第5章　級数　(Series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

例 (テーラー級数)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

例 (フーリエ (Fourier) 級数)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inz}$$

応用例　$f'(z) = f(z)$ をみたす関数をみつけよ.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{とおくと}$$

$$f'(z) = f(z) \iff n a_n = a_{n-1}$$

$$\iff a_n = \frac{1}{n!} \cdot a_0$$

$$\iff f(z) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (= ce^z)$$

もっと複雑な微分方程式でも同様に考えることができる.

a. 数列の極限

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$　複素数の数列

定義　$\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束 ($\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ [任意の $\varepsilon > 0$ に対し ある $N > 0$ が存在して
「$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つ.]

NO.

<u>定義</u>（Cauchy列）

$\{a_n\}$ が Cauchy列 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N>0$ が存在して「$n, m>N$ ならば $|a_n-a_m|<\varepsilon$」が成り立つ。

<u>定理</u> $\{a_n\}$ が（ある α に）収束 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ が Cauchy列

証明］

$$\begin{array}{ccc} \{a_n\}\text{ が収束} & & \{a_n\}\text{ が Cauchy列} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \{\mathrm{Re}\,a_n\}, \{\mathrm{Im}\,a_n\}\text{ が収束} & \Longleftrightarrow & \{\mathrm{Re}\,a_n\}, \{\mathrm{Im}\,a_n\}\text{ が Cauchy列} \end{array}$$

実数の基本性質

数列 $\{a_n\}$ の項の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を級数という。

<u>定義</u> (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Leftrightarrow$ 部分和 $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ が $n\to\infty$ で収束

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$ と定義する。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束

$\overset{}{\underset{(*)}{\Longleftrightarrow}}$ 部分和の列 $A_n=\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ が有界

<u>注意</u> (*) の $\Leftarrow$ は「有界単調列は収束する」（実数の基本性質）を使っている。

<u>注意</u> 絶対収束は「よい収束」。絶対収束でない収束の場合は条件収束とよばれ扱いに注意が必要。（例えば項の順序を変えると和が変わる。）$\Rightarrow$ <u>交代級数</u>

NO.

<u>定理</u> $\sum a_n$ について「絶対収束」⇒「収束」

証明 $\sum a_n$ が絶対収束 ⇒ $\sum |a_n|$ が収束

$\Rightarrow \tilde{A}_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ が Cauchy列

$\underset{(*)}{\Rightarrow} A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ が Cauchy列

$\Rightarrow \sum a_n$ が収束

(*) は

$$|A_{N'} - A_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{N'} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N'} |a_n| = |\tilde{A}_{N'} - \tilde{A}_N| \quad (N<N')$$

と定義からわかる。

<u>例</u> $\sum \frac{1}{(n+i)^2}$ は絶対収束する

$\because)$ $\sum \left|\frac{1}{(n+i)^2}\right| \leq \sum \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \leq \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

<u>例</u> (交代級数) $\{a_n > 0\}$ が単調減少かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす

ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

は収束する。(示せ!)

例えば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

は(条件)収束する。

$A_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$ とおくと

- $A_N - A_{N-1} = a_N \to 0$
- A_{2N+1}は収束

$\left(\begin{array}{l}\because) \text{ 単調増加かつ} \\ \quad A_{2N} \leq a_0\end{array}\right)$

よって A_N は収束する。

級数の収束の判定条件（十分条件）

<u>定理</u> 次の条件のいずれかが成り立てば $\sum a_n$ は絶対収束する.

(1) $\displaystyle \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ （d'Alembert の ratio test）

(2) $\displaystyle \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ （Cauchy の root test）

<u>注意</u> (1), (2) は十分条件であって必要ではない。

<u>例</u>（よくある間違い）

$a_n = \dfrac{1}{n^2}$ のとき

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \not\Rightarrow \quad \sum a_n$ は収束しない。

（実際は収束する。）

6. 関数列の極限

$\{f_n : D \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の複素数値関数の列.

定義 各 $z \in D$ において $\{f_n(z)\}$ が収束するとき, 関数列 $\{f_n\}$ は(各点)収束するという。このとき $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ で定まる関数を極限関数と呼ぶ.

例 $f_n : D = \{|z|<1\} \to \mathbb{C}$ $f_n(z) = z^n$ は $f(z) \equiv 0$ に(各点)収束する。

各 f_n が連続であっても極限関数は連続とは限らない。これはしばしば不都合なのでもう少し強い意味での収束を考える。

定義(一様収束) 関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に集合 $S \subset D$ 上一様収束するとは任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N > 0$ が存在して, $n > N$ ならば全ての $z \in S$ について

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つことである。特に $S = D$ のとき単に「f_n は f に一様収束する」という。また D に含まれる任意のコンパクト集合(有界閉集合)上一様収束するとき「f_n は f に広義一様収束する」という。
(コンパクト一様)

NO.

注意]「f_n が $S\subset D$ 上 f に一様収束する」

$\Leftrightarrow$「$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in S} |f_n(z)-f(z)| = 0$」

注意]「f_n が f に広義一様収束する」

$\Leftrightarrow$「各点 $z\in D$ に対して，z のある開近傍 U_z が存在して
f_n は U_z 上で f に一様収束」

(証明は演習問題とする。)

このことから広義一様収束は局所一様収束とも呼ばれる。

<u>定理</u> 連続関数の列 $f_n: D\to\mathbb{C}$ が $f: D\to\mathbb{C}$ に広義一様収束するとき f は連続。

証明] 実関数の場合と全く同様。

<u>定理</u> 上の定理の仮定の下で，区分 C^1 級曲線 $\gamma:[a,b]\to D$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

証明]
$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f_n(z)-f(z)\,dz\right|$$
$$\le \left(\sup_{z\in\gamma} |f_n(z)-f(z)|\right)\cdot|\gamma|$$
$$\downarrow$$
$$0$$
曲線 γ (の像) はコンパクト ＋ 広義一様収束

関数列 $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}$ の和 $\sum f_n$ を関数項級数という。

例 Taylor 級数　$\sum a_n (z-z_0)^n$

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$

定義 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が収束 $\Leftrightarrow$ $F_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$ が収束

「集合 $S \subset D$ 上一様収束」,「広義一様収束」と同様に F_n に対するものとして定義する

定義 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が絶対収束 $\Leftrightarrow$ $\tilde{F}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k|$ が収束

同様に「集合 $S \subset D$ 上 絶対一様収束する」は「$\tilde{F}_n$ が S 上一様収束する」ことと定義する。(「絶対一様収束 $\Rightarrow$ 一様収束」(演習問題)

一般に関数項級数の収束を判定するのは易しい方法はない.

次の定理 (ワイエルシュトラス (Weierstrass) の M 判定法)

はよく使われる。

定理 関数項級数 $\sum f_n$ に対し次のような数列 $M_n > 0$ が存在するとき $\sum f_n$ は $S \subset D$ 上(絶対)一様収束する

(i) $\sum M_n < +\infty$.

(ii) $\displaystyle\sup_{z \in S} |f_n(z)| \leq M_n$

maruman Loose Leaf

証明] 各 $z \in S$ について

$$\sum_{n=1}^{N} |f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{N} M_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ はある関数 $F(z)$ に収束する。さらに

$$\sup_{z \in S} \left| F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \to 0 \quad (N \to \infty)$$

より S 上で一様収束であることがわかる。

C. 正則関数列の極限

<u>定理</u>　正則関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が $f : D \to \mathbb{C}$ に広義一様収束するとき f は正則関数である。また微分 $f_n'(z)$ は $f'(z)$ に広義一様収束する。

注意] 高階微分についても $f_n^{(k)}(z)$ は $f^{(k)}(z)$ に一様収束する

ことがわかる。(なぜか?)

証明] 任意の点 z とその近傍 $U = \{w \mid |w - z| < \varepsilon\} \subset D$ を考える。U 上の任意の閉曲線 γ について

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = 0.$$

よってモレラの定理から f は U 上正則. z は任意なので

f は D 上正則.

NO.

また $\tilde{U} = \{w \mid |w - z| \leq \varepsilon/2\}$ とすると $w \in \tilde{U}$ について

$$|f_n'(w) - f'(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \left(\sup_{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon} (f_n(\zeta) - f(\zeta)) \right) \cdot 2\pi\varepsilon .$$

ここで右辺は $w \in \tilde{U}$ によらない数で $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。

よって f_n' は f' に $\tilde{U}$ 上一様収束. (広義一様収束の後の注意から)

f_n' は f' に広義一様収束する。 //

<u>定理</u> 正則関数からなる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が広義一様収束するならば

和 $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は正則で

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

証明] 前定理を $F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ にあてはめる.

◎ パラメータ族

$f_s : D \to \mathbb{C}$ パラメータ $s \in [a, b]$ を持つ正則関数の族

このとき $F : D \times [a, b] \to \mathbb{C}$ を

$$F(z, s) = f_s(z)$$

で定めて $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ の部分集合から $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ への写像と考える.

maruman Loose Leaf

NO.

定理 (1) Fが連続ならば

$$G(z) = \int_a^b f_s(z)\,dz$$

は正則関数.

(2) FがC^1級ならば

$$H(z) = \frac{\partial}{\partial s} f_s(z)$$

は正則関数

証明] $[a,b]$をn等分する点列 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ をとり

$$G_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_{t_k}(z)$$

とおく. また

$$H_n(z) = \frac{f_{(t+\frac{1}{n})}(z) - f_t(z)}{\frac{1}{n}}$$

とおく. $G_n(z) \to G(z)$, $H_n(z) \to H(z)$ は明らかであるが この収束が広義一様であれば(G_n, H_nは正則なので)前定理から 正則であることがわかるが, これらは各コンパクト集合 $K \subset D$ 上で F および $\frac{\partial}{\partial s}F$ が一様連続であることからわかる。(詳細は各自に任せる。)