解析Ｂ１ 演習問題 No.1　　(4/13)

§1　複素数列の極限

1-1　次の数列のうち有界なものはどれか？収束するものはどれか？証明をつけて答えよ．

$$a_n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \quad c_n = \frac{n}{2n+1} + i\cdot\frac{n-1}{n}, \qquad d_n = n^2(i^n - 1)$$

1-2　複素数の数列 a_n, b_n がそれぞれ α, β に収束するとき，次を示せ[1]．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \alpha + \beta,$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta,$

1-3　複素数列 $\{a_n\}$ がある定数 $C > 0$ と $0 < r < 1$ について

$$(*) \qquad |a_n| < Cr^n \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

をみたすとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示せ[2]．

1-4　複素数列 $\{a_n\}$ が次の条件のいずれかをみたすとき，ある定数 $C > 0$ と $0 < r < 1$ が存在して，前問の $(*)$ が成り立つことを示せ[3]．

(1) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$

(2) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$

1-5　２つの複素数列 a_n と b_n について，次のようなことは起こりうるか[4]？

(1) a_n は収束し，b_n は発散するが，$c_n = a_n + b_n$ は収束する．

(2) a_n と b_n はともに発散するが，$c_n = a_n + b_n$ は収束する．

1-6　２つの複素数列 a_n と b_n について，次のようなことは起こりうるか？

(1) 級数 $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ はともに絶対収束するが $\sum_n a_n b_n$ は発散する．

(2) 級数 $\sum_n a_n$ と $\sum_n b_n$ はともに収束するが $\sum_n a_n b_n$ は発散する．

---

[1] これは $\epsilon - \delta$ 論法の基本問題．答えも探せば見つかるけれども，できれば自分で証明してみよう．少なくとも答えは自分の文章で書こう．

[2] 有界単調列の収束，または，Cauchy 列の収束を使う．極限がわからない数列の収束の証明は極限の存在自体が「実数の連続性」からわかることなので，それに関する命題を使うことになる

[3] $\limsup$ は $\overline{\lim}$ と同じ意味です．ちなみに $\liminf$ と $\underline{\lim}$ も同じ．

[4] この問題と次の問題は実際はなかなか難しいと思う．いろんな数列の極限について想像を巡らせてみよう．

$\boxed{\textbf{1-7}}$ 複素数列 a_n, $n = 1, 2, \cdots$, について $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとき，次を示せ[5].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_n = \alpha$$

$\boxed{\textbf{1-8}}$ 次の級数は絶対収束するか？条件収束するか[6]？

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$$

$\boxed{\textbf{1-9}}$ 数列 a_n と b_n, $n = 1, 2, \cdots$, が次の条件を満たすとする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$.

(2) $S_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ は有界.

このとき，$\sum a_n b_n$ は収束することを示せ[7]

$\boxed{\textbf{1-10}}^{\dagger}$ 複素数列 a_n が次の評価を満たすとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ は絶対収束することを示せ．(Raabe の判定法[8])

$$\liminf_{n\to\infty} n \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right) > 1$$

$\boxed{\textbf{1-11}}^{\dagger}$ 複素数列 a_n, $n = 1, 2, \cdots$, が $|\mathrm{Arg}(a_n)| \le \pi/4$ を満たすとする．このとき次は同値であることを示せ[9].

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re}(a_n)$, $N = 1, 2, \cdots$, が有界.

$\boxed{\textbf{1-12}}^{\dagger}$ 複素数 w と自然数 n に対して

$$\binom{w}{n} = \frac{w(w-1)\cdots(w-n+1)}{n!}$$

と定義する．このとき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{w}{n}$$

を考える．

(1) $0 < \mathrm{Re}(w)$ のとき，絶対収束することを示せ.

(2) $-1 < \mathrm{Re}(w) \le 0$ のとき，条件収束することを示せ[10].

---

[5] これができれば $\epsilon - \delta$ 論法の初歩は卒業.

[6] ヒント：交代級数の複素版と言えば答えはわかってしまう？

[7] Abel の級数変化法と呼ばれる議論で，次の変形を使う: $\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} S_k(a_k - a_{k+1}) + S_m a_m - S_{n-1} a_n$

[8] これは自分で示すのは難しいかもしれない．微積の教科書や参考書を見ても良い．解答は自分の文章で書く事.

[9] (2) から (1) が問題．まず実部を考える.

[10] (1) は Raabe の判定法を使う．(2) はだいぶ難しい．できた人はエラい．(1) だけでも o.k.

§2　複素関数列・関数項級数の極限

$\boxed{\textbf{2-1}}$　関数列 $f_n(z) = \dfrac{1+z^n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, は単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上で一様収束することを示せ.

$\boxed{\textbf{2-2}}$　関数列 $f_n(z) = \dfrac{z^2}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, は複素平面 $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束することを示せ．一様収束するか？

$\boxed{\textbf{2-3}}$　関数列 $f_n(z) = \dfrac{z^n}{1-z^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, は単位円板 D 上で広義一様収束するが，一様収束はしないことを示せ.

$\boxed{\textbf{2-4}}$　関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ は単位円板 D 上で広義一様収束するが，一様収束はしないことを示せ.

$\boxed{\textbf{2-5}}$　複素数値連続関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, が D 上で広義一様収束するとき，極限関数 $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ は連続であることを示せ[1].

$\boxed{\textbf{2-6}}$　関数列 $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ について，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が絶対一様収束するとは，$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ が一様収束することである．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が絶対一様収束するならば一様収束することを示せ[2].

$\boxed{\textbf{2-7}}$　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の関数項級数 $\sum f_n$ について次が同値であることを示せ[3].

(1) 関数項級数 $\sum f_n$ が一様収束する.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $N > 0$ が存在して，全ての $m > n > N$ と $z \in D$ について $|\sum_{k=n}^{m} f_k(z)| < \epsilon$ が成り立つ.

$\boxed{\textbf{2-8}}$　複素数値連続関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, について次が同値であることを示せ.

(1) $\{f_n\}$ は広義一様収束する.

(2) 各点 $z \in D$ に対して，z のある近傍 U_z が存在して，$\{f_n\}$ は U_z 上で一様収束する.

$\boxed{\textbf{2-9}}$　「正則関数列の一様収束極限は正則関数になる」という定理をモレラの定理を経由せずに次の順で示せ：正則関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が $f : D \to \mathbb{C}$ に一様収束するとする.

(1) f についてコーシーの積分公式（教科書 100 ページの定理 1 の主張）が成立することを示せ.

(2) (1) で示したことから f が正則であることを導け.

---

[1]講義中に述べる定理だが証明してみよう．実数値で一様収束の場合は微積の本に載っているはずなので参考にするとよい.

[2]級数についての「絶対収束ならば収束」の証明を思い出そう.

[3]コーシー列についての定理の関数項級数版．易しいはず.

$\boxed{\textbf{2-10}}$ 数列 $\{a_n\}$ が有界であるとき関数項級数 $\sum_{n=0} a_n z^{-n}$ は $|z|>1$ の範囲で広義一様収束することを示せ.

$\boxed{\textbf{2-11}}$ 関数項級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-n)^{-2}$ は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で収束し，正則関数になることを示せ[4].

$\boxed{\textbf{2-12}}$ リーマン（Riemann）のゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ なる複素数 s に対して,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

で定義される．右辺が領域 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}(z)>1\}$ で収束して，$\zeta(s)$ が D 上の正則関数になることを示せ[5].

$\boxed{\textbf{2-13}}$ † 次のような関係が成り立つことが知られている：

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

次の命題を示して，右辺の無限積が収束して正則関数になること証明せよ[6]．正則関数の列 $f_n:D\to\mathbb{C}$ について，級数 $\sum_n f_n(z)$ が絶対一様収束するならば，関数列 $F_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$ は D 上で一様収束して，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ が正則関数として定義される.

$\boxed{\textbf{2-14}}$ † 実数でない複素数 ω を一つ固定して

$$\Gamma(\omega)=\{n+m\omega\mid n,m\in\mathbb{Z}\}$$

とおく．このとき関数 $P(z)$ を

$$P(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Gamma}\left(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

で定義する．$P(z)$ が $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 上の正則関数になることを示せ[7].

$\boxed{\textbf{2-15}}$ † 授業中の述べた正則関数のパラメータ族のパラメータについての微分・積分についての定理を述べて，その証明を詳しく与えよ.

$\boxed{\textbf{2-16}}$ † ガンマ関数は $\mathrm{Re}(z)>0$ なる複素数 z に対して

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

で定義される．右辺が $\mathrm{Re}(z)>0$ の範囲で収束して z の関数として正則関数になることを示せ[8].

---

[4] 極限関数は $\pi^2/\sin^2(\pi z)$ になる．不思議でしょう.

[5] $\zeta(s)$ は複素平面上の正則関数に拡張される．有名なリーマン予想はこの関数についての予想.

[6] 参考書の p 212 参照．その前の部分はこの問題の参考になるが，まずは自分で考えてみよう．$\log F_n(z)$ を考えることがポイント.

[7] $P(z)$ は Weierstrass のペー関数と呼ばれる楕円関数の一種になる．参考書 p293 ページ参照.

[8] ガンマ関数は自然数について $\Gamma(n)=(n-1)!$ をみたし，階乗の複素関数としての一般化になっている.

§3　ベキ級数

3-1　次のベキ級数の収束半径を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)z^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)z^n$$

3-2　次のベキ級数の収束半径を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^n z^{2n}$$

3-3　次のベキ級数の収束半径を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)2^n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n!}$$

3-4　ベキ級数

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \quad B=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n, \quad C=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^p z^n, \quad D=\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n$$

の収束半径をそれぞれ $R(A), R(B), R(C), R(D)$ とするとき，次を示せ．

$$R(C)=R(A)^p, \qquad R(D)\geq R(A)R(B).$$

3-5　ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ と $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ の収束半径が $R>0$ 以上であるとき，積級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \qquad \text{ただし } c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

の収束半径は R 以上で，$|z|<R$ について

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right)$$

が成り立つことを示せ[1]．

[1] これは Cauchy 積級数の問題．文献を調べてもよいが，まずは自分で考えてみよう．$|z|<R$ であるとき級数 $\sum_{n,m}a_n b_m z^{n+m}$ が絶対収束するので順序を替えても和が変わらないことがポイント．

$\boxed{\textbf{3-6}}$ 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることと，次の 2 条件が成り立つことが同値であることを示せ[2]：

(1) $c < \alpha$ ならば $a_n > c$ となる n が無限個ある.

(2) $c > \alpha$ ならば $a_n > c$ となる n は有限個しかない.

$\boxed{\textbf{3-7}}$ 複素数列 $\{a_n \neq 0\}_{n=0}^{\infty}$ について，極限値 $\gamma = \lim_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$ が存在するならば，ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は γ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{3-8}}$ ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が $0 < R < \infty$ であるとき，ベキ級数

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

の収束半径も R であることを示せ．また $h(z)$ は $f(z)$ の原始関数であることを示せ[3].

$\boxed{\textbf{3-9}}$ ベキ級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2n} (n!)^{-2} z^{2n}$$

の収束半径を求めよ．また，$f(z)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ[4].

$$z\,\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{df}{dz} + z\,f = 0.$$

$\boxed{\textbf{3-10}}^{\dagger}$ ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の単位円周上での収束を調べよ[5].

$\boxed{\textbf{3-11}}^{\dagger}$ ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径が 1 であるとする．もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば,

$$\lim_{r\to 1-0} f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つことを示せ[6].（アーベル (Abel) の定理）

---

[2] 上極限についての問題で講義中にもこの事実は使った．定義を思い出して落ち着いて考えれば易しいはず.

[3] これは $f(z)$ が項別積分できることを示している.

[4] 項別微分を使えば難しくはない.

[5] これはなかなか難しい．$z = 1$ のとき発散するのは明らか．それ以外の場合は Abel 変形を用いる.

[6] これは有名な事実なので本を調べれば載っているはず．でも，自分で考えてみよう．これも Abel 変形を使う.

解析B１ 演習問題 No.4　　(5/11)

§4　テーラー展開とローラン展開

4-1　次を示せ.

(1) $|z+1|<1$ において, $\displaystyle\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$

(2) $0<|z|<4$ において, $\displaystyle\frac{1}{4z-z^2}=\frac{1}{4z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}$

4-2　次の関数の括弧内に与えられた点 z_0 におけるテーラー展開とその収束半径を求めよ.

(1) $f(z)=\cosh(z)$　($z_0=\pi i$)

(2) $f(z)=e^{-z^2}$　($z_0=0$)

4-3　$z\neq 0$ において, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{\sin z^2}{z^4}=\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\cdots$$

また, 右辺は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で広義一様収束することを示せ.

4-4　次の関数の原点 0 におけるテーラー展開（マクロリン展開）とその収束半径を求めよ.

(1) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z}}$

(2) $f(z)=\sin^{-1}(z)$（$\sin^{-1}(0)=0$ なる分枝を考える.）[1]

4-5　有理関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-2)^2}$ の円環領域 $0<|z|<2$ および $0<|z-2|<2$ におけるローラン展開を求めよ.

4-6　関数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ の円環領域 $1<|z-2|<2$ におけるローラン展開を求めよ.

4-7　次の関数を $z=0$ のまわりでローラン展開せよ.

$$f(z)=\frac{1}{z^5e^z},\qquad g(z)=z^3\sin\frac{1}{z}$$

4-8　次の関数を $z=0$ のまわりでローラン展開したときの負ベキの部分を求めよ.

$$f(z)=\frac{1}{z^3\sin z}$$

[1] $(\sin^{-1}(x))'=1/\sqrt{1-x^2}$ という関係と前小問を使うとよい.

$\boxed{\textbf{4-9}}$ 関数 $f(z) = z^{-1}e^{1/z^2}$ の円環領域 $|z| > 0$ におけるローラン展開を求めよ.

$\boxed{\textbf{4-10}}$ 領域 D の点 z_0 を除いた部分で定義された正則関数 $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ を考える. f がある自然数 r について $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^r f(z) = 0$ をみたすならば, f は z_0 のまわりで

$$f(z) = \sum_{n=-r+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

という形にローラン展開できることを示せ[2].

$\boxed{\textbf{4-11}}$ 関数 $f(z) = \log(1+z)$ の点 $z = 0$ での Taylor 展開を求めよ. ただし $\log(1+z)$ の分枝として $\log(1) = 0$ なるものを考える. 次に, その収束半径を求めよ. さらに, アーベルの定理（問題 3-11 参照）を用いることで, 次の等式を示せ.

(1) $\displaystyle \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$

(2) $\displaystyle \frac{\pi}{4} = \mathrm{Im}\log(1+i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

$\boxed{\textbf{4-12}}$ 関数 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ の原点 0 のまわりでのローラン展開を $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ とする.

(1) $n < 0$ について $a_n = 0$ であることを示せ.

(2) 奇数 n について $B_n = 0$ であることを示せ.

(3) $n \geq 0$ について $B_n = (2n)! \cdot a_{2n}$ はベルヌーイ数と呼ばれる. B_n, $n = 0, 1, 2, 3,$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{4-13}}$ 円環領域 $A = \{r < |z| < r'\}$ 上の任意の正則関数 $f : A \to \mathbb{C}$ は, 領域 $D_+ = \{|z| < r'\}$ と $D_- = \{|z| > r\}$ のそれぞれで定義された正則関数 $f_+ : D_+ \to \mathbb{C}$ と $f_- : D_- \to \mathbb{C}$（を A に制限したもの）の和として表せることを示せ. さらに, $\lim_{z\to\infty} f_-(z) = 0$ という条件をつければ $f_\pm$ は f から一意に定まることを示せ.

$\boxed{\textbf{4-14}}$ (1) 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が $f(z_0) = 0$ をみたすとき, 正則関数 $h : D \to \mathbb{C}$ が存在して, $f(z) = (z - z_0)h(z)$ という関係をみたすことを示せ. また, $h(z_0) = f'(z_0)$ を示せ.
(2) 正則関数 $f, g : D \to \mathbb{C}$ が $f(z_0) = g(z_0) = 0$ と $g'(z_0) \neq 0$ をみたすとき, 次を示せ.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad \text{（ロピタルの定理）}$$

[2]特に $r = 1$ で成り立てば f は D 上で正則な関数（の制限）であることがわかる.

§5 零点と孤立特異点

5-1 関数 $f(z) = \sin(z^3)$ の零点とその位数を求めよ.

5-2 関数 $f(z) = 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6)$ の零点 $z = 0$ の位数を求めよ.

5-3 関数 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4 + 1}$ の零点と特異点およびそれらの位数を求めよ.

5-4 関数 $f(z) = \tan z$ の零点と特異点およびそれらの位数を求めよ.

5-5 $z = 0$ が関数 $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$ の極であることを示し，その位数を求めよ.

5-6 $z = 0$ は関数 $f(z) = \dfrac{z}{\sin(z)}$ の除去可能特異点であることを示せ.

5-7 $z = 0$ は関数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)} - \dfrac{1}{z}$ の除去可能特異点であることを示せ.

5-8 点 z_0 が正則関数 $f(z)$ の r 位の零点ならば，$g(z) = 1/f(z)$ の r 位の極であることを示せ.

5-9 $z = 0$ は $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ の真性特異点であることを示せ．また，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $\epsilon > 0$ について $|w| < \epsilon$ かつ $f(w) = \alpha$ となる点があることを示せ.

5-10† $f(z)$ が領域 D 上の有理型関数であるとき，その導関数 $f'(z)$ も有理型関数であることを示せ．また，それらの極の位数の関係はどのようなものか？

5-11† $f(z), g(z)$ が領域 D 上の（恒等的に 0 でない）有理型関数であるとき，商 $f(z)/g(z)$ も有理型関数であることを示せ．また，その零点と極の位数は f と g のそれらからどのように定まるか？

5-12† D は閉単位円板 $|z| \leq 1$ を含む領域で定義された有理型関数で次の条件をみたすとする:

(1) $f(z)$ は開単位円板 $|z| < 1$ 上で正則.

(2) $f(z)$ は単位円周上に高々１位の極しか持たない.

このとき f の原点 $z = 0$ でのテイラー級数展開 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 a_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$ は有界であることを示せ[1].

[1] 有理型関数の定義から極は D 集積点を持たないので単位円周上には有限個しかない．それらの主要部（ローラン展開の負ベキの部分）を取り除くことを考えよ.

§6　零点と孤立特異点（つづき）

$\boxed{\textbf{6-1}}$　整関数 $f(z) = \cos(z + (\pi/4))$ の ∞ にまわりの Laurent 展開を求めよ.

$\boxed{\textbf{6-2}}$　関数 $f(z) = \log \dfrac{z-1}{z}$ の $z = \infty$ のまわりの Laurent 展開を求めよ.

$\boxed{\textbf{6-3}}$　$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3(z-2)^2}$ の極における主要部を求めよ.

$\boxed{\textbf{6-4}}$　次を示せ.

(1) $z = 0$ は $f(z) = e^{1/z}$ の真性特異点で，除外値は 0.

(2) $z = 0$ は $f(z) = \sin(1/z)$ の真性特異点で，除外値はなし.

$\boxed{\textbf{6-5}}$ † 　f, g が領域 D 上の有理型関数であるとき，$z \in D$ について

$$\mathrm{ord}(f;z) = \begin{cases} n & z \text{ が } f \text{ の } n \text{ 位の零点;} \\ -n & z \text{ が } f \text{ の } n \text{ 位の極;} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

と定義する．次を示せ.

(1) 積 $f \cdot g$ と商 f/g は有理型関数で

$$\mathrm{ord}(f \cdot g; z) = \mathrm{ord}(f;z) + \mathrm{ord}(g;z), \qquad \mathrm{ord}(f/g;z) = \mathrm{ord}(f;z) - \mathrm{ord}(g;z)$$

(2) 和 $f + g$ も有理型関数で

$$\mathrm{ord}(f+g;z) \geq \min\{\mathrm{ord}(f;z), \mathrm{ord}(g;z)\}$$

$\boxed{\textbf{6-6}}$　$f(z)$ が $D = \{0 < |z| < \infty\}$ で正則であって，ある定数 α（$0 < |\alpha| < 1$）について

$$f(z) = zf(\alpha z) \qquad \forall z \in D$$

を満たすとする.

(1) $z = 0$ での Laurent 展開は $f(z) = c\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{n(n-1)/2} z^n$（$c$ は定数）であることを示せ.

(2) $f(-\alpha) = 0$ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{6-7}}^{\dagger}$　点 z_0 が正則関数 f の r 位の零点であるとする．半直線 $\ell : \arg(z) = \theta$ の逆像 $f^{-1}(\ell)$ のうち $|z| < \epsilon$ にある部分は，$\epsilon > 0$ が十分小さいとき r 本の曲線になることを示せ．また，それらの曲線の原点でなす角を求めよ．

$\boxed{\textbf{6-8}}^{\dagger}$　領域 D 上の有理型関数 $f(z)$ について，広義積分

$$\int_D |f(z)|^2 dxdy \qquad (dxdy \text{ は複素平面上の通常の面積要素を表すとする.})$$

が有限であるならば，$f(z)$ は D 上で正則であることを示せ[1].

$\boxed{\textbf{6-9}}$　整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が無限遠点 ∞ を極とするならば，f は多項式関数であることを示せ．

$\boxed{\textbf{6-10}}^{\dagger}$　領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Im}(z) < b\}$ で定義された関数 $f(z)$ が $f(z+1) = f(z)$ $(\forall z \in D)$ をみたすとする．このとき $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

と関数項級数で表されることを示せ[2].

$\boxed{\textbf{6-11}}^{\dagger}$　関数 $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$ を領域 $D = \{|z| > 1\}$ で考える．

(1) $f(z)$ は 2 つの値をとる関数である．ある正則関数 $h : D \to \mathbb{C}$ が存在して，各点 $z \in D$ で $f(z) = \{\pm h(z)\}$ であることを示せ[3].

(2) $h(z)$ の ∞ における Laurent 展開を求めよ．

$\boxed{\textbf{6-12}}$　$z \in \mathbb{C}$ を固定する．$0 < |z| < \infty$ で正則な関数

$$f(z) = \exp\left(\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

の特異点 $z = 0$ での Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(a) z^n$$

とする．このとき次を示せ[4].

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(a\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

[1] r 位の極 z_0 の近傍で $f(z) \sim const.|z - z_0|^{-r}$ であることを使う．
[2] まず，ある関数 h について $f(z) = h(e^z)$ となることを示す.（これは解析 A1 の演習問題でもやった.）
[3] $f(z) = z\sqrt{1 - (1/z)}$ と表せることに注意すればよい．
[4] $J_n(\cdot)$ を n 次の Bessel 関数という．

解析B１ 演習問題 No.7　　(6/1)

§7　留数

7-1　$f(z) = \dfrac{z}{z^4+1}$ の孤立特異点における留数を求めよ.（$z=\infty$ も含めて考えよ.）

7-2　$f(z) = \dfrac{1}{\cos(z)}$ の孤立特異点とそれらの留数を求めよ[1].

7-3　$f(z) = e^z\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{a}{z^3}\right)$ の $z=0$ における留数を求めよ.（a は定数.）

7-4　関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$ の $z=-1$ と $z=\infty$ での留数を求めよ.

7-5　点 z_0 が正則関数 g, h の n 位および $n+1$ 位の零点であるとき，次を示せ.

$$\mathrm{Res}(g/h, z_0) = (n+1)\cdot\frac{g^{(n)}(z_0)}{h^{(n+1)}(z_0)}.$$

7-6　$f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ の孤立特異点とそれらの留数を求めよ.（$z=\infty$ も含めて考えよ.）

7-7　$f(z) = \dfrac{1}{\sin(z^2)}$ の孤立特異点とそれらの留数を求めよ.

7-8　$P(z)$ は z の2次以上の多項式とする．$P(z)$ の零点を $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ とするとき

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(1/P(z), w_i) = 0.$$

であることを示せ[2]．また，この事実は f が複素平面から有限個の点 $\{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ を除いて定義された正則関数であるときはどのように拡張されるか？

7-9　次の積分の値を求めよ[3].

$$\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$$

7-10　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ を求めよ.

---

[1] この場合は ∞ は孤立特異点とはみなせないので考えなくてよい.

[2] 大きな R について $|z|=R$ に沿う積分を考えてみるとよい.

[3] そのままやるのは大変．無限遠に目をやろう.

§8 留数積分

8-1 次を示せ[1]. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

8-2 $0 < a < 1$ について次を示せ. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

8-3 $a > |b|$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ を示せ.

8-4 次を示せ. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}$.

8-5 $a > 0$ について $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$ を示せ.

8-6 $a > 0$ について $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{a\sqrt{2}/2}\left(\cos\frac{a\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ を示せ.

8-7 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ.

8-8 † 関数 $f(z) = \dfrac{z}{a - e^{iz}}$ の長方形 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \le \pi, 0 \le \mathrm{Im}(z) \le h\}$ の境界に沿う積分を考えて，$h \to \infty$ の極限をとることで次を示せ.

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}dx = \frac{\pi}{a}\log(1+a)$$

8-9 † 関数 $f(z) = e^{iz^2}$ の扇形 $\{z \mid |z| \le R, 0 \le \arg(z) \le \pi/4\}$ の境界に沿う積分を考えて，$R \to \infty$ の極限をとることで次を示せ[2].

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

8-10 † 領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の境界に沿う $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ の積分を考察することで次を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi\log 2.$$

[1]最初の３問は教科書から．自分の言葉で説明を書くように

[2]$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ は既知としてよい.

解析Ｂ１ 演習問題 No.9 (6/15)

§9 偏角の原理

9-1 方程式 $e^z - 4z^n + 1 = 0$ は $|z| < 1$ の範囲にいくつ解を持つか？

9-2 方程式 $10z^3 + z^2 + 2z - 6 = 0$ の根は全て $|z| < 1$ の範囲にあることを示せ.

9-3 ルーシェの定理を２回適用することで方程式 $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ の $1 < |z| < 2$ の範囲にある解の個数を求めよ.

9-4 λ が実数の定数で $\lambda > 1$ であるとき，方程式 $ze^{\lambda - z} = 1$ の解が $|z| < 1$ の範囲に丁度１つあり，それは正の実数であることを示せ.

9-5 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が単純閉曲線 γ 上に零点を持たないとする．もし

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 1$$

であれば，偏角の原理から f が γ の内部に丁度１つの零点 z_0 を持つ．このとき次を示せ.

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}dz$$

9-6 正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が単純閉曲線 γ の内部に零点 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ を持ち，それぞれの位数が ν_N であるとき，正則関数 $g : D \to \mathbb{C}$ について次が成り立つことを示せ：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{n=1}^{N} \nu_n \cdot g(a_n)$$

9-7 領域 D における正則関数の列 $f_n : D \to \mathbb{C}$ が D 上で（定数関数でない）正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ に広義一様収束しているとする．f の零点 z_0 に対して次を示せ.

(1) $\epsilon > 0$ を十分小さくとれば，近傍 $\Delta = \{|z - z_0| < \epsilon\}$ の境界上で $f(z) \neq 0$ である.

(2) （１）でとった $\epsilon > 0$ に対して n_0 を十分大きくとれば，f_n（$n \geq n_0$）と f は Δ 内に同数の零点を持つ.（Hurwitz の定理）

解析 B 1 演習問題 No.10　　(6/22)

§10　1次分数変換

$\boxed{\textbf{10-1}}$　1次分数変換がリーマン球面 $\mathbb{P}$ から自身への全単射になることを確かめよ．

$\boxed{\textbf{10-2}}$　複素数の2次正則行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，1次分数変換を $S_A(z)=(az+b)/(cz+d)$ で定めるとき， $S_A \circ S_B = S_{AB}$, $S_{A^{-1}} = S_A^{-1}$ を示せ．また S_A と S_B が写像として一致するための必要十分条件は $A=kB$（$k\neq 0$）であることを示せ．

$\boxed{\textbf{10-3}}$　$S(z)=(2z+1)/(z+1)$, $T(z)=(3z+1)/(2z+1)$, $U(z)=(z-2)/(z+2)$ とするとき，次を求めよ．$S\circ T$,　$T\circ S$,　U^{-1},　$S\circ T\circ U$.

$\boxed{\textbf{10-4}}$　i を 0 に，∞ を 2 に，0 を 1 にうつす1次分数変換を求めよ．

$\boxed{\textbf{10-5}}$　非調和比 (z_1,z_2,z_3,z_4) について次を示せ．

(1) $\overline{(z_1,z_2,z_3,z_4)} = (\overline{z_1},\overline{z_2},\overline{z_3},\overline{z_4})$

(2) $c\neq 0$ について $(cz_1,cz_2,cz_3,cz_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4)$

$\boxed{\textbf{10-6}}$　1次分数変換 $f(z)=(z-1)/(z+1)$ で次の図形がどのような図形にうつるか調べよ．

(1) 単位円板

(2) 実軸と虚軸

$\boxed{\textbf{10-7}}$　0と1を動かさない1次分数変換を全て求めよ．またそれらでの虚軸の像はどのようになるか調べよ．

$\boxed{\textbf{10-8}}$　非調和比 $\lambda=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ は点の順序に依存する．点の順序の替え方は２４通りあるが，それらについて非調和比はどのような値をとるか？

§11　１次分数変換と等角写像

11-1　領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ を $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, z \neq i\}$ に一対一対応でうつす正則関数を全て求めよ．

11-2　２つの円 $|z| = 1$ と $|z - (1/4)| = 1/4$ を同心円にうつすような１次分数変換を求めよ．また，そのときの同心円の半径の比を求めよ．

11-3　1/4 円 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ を単位円板にうつす正則関数を一つ求めよ．

11-4　恒等変換以外の１次分数変換 f は１つまたは２つの不動点を持つことを示せ．

11-5　恒等変換以外の１次分数変換 f がただ一つの不動点 z_* を持つとき，次を示せ．

(1) h を $h(z_*) = \infty$ なる１次分数変換とする．このとき

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = z + b \quad (b \neq 0 \text{ は定数})$$

(2) さらに，h を適当にとることで $b = 1$ とできることを示せ．

11-6　恒等変換以外の１次分数変換 f が２つの不動点 $z_*, z_\dagger$ を持つとき，次を示せ．

(1) h を $h(z_*) = \infty$, $h(z_\dagger) = \infty$ なる１次分数変換とする．このとき

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = bz \quad (b \neq 0, 1 \text{ は定数})$$

(2) 上の b は $b = Df(z_*0)$ で定まる．

11-7　１次分数変換 $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ によって点列 z_n を $z_{n+1} = f(z_n)$ で定める．このとき点列 z_n は次のいずれかをみたすことを示せ．

(1) f の固定点に収束する．

(2) $\{z_n\}$ は一つの円（円周）に含まれる．

また (1) ではなく (2) の場合には z_n はどのような振る舞いをするか？

11-8　複素平面 $\mathbb{C}$ をそれ自身に一対一に写像する正則関数 f を考える．次を順に示せ．

(1) 点 $z_0 \in \mathbb{C}$ を $f'(z_0) \neq 0$ であるようにとれる．さらに，点 z_0 の開近傍 U を十分小さくとれば，$f(U)$ は $f(z_0)$ を含む開集合になる．

(2) ∞ は f の真性特異点ではない．

(3) ∞ は f の１位の極である．

(4) 実は $f(z) = az + b$ と表せる．