<u>復習</u>　$f : D \to \mathbb{C}$　正則関数

$\gamma : [0,1] \to D$　D内の(区分C^1級)曲線

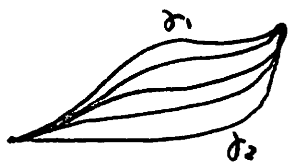
$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

<u>注意</u>：積分の値はパラメータの取り方には(向きを保つ限り)依存しない。

(それで定義域を$[a,b]$でなく$[0,1]$にしている。)

<u>コーシーの積分定理</u>

γ_1とγ_2がホモトープなら $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$



<u>バリエーション</u>

- 閉曲線γが定値写像とホモトープなら $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- 単純閉曲線γの内側がDに含まれるならば $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- $D' \subset D$の境界が単純閉曲線$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$からなり「適切に向きがつけられている」

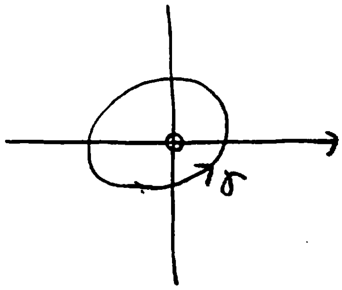
ならば $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 0.$

<u>原始関数</u>　$F'(z) = f(z)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$　(端点$\gamma(0), \gamma(1)$だけで決まる。)

領域Dが単連結(例えば円板と同相)ならば原始関数が存在する。

例 $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ $(n>1)$



$$\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z^n}\,dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(\varepsilon e^{2\pi i t})^n} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i t}\,dt$$

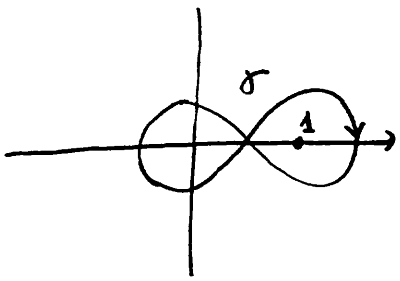
$$= 2\pi i \cdot \varepsilon^{-n+1} \cdot \int_0^1 e^{2\pi(n-1)t}\,dt$$

$$= 2\pi i\, \varepsilon^{-n-1} \left(\int_0^1 \cos 2\pi(n-1)t + i \sin 2\pi(n-1)t\,dt \right)$$

$$= 0$$

どんな閉曲線（原点を通らない）についても $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

例 $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{(z-1)^2}$



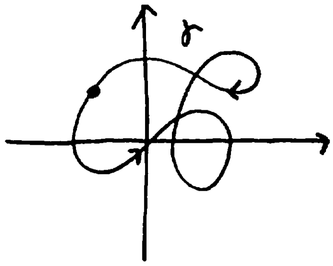
$$\int_\gamma f(z)\,dz \cancel{= 2\pi i}$$

$$= \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{1}{z-1}\,dz + \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{1}{(z-1)^2}\,dz$$

$$= 2\pi i$$

e. コーシーの積分定理の応用

例 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = e^z$

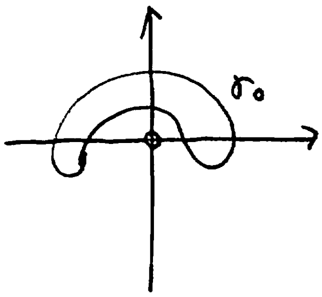


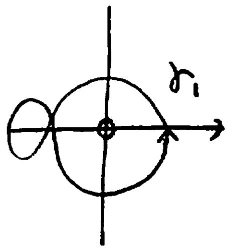
・どんな閉曲線についても $\int_\gamma e^z dz = 0$

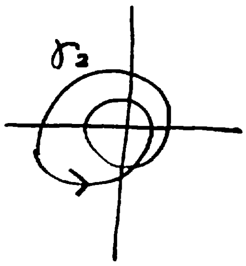
・$(e^z)' = e^z$ よりどんな曲線 γ についても

$$\int_\gamma e^z dz = e^{\gamma(0)} - e^{\gamma(1)}$$

例 $f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{1}{z}$.

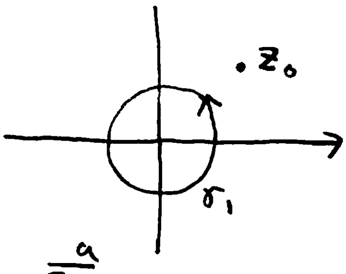


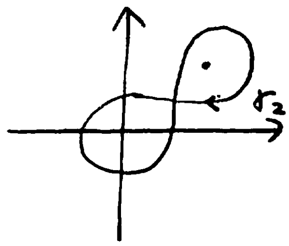


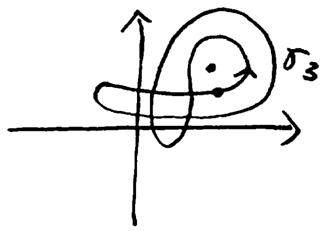


$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = 0 \qquad \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} = -4\pi i$$

例 $f: \mathbb{C} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{a}{z - z_0}$

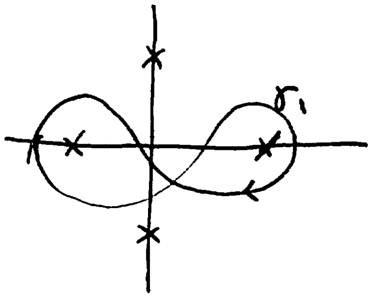


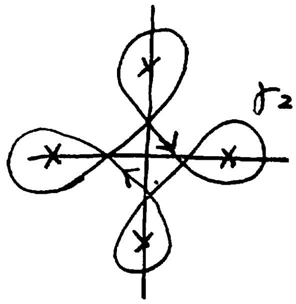




$$\int_{\gamma_1} \overset{\frac{a}{z-z_0}}{\cancel{f(z)}} dz = 0 \qquad \int_{\gamma_2} \frac{a}{z - z_0} dz = a \cdot \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i a \qquad \int_{\gamma_3} \frac{a}{z - z_0} dz = 0.$$

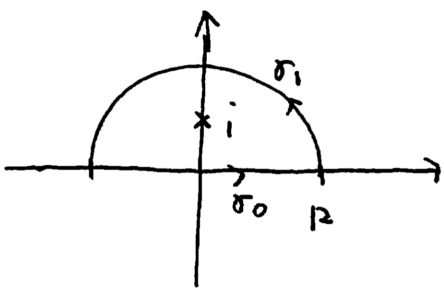
例 $f(z) = \frac{1}{z^4-1} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z-i} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}$





$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ $\quad\int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

例 $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{-(i/2)}{z-i} + \frac{(i/2)}{z+i}$



$\int_{\gamma_0+\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}dz = \left(-\frac{i}{2}\right) \times 2\pi i$ (Rによらない。)

$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}dx$

$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{it})^2+1} iRe^{it}dt$

$= \int_0^{\pi} \frac{i \cdot R^{-1}e^{-it}}{1+(R^{-1}e^{-it})^2}dt$

よって $\left|\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}dz\right| \le \int_0^{\pi} \frac{R^{-1}}{1-R^{-2}}dt$

$\le 2\pi R^{-1}$ $\quad(R \gg 1)$

特に $R \to \infty$ のとき $\left|\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}dz\right| \to 0$ なので

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \left(-\frac{i}{2}\right) \times 2\pi i = \pi$

NO.

f. コーシーの積分定理の証明

<u>補題</u>　$f: D \to \mathbb{C}$ 正則

$R = [a,b] \times [c,d]$　D に含まれる長方形

R の周を反時計回りに ~~回る~~ 一周する曲線 γ について

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

証明]　$f(z)$ を

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

~~あらわすとする~~。と表わす。このとき Cauchy-Riemann 方程式は

$$(CR)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4つの線分 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ を

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C} && \gamma_1(t) = t + ic \\
&\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C} && \gamma_2(t) = t + id \\
&\gamma_3 : [c,d] \to \mathbb{C} && \gamma_3(t) = a + it \\
&\gamma_4 : [c,d] \to \mathbb{C} && \gamma_4(t) = b + it
\end{aligned}$$

とすると　$\gamma = \gamma_1 + \gamma_4 - \gamma_2 - \gamma_3$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b u(t,c) + i\,v(t,c)\,dt - \int_a^b u(t,d) + i\,v(t,d)\,dt \\
&\quad + \int_c^d (u(b,s) + i\,v(b,s))\,i\,ds - \int_c^d (u(a,s) + i\,v(a,s))\,i\,ds \\
&= -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial u}{\partial y}(t,s) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(t,s)\,ds \right) dt + \int_c^d \left(\int_a^b i\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,s) - \frac{\partial v}{\partial x}(t,s)\,dt \right) ds \\
&= \int_a^b \int_c^d -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy \overset{(CR)}{=} 0. \qquad //
\end{aligned}$$

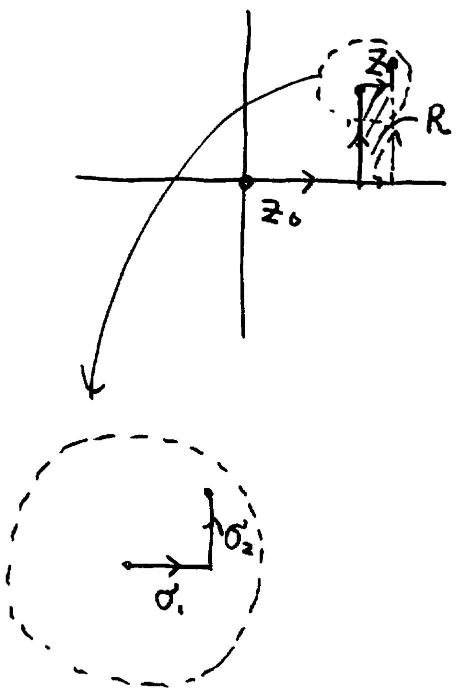
命題 $f: D \to \mathbb{C}$ 正則

$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ D内の円板.

このとき B上で fの原始関数 $F: B \to \mathbb{C}$ (i.e. $F'(z) = f(z)$ $(\forall z \in B)$) が存在する。

証明] "単連結領域上の原始関数の存在 ~~とほ~~ の証明とほぼ同じ。

σ_z $(z \in B)$ を z_0 を始点, z を終点とする次のような折れ線とする:



このとき $F(z) = \int_{\sigma_z} f(z)\, dz$ とする。

$z' = z + (\Delta x + i\Delta y)$ を z の近傍の点とすると 補題より

$$F(z') - F(z) = \int_{\sigma_1} f(z)\, dz + \int_{\sigma_2} f(z)\, dz$$
$$= \int_0^1 f(\sigma_1(t))\, \Delta x\, dt + \int_0^1 f(\sigma_2(t))(i\Delta y)\, dt.$$

よって

$$F(z') - F(z) - f(z)(\Delta x + i\Delta y)$$
$$= \int_0^1 (f(\sigma_1(t)) - f(z))\Delta x\, dt + \int_0^1 (f(\sigma_2(t)) - f(z))(i\Delta y)\, dt$$

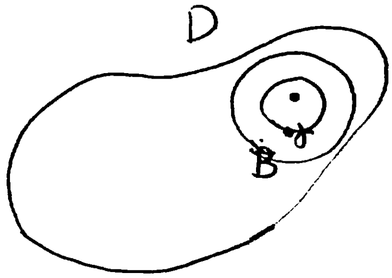
$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ を十分小さくとれば, $|w - z| < \delta$ ならば ($w \in D$ で)

$|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. よって $|z' - z| < \delta$ ならば

$$|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)| \leq 2\varepsilon |z' - z|$$

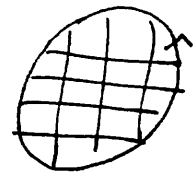
$\Leftrightarrow \left| \dfrac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| < 2\varepsilon$ よって $F'(z) = f(z)$.

正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ について $z \in D$ を含む（D内の）円板 B をとれば B上では f の原始関数が存在する。特に B内の任意の閉曲線 γ について $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$



このことから定理3は直接次のように示すことができる：

<u>定理3の証明</u> γ の内側を図のように小さな領域 $D_1, \dots, D_\ell$ に分割して



・各 D_i は上のような D内の円板に含まれる

ようにできる。よって D_i の周を反時計回りに一周する閉曲線を γ_i とすると

$$\int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 0.$$

このとき共有する境界の部分で線積分が打ち消しあうことから

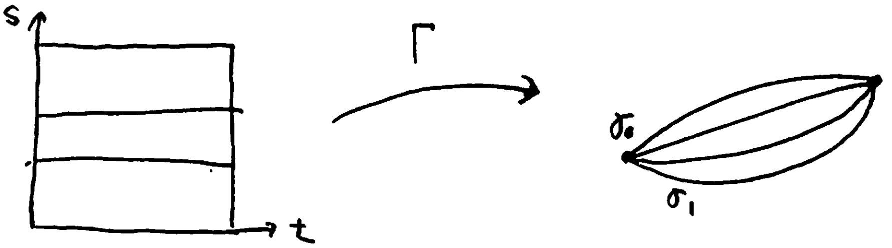
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 0$$

//

定理1の証明. $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ が D内でホモトープなので

ある連続写像 $\Gamma : [0,1]\times[0,1] \to D$ が存在して

- $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$
- $\Gamma(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\Gamma(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.



$N > 0$ を整数として　$0 \le i \le 2^N$, $0 \le j \le 2^N$ について

$$\gamma_{ij} : [0,1] \to D \qquad \gamma_{ij}(t) = \Gamma(2^{-N}(i+t), 2^{-N}j)$$

$$\sigma_{ij} : [0,1] \to D \qquad \sigma_{ij}(t) = \Gamma(2^{-N}i, 2^{-N}(j+t))$$

とする。このとき

$$C_{ij} = \gamma_{ij} + \sigma_{i+1,j} + (-\gamma_{i,j+1}) + (-\sigma_{ij})$$

は閉曲線になる。さらに N が十分大きいとき、C_{ij} を含んで D に含まれる円盤 B_{ij} をとることができる。よって命題より

$$\oint_{C_{ij}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{ij}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{i,j+1}} f(z)\,dz + \int_{\sigma_{ij}} - \int_{\sigma_{i+1,j}} = 0$$

注意　厳密にいうと γ_{ij} (や σ_{ij}) は単に連続な曲線なので $\int_{\gamma_{ij}} f(z)\,dz$, ~~$\int_{\sigma_{ij}} f(z)dz$~~ は定義されていない。そこで円盤 B を γ_{ij} の像を含むようにとり, B 上での f の原始関数 F を用いて

$$\int_{\gamma_{ij}} f(z)\,dz = F(\gamma_{ij}(1)) - F(\gamma_{ij}(0))$$

と定める。これは B や原始関数のとり方によらない。

両辺を i,j について加えると

$$0 = \sum_{i,j} \int_{C_{ij}} f(z)\,dz = \sum_i \left(\int_{\gamma_{i,0}} - \int_{\gamma_{i,2^N}} \right) + \underbrace{\sum_j \left(-\int_{\sigma_{0,j}} + \int_{\sigma_{2^N,j}} \right)}_{=0}$$

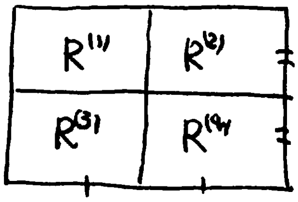
$$= \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \qquad //$$

実は補題の証明は単に $f(z)$ が D上で微分可能 という条件の下で成立する。(グルサ (Grousat) による証明.)

背理法を用いる。
$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| > {}^{\exists}\varepsilon > 0$ とする。

補題の証明 (微分の連続性を仮定しない証明)

長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ を図のように4等分して長方形 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ に分ける。



このとき $R^{(i)}$ の周を反時計回りに一周する閉曲線を $\partial R^{(i)}$ と表すと

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\partial R^{(1)}} f(z)dz + \cdots + \int_{\partial R^{(4)}} f(z)dz$$

$|\partial R^{(1)}| =$

$\cancel{\text{Area}(R) = \text{Area}\,R^{(1)} + \cdots + \text{Area}\,R^{(4)}}$

よってある i について

$$\frac{\left|\int_{\partial R^{(i)}} f(z)dz\right|}{\text{Area}\ R^{(i)}} \geq \frac{\varepsilon}{\text{Area}\ R}.$$

~~以下~~ $R^{(i)}$ を四等分して同様な議論を繰り返すと長方形の縮小列

$$R_0 = R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots$$

で

$$\frac{\left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right|}{\text{Area}\,R_n} \geq \frac{\left|\int_{\partial R_{n-1}} f(z)dz\right|}{\text{Area}\,R_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{\varepsilon}{\text{Area}\,R} \quad \cdots (*)$$

このとき $\bigcap R_n$ は1点 z_* になる。~~任意~~ 点 z_* で f が ~~連続~~ 微分可能であることから

十分小さな $\delta>0$ をとれば次が成り立つ

$$|z-z_*|<\delta \text{ ならば } z\in D \text{ かつ } \left|\frac{f(z)-f(z_*)}{z-z_*} - f'(z_*)\right| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow$$

$$|f(z)-f(z_*)-f'(z_*)(z-z_*)| < \varepsilon.$$

Nを十分大きくとると R_N は $|z-z_*|<\delta$ の範囲に入る。ここで

$$\int_{\partial R_N} 1\cdot dz = 0 \qquad \int_{\partial R_N} z\,dz = 0$$

(1, zの原始関数はz, $\frac{z^2}{2}$)

より

$$\int_{\partial R_N} f(z)\,dz = \int_{\partial R_N}\{f(z)-f(z_*)-f'(z_*)(z-z_*)\}\,dz$$

$$\left|\int_{\partial R_N} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\cdot|\partial R_N|\cdot \mathrm{diam}\, R_N$$

$$\le \underbrace{\mathrm{const}}_{\text{長方形Rのみによる定数.}}\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{Area}\, R_N$$

~~ここで εは任意なので~~ つまり

$$\frac{\left|\int_{\partial R_N} f(z)\,dz\right|}{\mathrm{Area}\, R_N} \le \mathrm{const}\cdot\varepsilon.$$

~~ここで~~ εは任意なので これは(*)に反する。//

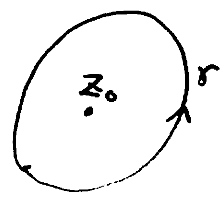
9. コーシーの積分公式

<u>定理</u>（コーシーの積分公式）

$f: D \to \mathbb{C}$ 正則，$\gamma: [0,1] \to D$ 区分 C^1 級閉曲線

γ の内側は D に含まれ，γ は反時計回りに向きづけられているとする。

このとき γ の内側の点 z_0 について



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

<u>注意</u> 等式は ~~fのz₀での値がγ上での値からきまることを示している~~

f の γ 上での値がきまれば γ の内側の点での値もきまることを示している。

証明] コーシーの積分定理から，十分小さな $r > 0$ について

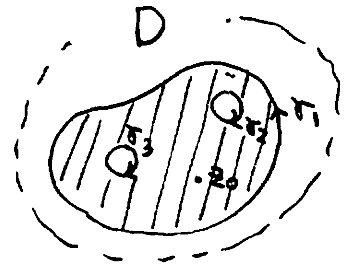
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$ （r によらずに成り立つ）

特に $r \to 0$ とすると ______ は $f(z_0)$ に近づく。

多重連結領域の場合にも

<u>注意</u> 証明の ~~$=f(z_0)$~~ 議論から明らかなように，定理は次のように拡張できる。

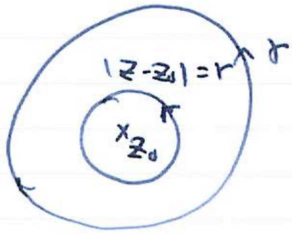


$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right)$$

例 $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz = \int_{|z-i|} \frac{1}{z-i}\left(\frac{e^z}{z+i}\right)dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=i} = \pi e^i$

定理 $f: D\to\mathbb{C}$ が正則ならば $f'(z)$ もD上で正則. また前定理の状況で

(#) $\displaystyle f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$



~~より一般に n回微分 について~~

~~$f^{(n)}(z)$~~

証明 コーシーの積分公式から $z_0\in D$ について r (<1) を十分小さくとれば

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

また $|\Delta z|$ が十分小さければ　($|\Delta z| \ll r$ とする)

$$f(z_0+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=1}\frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z_0}\,dz.$$

よって

$$☆ = \frac{1}{\Delta z}\{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=1}\frac{1}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=1} f(z)\cdot\left\{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-z_0-\Delta z}\right)-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}dz$$

!

特に $|\Delta z| < r/2$ であれば

$$|\sim\sim| = \left|\frac{\Delta z}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right| \le |\Delta z|\cdot(2r^{-3})$$

よって

$$|☆| \le 2r^{-2}\cdot\left(\max_{|z-z_0|=1}|f(z)|\right)\cdot|\Delta z|.$$

つまり ~~よって~~ $|\Delta z|\to 0$ のとき $|☆|\to 0$ である。

従って

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

コーシーの積分定理から これは(#)を意味する。

$$\left(\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz=\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right)$$

次に $f'(z)$ が正則であることを示す。前の議論でコーシーの積分公式のかわりに(#)を使えば

$$(*)'=\frac{1}{\Delta z}\left(f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)\right)-\frac{2}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}f(z)\left\{\underbrace{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^2}-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right)-\frac{2}{(z-z_0)^3}}_{\sim\sim}\right\}dz$$

ここで $\sim\sim$ を計算すると

$$\sim\sim=\frac{3(z-z_0)\Delta z-2(\Delta z)^2}{(z-z_0-\Delta z)^3(z-z_0)^3}$$

特に $|\Delta z|<r/2$ とすると

$$|\sim\sim|<|\Delta z|\cdot\cancel{\text{const}}\,(30r^{-5})\cdot\cancel{\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|}$$

よって

$$|(*)'|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|}|\Delta z|\cdot(30r^{-5})\cdot\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|\,|dz|=|\Delta z|\left(30r^{-5}\cdot\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|\right).$$

よって $|\Delta z|\to 0$ のとき $|(*)'|\to 0$. つまり $f'(z)$ は微分可能で

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz.$$

(コーシーの微積分公式)

定理 $f: D \to \mathbb{C}$ が正則ならば f は無限回微分可能で

(#)'' $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz.$$

証明] 前定理から f 正則 $\Rightarrow$ f' 正則がいえているので f は無限回微分可能であることがわかる。(#)'' も前定理の証明と同様な(多少手間のかかる)方法で示すことができる。(⇒演習問題) //

注意 (#)や(#)''はコーシーの積分公式の両辺を z_0 で微分した"積分と微分の交換"をしたものと考えられる。

$$\frac{d}{dz_0}\left(f(z_0)\right) = \frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d}{dz_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right)dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

定理 (モレラ(Morera)の定理)

複素関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が連続で D 内の任意の区分 C^1 級の閉曲線 γ について $\int_\gamma f(z)\,dz$ をみたすならば $f(z)$ は正則

証明] 原始関数の存在についての定理(の証明)から上の仮定のもとで f の原始関数が存在する。このとき $F'(z) = f(z)$ で F は正則なので f も(上の定理から)正則。//

NO.

◎ リュービル(Liouvill)の定理と代数学の基本定理

定理 (リュービルの定理)

整関数 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が有界(すなわちある $M>0$ について $|f(z)|<M$ $(\forall z)$)であるならば実は定数関数.

証明] コーシーの積分公式より $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ $\forall r>0$ について

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

よって

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^2}|dz| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2\pi r = \frac{M}{2\pi}r^{-1}$$

$r \to \infty$ とすると

$|f'(z_0)| = 0$ $\quad$ ($f'(z_0) = 0$)

が $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ について成り立つ。よって f は定数関数.

系 整関数 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ をみたすなら $f(z) \equiv 0$.

証明] $|f(z)|$ は連続なので仮定のもとで有界。よって前定理より $f(z) = \text{const}$. 仮定より $f(z) \equiv 0$. //

定理 (代数学の基本定理)

n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $\quad (a_i \in \mathbb{C})$ は少なくとも1つの複素数解を持つ。

証明] $P(z) = z^n + \cdots + a_0$ とおく. もし $P(z)=0$ となる点がないとすると $\frac{1}{P(z)}$ は整関数で系の仮定をみたすので $1/P(z) \equiv 0$ となるがこれは矛盾.

h. テーラー（Taylor）展開

$f: D \to \mathbb{C}$　正則関数

f が点 $a \in D$ の近傍 U 上で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (C_n \in \mathbb{C})$$

と表されるとき，これを f の<u>整級数展開</u>という。

◎ もし和と微分が交換できるなら

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} C_n \cdot n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-a)^{n-m}$$

なので

$$f^{(m)}(a) = m! \cdot C_m \iff C_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

そこで級数

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

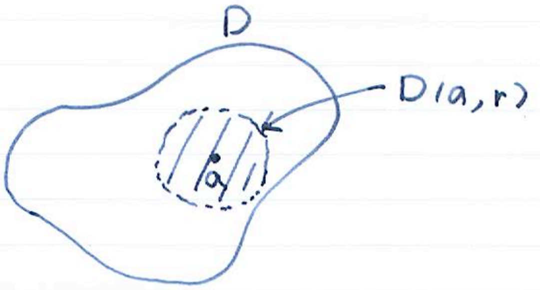
を f の a でのテーラー級数という。

定理（テーラー級数）点 $a \in D$ を中心とする半径 r の円板

$D(a,r) = \{z \mid |z-a| < r\}$ が D に含まれているときテーラー級数は

$D(a,r)$ 上の各点 z で $f(z)$ に収束する。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (z \in D(a,r))$$



証明] $0<r'<r''<r$ を任意にとり，$z \in D(a,r')$ を考える。

コーシーの積分定理から

$$(*) \quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=r''}\frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

ここで $|w|<1$ なる $w\in\mathbb{C}$ について

$$\sum_{n=0}^{\infty} w = \frac{1}{1-w}$$

であることから

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{s-a}}=\frac{f(s)}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\cdot(z-a)^n.$$

が成り立つ。これを $(*)$ に代入すれば

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=r''}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}(z-a)^n\,ds$$

$$\overset{(\#)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=r''}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}ds\right)(z-a)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

ただし $(\#)$ の等号については多少注意が必要。$M=\max_{|s-a|=r''}|f(s)|$ とおくと

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}(z-a)^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}M\cdot\frac{(r')^n}{(r'')^{n+1}} \qquad (\forall s \text{ s.t. } |s-a|=r'')$$

であるので

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=r''}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}(z-a)^n\,ds-\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=r''}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}ds\right)(z-a)^n\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|s-a|=r''}\sum_{n=N+1}^{\infty}M\cdot\frac{(r')^n}{(r'')^{n+1}}|ds|=\sum_{N+1}^{\infty}M\cdot\left(\frac{r'}{r''}\right)^n \to 0 \quad (N\to\infty)$$

より等号 $(\#)$ が成り立つ。

例 $f(z)=e^z$ については（r はいくらでも大きくとれるので）$z=a$ での

テーラー展開は

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(z-a)^n \qquad (\forall z\in\mathbb{C})$$

特に $z=0$ での展開は

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^n \qquad (\forall z\in\mathbb{C})$$

例 $f(z)=\mathrm{Log}(z)$ は 円板 $|z-1|<1$ 上で正則なので

$$\mathrm{Log}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}\right)(z-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(z-1)^n$$

$$\left(\ \mathrm{Log}^{(n)}(z)\Big|_{z=1}=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=1}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ \right)$$

定理（整級数展開の一意性） 正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が点 $a \in D$ の近傍 U 上で整級数展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ を持つとき $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ であり，右辺はテーラー級数と一致する。

証明] 円板 $D(a,r)$ が U に含まれるように $r>0$ をとり $0<r'<r''<r$ を任意にとる。$|w-a|=r''$ なる点 w で整級数が収束することから

$$|c_n(w-a)^n| = |c_n| \cdot (r'')^n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

すなわち ある $C>0$ について

$$|c_n| < C (r'')^{-n} \qquad (\forall n \geq 0).$$

よって $|z-a| = r'$ なる z について

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n (z-a)^n \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z-a)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C \left(\frac{r'}{r''} \right)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

コーシーの微積分公式から

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r'} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N} \int_{|z-a|=r'} \frac{c_k (z-a)^k}{(z-a)^{n+1}} dz \overset{(!)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r'} \frac{c_n}{z-a} dz = c_n$$

（(!) は $\displaystyle\int_{|z-a|=r'} \frac{1}{(z-a)^l} dz = \begin{cases} 2\pi i & l=1 \\ 0 & l=0 \end{cases}$ を使っている。）

よって $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

例 $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ のテーラー展開を求めよ。

$g(z)=\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$ が $|z|<1$ の範囲で成り立つ.

よって $f(z)=g(z^2)=1+z^2+z^4+\cdots$. 前定理より $f(z)$ のテーラー展開は

$$f(z)=1+z^2+z^4+\cdots \qquad //$$

定理 $f: D\to\mathbb{C}$ 正則. f の $a\in D$ でのテーラー級数が

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

であるとき, 微分 $f'(z)$ のテーラー級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

原始関数 $F(z)$ $(F'(z)=f(z))$ のテーラー級数は

$$F(a)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

例 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ の $z=1$ でのテーラー級数展開は

$$f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$(\mathrm{Log}\, z)'=\dfrac{1}{z}$ であるので $\mathrm{Log}\, z$ の $z=1$ でのテーラー級数展開は

$$\mathrm{Log}\, z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(z-1)^n$$

定理 正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が ある点 $z_0 \in D$ において

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots \infty)$$

であるならば f は定数関数

[証明] $X = \{z \in D \mid f^{(n)}(z) = 0 \quad n = 1, 2, \cdots \infty\}$ とするとテイラー展開の定理から各 $z \in X$ の近傍で定数関数になるので X は開集合. 一方 $f^{(n)}(z)$ は連続なので

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in D \mid f^{(n)}(z) = 0\}$$

は (D の部分集合として) 閉集合. よって D の連結性から $X \neq \emptyset$ なら $X = D$. //

(演習問題 2-12 参照)

定義 $f(z) = 0$ をみたす点 $z \in D$ を f の零点という。

このとき

$$m = \min\{n > 0 \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

を零点 a の位数 (order) という。 (f が定数関数でないとき位数は有限)

NO.

<u>命題</u> $f: D \to \mathbb{C}$ 正則. $a \in D$ は f の m 位の零点とする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $|z-a| < \delta$ なる z について

$$|f(z) - c_m (z-a)^m| < \varepsilon |c_m (z-a)^m|. \qquad \left(c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0\right)$$

証明] テーラー展開の定理の証明からわかる。(⇒演習問題)

<u>定理</u> 定数でない正則関数の零点は孤立している。($a \in D$ が零点ならある近傍 U が存在して $f(z) \neq 0$ ($\forall z \in U \setminus \{a\}$))

<u>定理</u>(一致の定理) $f, g: D \to \mathbb{C}$ 正則 について

(1) ある点 $a \in D$ で $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ ($\forall n \geq 0$) ならば $f \equiv g$ on D

(2) $a \in D$ に収束する点列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq a$ とする) について

$f(a_n) = g(a_n)$ ($\forall n$) が成り立つならば $f \equiv g$ on D.

証明] (1) $f-g$ に対して前定理をあてはめると $f \equiv g$ がわかる。

(2) $f-g$ に対して前命題をあてはめると $f \equiv g$ がわかる。

<u>定理</u>(最大値の定理) $f: D \to \mathbb{C}$ 正則 ~~について $|f(z)|$~~ が定数関数でないとき, $|f(z)|$ は D で最大値を持たない。

証明 点 $a \in D$ で最大値をとるとする。このとき $f(z) - f(a)$ は $z=a$ で零点をもつので前命題をあてはめると, $|z-a| = \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) の像は $f(a)$ のまわりを m 回まわる閉曲線になることがわかる。これは $|f(z)|$ ~~が $f(a)$~~ の最大値が $|f(a)|$ であることに反する。