解析Ａ１　　小テスト　　No.1　　(10/3)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の値を（極表示の形で）求めよ．

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^n$$

$\boxed{2}$ 方程式 $z^3=-i$ の解（-1 の３乗根）を求め，複素平面に図示せよ．

解析 A 1　　小テスト　　No.2　　(10/10)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　次の複素平面上の写像を複素関数として表せ.（z と $\bar{z}$ の多項式の形に表せ.）

(1) 点 i を中心とする角度 $\pi/4$ の回転.

(2) 直線 $\{z = x + iy \mid x = y\}$ についての対称移動.

$\boxed{2}$　関数 $f(z) = z^2$ が $z = 1$ で連続であることを極限の定義に基づいて直接証明せよ.（任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を適当に指定してしめす.）

解析 A 1　　小テスト　　No.3　　(10/17)

学生番号　　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の関数 f が $\mathbb{C}$ で正則になるための実数の定数 α, β, γ についての必要十分条件を求めよ.

$$f(x+iy) = e^{\alpha y}(\cos \beta x + i \sin \gamma x)$$

$\boxed{2}$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則であるとき，関数 $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ も正則であることを示せ.

解析 A 1　　小テスト　　No.3　（解答）　　(10/17)

$\boxed{1}$ 次の関数 f が $\mathbb{C}$ で正則になるための実数の定数 α, β, γ についての必要十分条件を求めよ．

$$f(x+iy) = e^{\alpha y}(\cos\beta x + i \sin\gamma x)$$

解答： 実部，虚部は明らかに C^∞ 級であるので，f が正則であるために必要十分条件は Cauchy-Riemann の方程式が成り立つことである． Cauchy-Riemann の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \implies -\beta e^{\alpha y}\sin\beta x = \alpha e^{\alpha y}\sin\gamma x \iff -\beta\sin\beta x = \alpha\sin\gamma x \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \implies \gamma e^{\alpha y}\cos\gamma x = -\alpha e^{\alpha y}\cos\beta x \iff \gamma\cos\gamma x = -\alpha\cos\beta x \tag{2}$$

と書き表すことができる．ここで

- (1), (2) は「全ての x について成り立つ」ことが条件，ただし，
- (1), (2) から「係数比較で」$-\beta = \alpha$, $\beta = \gamma$, $\gamma = -\alpha$ とはできない（実際，それ以外の解がある！）

ことに注意．例えば (2) に $x = 0$ を代入すれば $\gamma = -\alpha$ が得られる．また (1) の両辺を x で微分して $x = 0$ を代入すれば $-\beta^2 = \alpha\gamma$ が得られる．よって，$\alpha = -\gamma = \pm\beta$．逆にこれが成り立つとき (1), (2) が成り立つ．

$\boxed{2}$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則であるとき，関数 $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ も正則であることを示せ．

解答：微分の定義から

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}}{\overline{\overline{z}-\overline{z_0}}} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}$$

$z \to z_0$ と $\overline{z} \to \overline{z_0}$ は同値あることに注意すれば，f が微分可能であることから極限

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)$$

が存在することがわかる．よって（$z \mapsto \overline{z}$ の連続より）極限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}$$

が存在する．

別解 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$，$g(x+iy) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ とおくと定義から

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,-y), \qquad \tilde{v}(x,y) = -v(x,-y)$$

という関係がわかる．このとき u, v についての CR 方程式から $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ についての CR 方程式を示せばよい．

解析Ａ１　小テスト　No.4　(10/24)

学生番号　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の方程式の解を求めよ．$e^z = 1 - \sqrt{3}i$

$\boxed{2}$ 次の有理関数を部分分数展開せよ．$f(z) = \dfrac{z^3}{z^4+1}$

解析Ａ１　　小テスト　　No.5　　(10/31)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の変形が正しくないのはなぜか？説明せよ．

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

$\boxed{2}$ 次の方程式の解を全て求めて，複素平面上に図示せよ．$\sin(z) = 2$

解析 A 1　　小テスト　　No.6　　(11/7)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ について正則関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}(f(x+iy)) = u(x,y)$ をみたすものを求めたい．次の問いに答えよ．

(1) u が調和関数であることを定義にしたがって確かめよ。

(2) $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくとき，Cauchy-Riemann の方程式から $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ を求めよ．

(3) $v(x,y)$ と $f(z)$ を求めよ．

解析 A 1　　小テスト　　No.7　　(11/14)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 次の経路（曲線）γ に沿う積分 $\int_\gamma z^3 dz$ を求めよ.

(1) 0 と $1-i$ を結ぶ線分上を 0 から $1-i$ に向かう経路.

(2) 円周 $|z|=1$ に沿って 1 から -1 へ反時計回りに進む経路.

解析Ａ１　　小テスト　　No.8　　(11/28)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 楕円 $4 \cdot \mathrm{Re}(z)^2 + (1/4) \cdot \mathrm{Im}(z)^2 = 1$ の周を反時計回りに１周する閉曲線を γ とする.

(1) $\dfrac{2z}{z^4 - 1}$ を部分分数展開せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{z^4 - 1} dz$ を求めよ.

解析 A 1　　小テスト　　No.9　　(12/5)

学生番号　　　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$　曲線 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ を $\gamma(t) = \exp(-t + 2\pi i t)$ で定義する．

(1) 曲線 γ（の像）の概形を描け．

(2) 線積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-2}$ を定義に従って t についての積分として表せ．

(3) コーシーの積分定理を利用して，積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-2}$ を求めよ．(ヒント：γ の端点を結んで閉曲線を考える．)

解析Ａ１　小テスト　No.10　(12/12)

学生番号　　　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 曲線 $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ を $\gamma(t) = \exp(t^2 + 2\pi i t)$ で定義する.

(1) 曲線 γ の概形を描け.

(2) 積分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z^2} dz$ を求めよ.

解析Ａ１　小テスト　No.11　(12/19)

学生番号　　**氏名**

$\boxed{1}$ コーシーの微積分公式を利用して次の積分の値を求めよ．

$$\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z^2-1)^3}\,dz$$

解析Ａ１　小テスト　No.12　(1/9)

学生番号　　　　**氏名**

$\boxed{1}$ 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ の $z = -1$ でのテイラー級数展開を求めよ．また，円板

$$D(-1, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| < r\}$$

の全ての点 z で求めたテイラー級数が $f(z)$ に収束するような最大の r を求めよ.
ヒント：テイラー展開の定理から r が１以上であることがわかる.（なぜか？）１より大きくならないことを示す.

解析Ａ１　　小テスト　No.13　(1/23)

学生番号　　　　　　**氏名**

今日配った「期末テスト　予行演習問題」から１題を選んで解答しなさい.