(\varphi(C))&=\int_{\varphi(C)}\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{1-|w(t)|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right|dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{1-|w(t)|^2}\left|\frac{dw}{dz}\right|\left|\frac{dz}{dt}\right|dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{|\bar{a}z(t)-1|^2}{(1-|z(t)|^2)(1-|a|^2)}\cdot\frac{1-|a|^2}{|\bar{a}z(t)-1|^2}|z'(t)|dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}dt=\int_C\frac{|dz|}{1-|z|^2}=l(C).\end{aligned}$$

定義 7.2.2　2 点 $z_1, z_2\in\Delta$ に対し，z_1 と z_2 を結ぶ Δ 内の正則曲線をすべて考え，その「長さ」の下限を z_1 と z_2 の「距離」とよび $p(z_1, z_2)$ とかく．（ポアンカレ距離ともいう．）

補題 7.2.3　$z_1, z_2\in\Delta$ に対し

$$p(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r},\quad r=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|$$

である．z_1, z_2 を結ぶ曲線 C_0 で $l(C_0)=p(z_1, z_2)$ となるものがただ 1 つ存在し，それは単位円周 $\partial\Delta$ と直交し z_1, z_2 を通る円周の，z_1 と z_2 の間の部分である．（とくに，z_1, z_2 が単位円の直径の上にのっていれば，z_1, z_2 を結ぶ線分．）



証明　前補題により，Δ を Δ の上に 1 対 1 に写す 1 次変換 $\varphi(z)=e^{i\theta}(z-z_1)/(\bar{z}_1z-1)$ をしても曲線の「長さ」はかわらない．θ を $\varphi(z_2)>0$ となるようにとっておく．結局，z_1, z_2 が $\varphi(z_1)=0$, $\varphi(z_2)=r>0$ のときに考えればよい．0 と r を結ぶ Δ 内の正則曲線 C を $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ とする．

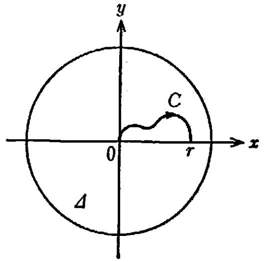
1)　$\int_C|dz|$ が曲線 C の普通の意味での長さである．この節では新しく曲線の長さ，2 点間の距離，直線などを定義して，非ユークリッド幾何を作る．新しく定義された普通の意味とは異なる（非ユークリッド的）言葉は「…」をつけてかくことにしよう．

$$\frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}=\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{1-(x(t)^2+y(t)^2)}\geqq\frac{|x'(t)|}{1-x(t)^2}\geqq\frac{x'(t)}{1-x(t)^2}$$

から，

$$l(C)=\int_\alpha^\beta\frac{|z'(t)|}{1-|z(t)|^2}dt\geqq\int_\alpha^\beta\frac{x'(t)}{1-x(t)^2}dt=\int_0^r\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

をうる．等号が成り立つのは C が 0 と r を結ぶ線分のとき，そのときだけである．この線分を φ^{-1} でひきもどすと，この線分は z_1 と z_2 を結ぶ円弧となり，はじめの線分は直径上にあり単位円周 $\partial\Delta$ と直交しているから φ^{-1} でもどした円周も $\partial\Delta$ と直交する．



次の補題は，$p(z_1, z_2)$ の定義と前補題による具体的な表示とから明らかであろう．

補題 7.2.4[1]

（i） $p(z_1, z_2)\geqq 0$, $p(z_1, z_2)=0$ となるのは $z_1=z_2$ のときだけ，

（ii） $p(z_1, z_2)=p(z_2, z_1)$,

（iii） $p(z_1, z_2)+p(z_2, z_3)\geqq p(z_1, z_3)$,

（iv） $z_n\in\Delta$ $(n=1, 2, \cdots)$, $z\in\Delta$ に対し，

$$|z_n-z|\to 0\Leftrightarrow p(z_n, z)\to 0,$$

（v） $z_n\in\Delta$ $(n=1, 2, \cdots)$, $|z_n|\to 1$ ならば $p(0, z_n)\to+\infty$（ゆえに，任意の $z\in\Delta$ に対し，$p(z, z_n)\to+\infty$ でもある）．

定理 7.2.5（ピック） f: $\Delta\to\Delta$ を任意の正則写像とする．このとき，任意の $z_1, z_2\in\Delta$ に対し，$p(f(z_1), f(z_2))\leqq p(z_1, z_2)$. **（$\Delta$ から Δ への正則写像は「距離」を縮小する.）**

証明　シュヴァルツの補題（補題 6.6.1）をいいかえるだけである．φ, ψ を Δ から Δ への 1 次変換で φ は 0 を z_1 に，ψ は $f(z_1)$ を 0 に写すものとしよう．合成関数 $\psi\circ f\circ\varphi$ はシュヴァルツの補題の仮定をみたすから，任意の $\zeta\in\Delta$ に対し，$|\psi\circ f\circ\varphi(\zeta)|\leqq|\zeta|$ が成り立つ．ζ として $\varphi^{-1}(z_2)$ をとる．

$$\begin{array}{ccccccc}\Delta & \xrightarrow{\varphi} & \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta & \xrightarrow{\psi} & \Delta\\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi\\ 0 & & z_1 & & f(z_1) & & 0\end{array}$$

$\varphi^{-1}(z)=(z-z_1)/(\bar{z}_1z-1)$ より，$\zeta=\varphi^{-1}(z_2)=(z_2-z_1)/(\bar{z}_1z_2-1)$ である．$\psi(w)=(w-f(z_1))/(\overline{f(z_1)}w-1)$ より，$\psi\circ f\circ\varphi(\zeta)=\psi\circ f(z_2)=(f(z_2)-f(z_1))/(\overline{f(z_1)}f(z_2)-1)$ となり，

$$|f(z_2)-f(z_1)|/|\overline{f(z_1)}f(z_2)-1|\leqq|z_2-z_1|/|\bar{z}_1z_2-1|$$

をうる．関数 $(1/2)\log\{(1+r)/(1-r)\}$ は $0\leqq r<1$ で単調増加関数だから，$p(f(z_1), f(z_2))\leqq p(z_1, z_2)$ をうる．

系 7.2.6 f: $\Delta\to\Delta$ を正則写像，C を Δ 内の正則曲線とすると

$$l(C)\geqq l(f(C)).$$

証明　$\psi\circ f\circ\varphi$ にシュヴァルツの補題の系 6.6.2 を適用する．$|(\psi\circ f\circ\varphi)'(0)|\leqq 1$ を計算して，$(1/(1-|f(z_1)|^2))\cdot|f'(z_1)|\cdot(1-|z_1|^2)\leqq 1$ をうる．ここで，z_1 は Δ の任意の点で，この不等式は Δ で成立する．C を $z=z(t)$ とすると，$f(C)$ は $w=w(t)=f(z(t))$ で，

$$l(f(C))=\int_{f(C)}\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\int_C\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}|dz|\leqq\int_C\frac{|dz|}{1-|z|^2}=l(C)$$

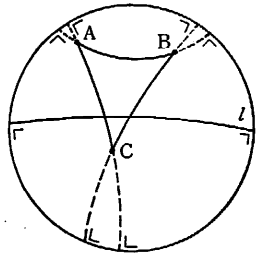
となる．

注[1]　単位円 Δ を「平面」，Δ の点を「点」，単位円周 $\partial\Delta$ に直交する円周 C をとり $C\cap\Delta$ を「直線」（直線も円周とみて，Δ の直径も「直線」とみる），Δ を Δ の上に 1 対 1 に写す正則写像（1 次変換）を「運動」とみると，平面幾何学の公理が 1 つを除いてすべて成り立つ．例えば，公理：2 点を通る「直線」はただ 1 つあるとか，公理：「平面」は 1「直線」l によって，同じ側にある 2 点 A, B を結ぶ「線分」上には l の点がなく，異なる側にある 2 点 A, C を結ぶ「線分」上には l の点が必ずあるように，2 つの側にわかれる　等々が成り立つ．成り立たないのは，「直線」l 上にない点 P をとると，P を通り l に平行な「直線」がただ 1 本存在するという，ユークリッドの第 5 の公準とか平行線の公理とかよばれるものである．

1） 距離空間・位相を知っている読者へ：（i），(ii)，(iii) は Δ がこの「距離」p で距離空間になること，(iv) はこの「距離」からきまる Δ の位相が Δ の複素平面の領域としての位相と一致すること，(v) はこの距離空間が完備であることを示している．

1） この注については例えば，佐々木重夫：幾何入門（岩波全書）などを参照せよ．

で，この幾何学では「直線」l 上にない点を通り l に「平行」な「直線」は無数にある．（ただし，「平行」な2「直線」とは，交点をもたない2「直線」のこと．）この単位円 Δ の幾何学は，ユークリッドの平行線の公理が，公理であって他の公理から証明される定理ではないことを示し，非ユークリッド幾何学の簡単な例になる．



上半平面 $H=\{z=x+iy|y>0\}$ は1次変換 $w=(z-i)/(z+i)$ により単位円 $\{|w|<1\}$ の上に1対1に写る．これで，そっくり単位円の非ユークリッド幾何学を写して，上半平面 H でも同様に非ユークリッド幾何学ができる．単位円のポアンカレ計量は $|dw|/(1-|w|^2)$ だから，$w=(z-i)/(z+i)$ より，

$$1-|w|^2=1-|(z-i)/(z+i)|^2=\{|z+i|^2-|z-i|^2\}/|z+i|^2$$
$$=-2i(z-\bar{z})/|z+i|^2=4y/|z+i|^2,$$

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}\right|=\frac{2}{|z+i|^2},$$

$$\therefore\quad \frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|z+i|^2}{4y}\cdot\frac{2}{|z+i|^2}|dz|=\frac{1}{2y}|dz|$$

となる．ゆえに，上半平面 H 内の正則曲線 C の「長さ」を $l(C)=\int_C |dz|/2y$ と定義すればよい．H での「直線」は，実軸上に直径をもつ円周の H 内の部分，または実軸に直交する直線の H 内の部分となる．（これは，1次変換 $w=(z-i)/(z+i)$ は等角写像で円を円に写すからわかる．）

問　上半平面 H の2点 z_1, z_2 の「距離」は，

$$p_H(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r},\qquad r=\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\bar{z}_2}\right|$$

であることを示せ．（上半平面のポアンカレ距離という．）

7.3　単位円を普遍被覆面とする領域

$\tilde{D}, D$ を領域，$\varphi: \tilde{D}\to D$ を上への正則写像とする．$\tilde{D}$ 内の曲線 $\tilde{C}$ に対し $\varphi(\tilde{C})$ は D 内の曲線になるが，$\varphi(\tilde{C})$ を $\tilde{C}$ の**おっことし**という．逆に，

D 内の曲線 C があり始点を z_0 とし，$\varphi^{-1}(z_0)$ から1点 ζ_0 をとる．もし，ζ_0 を始点とする $\tilde{D}$ 内の曲線 $\tilde{C}$ で $\varphi(\tilde{C})=C$ となるものが存在すれば，$\tilde{C}$ を ζ_0 を始点とする C の**もちあげ**という．D 内の任意の曲線 C と C の始点 z_0 の原像 $\varphi^{-1}(z_0)$ の任意の点 ζ_0 に対し，ζ_0 を始点とする C のもちあげが必ず存在するときに，φ により D の**曲線はつねにもちあげ可能**ということにする．

定義 7.3.1　領域 D の**普遍被覆面**が単位円 Δ であるというのは，上への正則写像 $\varphi: \Delta\to D$ で，いたるところ $\varphi'(\zeta)\neq 0$ をみたし，φ により D の曲線はつねにもちあげ可能となるようなものが存在することである．簡単のため，このとき D を**双曲型領域**ということにする．また，**普遍被覆面** $\varphi: \Delta\to D$ といえば，φ はこれらの条件をみたすこととしよう．

注意　上半平面 H は単位円 Δ と1次変換で1対1に写りあうから，H から D への定義 7.3.1 の条件をみたす写像 φ を作れば，D が双曲型ということがわかる．

上半平面 H の解析的自己同形群 Aut (H) は定理 6.5.1 (ii) で示したように，行列式が1の2次実数正方行列の作る群 $SL(2, \boldsymbol{R})$ と同形である．Aut(Δ) より Aut(H) の方がポピュラーであろう．この節でも 6.7 節でも単位円 Δ のかわりに上半平面 H を使った方がよかったかもしれない．Δ と H とは必要に応じて変換しあって，ほとんど同一視していると理解してほしい．

例1　$D_r^*=\{0<|z|<r\}$ は双曲型：D_r^* と D_1^* は $z\mapsto(1/r)z$ で写りあうから，$D_1^*=\{0<|z|<1\}$ の場合を考える．$\varphi: H\to D_1^*$ として，$z=e^{i\zeta}$ をとればよい．φ は上への写像で $\varphi'(\zeta)=ie^{i\zeta}\neq 0$ である．$\zeta=\xi+i\eta$ とおくと，$z=e^{i\xi}e^{-\eta}$ で，φ^{-1} は $\xi=\arg z$，$\eta=-\log|z|$ である．（$\arg z$ には 2π の整数倍だけ自由度があり，$0<|z|<1$ より $-\log|z|>0$．）D_1^* 内の曲線 $z=z(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ は，$\varphi^{-1}(z(\alpha))$ の点を任意にとる，すなわち，$\arg z(\alpha)$ を1つ任意にきめて θ_0 とすると，補題 3.4.2 により $z(t)=|z(t)|e^{i\theta(t)}$ $(\theta(\alpha)=\theta_0)$ とかけ，もちあげは $\xi(t)=\theta(t)$，$\eta(t)=-\log|z(t)|$ となる．

例2　円環 $A_r=\{r<|z|<1\}$ は双曲型：$z=f(w)=e^{iw}$ により，平行帯 $S=\{w|0<\mathrm{Im}\,w<-\log r\}$ は A_r の上に写り，$f'(w)\neq 0$，さらに A_r 内の曲線は f によりもちあげ可能である．S は $\zeta=g(w)=\exp(-\pi w/\log r)$ により上半