# 解析Ｂ１　　期末テスト　（解答とコメント）

$\boxed{1}$　次の関数の点 $z_0 = 1$ におけるテイラー展開とその収束半径を求めよ．

(1) $f(z) = \log(z)$

(2) $g(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$

**[解答]** (1) $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$ なので $z_0 = 1$ のまわりでのテイラー展開は

$$f(z) = \log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

$a_n = (-1)^{n-1}/n$ としたとき

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty}(n+1)/n = 1$$

なので，d'Alembert の判定法から収束半径は 1 である．

(2) $g(z)$ を部分分数に分解すると

$$g(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right)$$

右辺の各項のテイラー展開は容易に求めることができて，

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1/2)^{n+1}(z-1)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(-1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)(z-1)^n \end{aligned}$$

前小問 (1) と同様に d'Alembert の判定法を用いれば収束半径は 1 である．

**[配点]**　２０点（１０点×２）

**[コメント]** テイラー展開についての基本的な問題．$e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\log z$ のテイラー展開は微積分でも出てくるので，これぐらいは覚えておくとよい．(1), (2) とも「$|z-1| < r$ で関数が正則になる」ような最大の $r$ は 1 であることがわかるので,（極限を計算しなくても）収束半径は 1 であると結論できる．$g(z)$ を積に分解して積級数として求めようとした人が１０人ぐらいいたが，計算が複雑になって正解に到達するのは難しい．部分分数展開は（解析 A1 で講義したように）有理関数の取り扱いでは基本的なものなので使えるようにしておくとよい．

$\boxed{2}$　関数 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ について以下の問に答えよ．

(1) 原点 $z = 0$ は除去可能特異点であることを示せ．

(2) $f$ の特異点を求め，極についてはその位数と主要部を求めよ．

(3) $f$ の原点でのテイラー展開を３次の項まで求めよ．また，その収束半径は何か？

[**配点**]　３０点（１０点×３）[**解答**] (1) 分母 $e^z - 1$ は $z = 0$ に１位の零点を持つので，$h(0) = (e^z - 1)'|_{z=0} = 1$ なる正則関数 $h(z)$ を用いて

$$e^z - 1 = zh(z)$$

と表すことができる．よって 0 の近傍の 0 以外の点で

$$f(z) = 1/h(z)$$

よって $f(0) = 1/h(0) = 1$ と定めれば $f(z)$ は $z = 0$ の近傍での正則関数になる．よって $z = 0$ は除去可能特異点である．

(2) $f$ の分母が 0 になる点は $z = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$ で，それ以外の点では正則になる．$z = 0$ は (1) で示したように除去可能特異点なので $z_0 = 2\pi ki$（$k \neq 0$）を考える．$z_0 = 2\pi ki$ の近傍においては $f$ の分子が 0 ではなく，分母は（微分して調べることで）$z_0$ に１位の零点を持つことがわかる．よって $z = 2\pi ki$ は１位の極で，主要部は

$$\frac{C}{z - 2\pi ki}$$

という形になるはずである．$C$ は留数で

$$C = \left.\frac{z}{(e^z - 1)'}\right|_{z=2\pi ki} = 2\pi ki$$

で与えられる．以上から特異点は $z = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, であって，これはは全て１位の極になり，主要部は $2\pi ki/(z - 2\pi ki)$ である．

(3) $f(z)$ は $z = 0$ の近傍で定義された正則関数と考えると，$(e^z - 1)f(z) = z$ という関係が $z = 0$ の近傍で成り立つ．そこで両辺を１〜３回微分して $z = 0$ を代入すれば $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, 3,$ を求めることができ，

$$f(0) = 1, f'(0) = -1/2, f''(z) = 1/6, f'''(z) = 0$$

である．よって，テイラー展開の３次までの項は

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$

$f(z)$ は $|z| < 2\pi$ の範囲で正則で，円の半径を少しでも広げると特異点 $z = \pm 2\pi i$ を含むことになるので，収束半径の特徴付けから収束半径は $2\pi$.

[**コメント**] 有理型関数の特異点についての標準的な問題．予行演習の問題に比べると易しくした．(3) 微分やテイラー展開の係数を比べることで得られるので求め方はいろいろある．（述べた方法にこだわる必要はない.）(1), (2) については是非できてほしい．

$\boxed{3}$ 関数項級数

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$$

について以下の問に答えよ.

(1) 関数項級数が単位円板 $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ において広義一様収束することを示せ.

(2) 正の整数 $n$ の約数の個数を $\tau(n)$ とする．ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)z^n$ の収束半径を求めよ.

(3) 単位円板内で $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)z^n$ を示せ.

**[配点]** ３０点（１０点×３）

**[解答]** (1) 単位円板 $\mathbb{D}$ に含まれる任意のコンパクト集合は十分 1 に近い $0<b<1$ をとれば $\mathbb{D}(b)=\{|z|<b\}$ に含まれる.（コンパクト集合上で連続関数 $z\mapsto|z|$ を考えると最大値を持つのでその値を $b<1$ とすればよい.）よって任意の $0<b<1$ を固定するとき，関数項級数が $\mathbb{D}(b)$ 上で一様収束することを示せばよい．関数項級数の各項については $\mathbb{D}(b)$ 上で

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right|\leq M_n:=\frac{b^n}{1-b^n}$$

という評価が成り立つ．また

$$\sum_{n=1}^{\infty}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{1-b^n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{1-b}<\frac{b}{(1-b)^2}<\infty$$

である．よってワイエルストラスの $M$ 判定法から $\mathbb{D}(b)$ 上で一様収束する.

(2) $1\leq\tau(n)\leq n$ と $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tau(n)}=1$$

である．よって，Cauchy の判定法から収束半径は 1 である.

(3) 関数項級数の第 $n$ 項は $f_n(z)=z^n/(1-z^n)=z^n+z^{2n}+z^{3n}+\cdots$ である．これを

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}z^k \qquad a_k^{(n)}=\begin{cases}1 & k\text{ が } n \text{ の倍数.}\\ 0 & \text{それ以外.}\end{cases}$$

ここで,（問題にヒントで書いた事実「一般に正則関数列 $f_n$ がある正則関数 $f$ にある領域 $D$ 上で広義一様収束するならば，$f_n$ の $k$ 階微分は $f$ の $k$ 階微分に広義一様収束する」から）$S^{(m)}(0)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(m)}(0)$ が成り立つので，$S(z)$ の $z=0$ でのテイラー展開を $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ とすると

$$b_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_k^{(n)}=\tau(k)$$

となる．よって与えられた等式が示せた.

**[コメント]** 関数項級数の取り扱いの応用的な問題．多少難しかったかもしれない．(1) は広義一様収束についての問題でワイエルストラスの判定法を使えば容易である.（もちろん，直接示しても難しくない.）(2) は収束半径について，最初の定義に基づいて「$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)z^n$ が収束するためには $|z|$ はどの範囲にあればよいか？」と考えれば難しくないはず．判定法を習うとすぐにそれに頼ってしまう（ので，あまり教えたくない）が，何事もまず「対象をよく見て何を示さなければならないかをよく考える」のが基本．微積分でも習っているはずだが,（１番のような）素直な場合を除くと d'Alembert の判定法は役に立たないことが多い．この問題で d'Alembert の判定法を使おうとするのは筋が悪い．(3) は各項のテイラー展開を書いてみるとわかるのだが，ちょっと思いつきにくかったかもしれない.

$\boxed{4}$ 次の実積分について以下の問いに答えよ[1].

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx$$

(1) $n \geq 2$ が偶数であるとき，留数積分を使って

$$I_n = -\sum_{k=1}^{n/2} \frac{\pi i \cdot e^{(2k-1)\pi i/n}}{n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

を示せ．だたし，積分経路や途中の評価について示すこと．

(2) $n \geq 3$ が奇数のときにも上の等式が成り立つことを示せ．
（ヒント：扇形 $D = \{|z| < R, 0 \leq \arg(z) \leq 2\pi/n\}$ の周に沿う積分を考えよ.）

**[配点]** ２０点（(1) ができて１５点，(2) ができて２０点満点）
**[解答]** (1) $2I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ であることと，分母が 0 になる点は $z^n + 1 = 0$ の解であり，$z_k = e^{(2k-1)\pi i/n}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ であることに注意すれば，講義でやった標準的な方法（教科書 p159 参照）で

$$2I_n = 2\pi i \sum_{k=1}^{n/2} \mathrm{Res}(f, z_k) \qquad f(z) = \frac{1}{1+z^n}, \quad z_k = e^{(2k-1)\pi i/n}$$

であることがわかる．さらに $z_k$ は１位の極であるので，留数は

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \left.\frac{1}{(1+z^n)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{-z_k}{n}$$

これを上の等式に代入すれば求める公式が得られる．

(2) これは図が必要であるので答えは省略する．ヒントと教科書 p167 の例題８を参照.（３を一般の $n$ にして議論すればよい.）

**[コメント]** 留数積分についての標準的な問題．(1) については教科書通りなのでできてほしい．予行演習でやった問題が仇になってしまった人も何人かいたが，十分時間があったはずなので落ち着いて考えればできたはずである．右側の等式（Lagrange の等式）で引っかかった人もいるかもしれないが，今回の範囲ではない．(2) についてもヒントがあればそれほど難しくはないはずと思うができている人はあまり多くなかった．

[1] 小問 (2) のヒントに従って (2) を解くと (1) は自動的に得られるので，(2) だけ解いてもよい．

$\boxed{5}$ 関数 $f(z)=z^5-8z^3+1$ について次の問いに答えよ．

(1) $|z|<2,\ 2<|z|<3,\ |z|>3$ の範囲に $f$ はいくつ零点を持つか？

(2) 偏角の定理の証明の議論を思い出して，次の積分の値を $f$ の零点 $z_k,\ 1\le k\le 5,$ を用いて表せ．さらに解と係数の関係からその値を求めよ．

$$\int_{|z|=3}\frac{z^2 f'(z)}{f(z)}dz$$

**[配点]** ２０点（(1) ができて１５点，(2) ができて２０点満点）

**[解答]** (1) 円 $|z|=3$ 上で $|z^5|=3^5>8\cdot 3^3+1\ge|-8z^3+1|$ であるので，ルーシェの定理を適用すれば $f(z)$ と $z^5$ は $|z|<3$ に同数の零点を持つので，$f(z)$ は $|z|<3$ に５個の零点を持つ．同様に，円 $|z|=2$ 上で $|-8z^3|=8\cdot 2^3>2^5+1\ge|z^5+1|$ であるので，ルーシェの定理を適用すれば $f(z)$ と $-8z^3$ は $|z|<2$ に同数の零点を持つので，$f(z)$ は $|z|<2$ に 3 個の零点を持つ．また，代数学の基本定理から $f(z)$ の零点は全部で 5 個．よって $f(z)$ は $|z|<2$ に 3 個，$2<|z|<3$ に２個，$|z|>3$ に０個の零点があることになる．

(2) 偏角の原理の証明の要点は関数 $f'(z)/f(z)$ は $f(z)$ の各零点 $w$ に位数１の極を持ち，留数が 1 になることであった．よって $z^2f'(z)/f(z)$ は（$f$ の零点は 0 でないことに注意すれば）$f(z)$ の各零点 $w$ に位数１の極を持ち，留数は $w^2$ になる．よって，与えられた積分は

$$2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{5}z_k^2$$

になることがわかる．これは解と係数の関係から

$$2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{5}z_k^2=2\pi i\left(\left(\sum_{k=1}^{5}z_k\right)^2-\sum_{k\ne\ell}z_kz_\ell\right)=2\pi i(0^2-(-8))=16\pi i.$$

**[コメント]** (1) はルーシェの定理の標準的な問題．講義や演習でやっているので難しくないと思う．実際，多くの人が正解していた．ただし，これらの問題は「ルーシェの定理が適用できるように作られている」ので，実際に与えられた多項式でこのようなことが成り立つのは稀であって，その点は誤解しないようにしてほしい．(2) は偏角の原理を留数定理からどのように導かれるかに立ち戻って考えてほしかったが，できたのは３人ほどでちょっと残念だった．７番でルーシェの定理が面白いと書いている人が多かったが，どのような仕組みでその定理が成り立っているかということやそれがどのように一般化できるかということに考えを巡らすことでもっと深い理解が得られると思う．数学科で求められる「興味」というのはそういうものではないか．

$\boxed{6}$　１次分数変換 $F$ で $F(0)=0$, $F(1)=1+i$, $F(-1)=-1+i$ をみたすものを考える．

(1) $F$ を求めよ．

(2) 実軸と虚軸の像を求めよ．

(3) 半直線 $\arg(z)=\theta$ の $F$ による像はどのような曲線になるか？図示せよ．

[**略解**] (1) $f(z)=2iz/(z+i)$

(2) 実軸は円 $|z-i|=1$, 虚軸は虚軸にうつる．

(3) 原点と $2i$ を通る円で，実軸と交わる角が $\theta$ の円（の一部）になる．

$\boxed{7}$　解析 B1 の講義（または複素関数論一般）で習ったことのうち，最も興味深いと思った（数学的）内容について述べよ．

[**コメント**] 一応試験の問題なので「（数学的）内容」について述べるということを求めたつもりであったが，何人かの例外を除くと「感想」で終わってしまっている人がほとんどで,（興味深く読ましてもらったが）出題者としては少々残念であった．