解析A1（情報解析学）　ノート No.1 (10/3)

第1章　複素数 (complex number)

§1-a　複素数の演算

$$z = x + iy = x + yi$$

ここで

- i : 虚数単位　　$i^2 = -1$
- x, y : 実数　　$x = Re(z)$　zの実部
  $y = Im(z)$　zの虚部

注意　以下では実数の全体を$\mathbb{R}$, 複素数の全体を$\mathbb{C}$で表す。

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

定義　複素数 $z = x + iy$ に対し（虚部の符号を変えた）
$x - iy$ を $\bar{z}$ と表し z の共役複素数（or 複素共役）という。
また

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を z の絶対値（大きさ）と呼ぶ

◎ $|z| \geq 0$ であり, "$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$".

例　$\overline{-3-4i} = -3 + 4i$

$$|-3-4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

複素数の和(差)と積は'自然'に定義される.

- $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
- $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2y_1y_2$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

◎ 複素数の和(差)と積については(実数の場合と同様の)交換,結合,分配法則が成り立つ。(p2. (5),(6),(7)).

商 z_1/z_2 $(=z_1\div z_2)$ は

$$wz_2=z_1$$

をみたす w として定義される。 $(z_2\neq 0$とする$)$

◎ $wz_2=z_1 \Leftrightarrow wz_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow w=\dfrac{1}{|z_2|^2}z_1\overline{z_2}$

より $z_1/z_2=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

例 $(3-4i)/(1-i)=\dfrac{(3-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(3+4)+(-4+3)i}{2}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

例 「$z_1z_2=0$ ならば $z_1=0$ or $z_2=0$」を示せ。

∵) $z_1z_2=0$ かつ $z_1\neq 0$ とすると,両辺に$(1/z_1)$をかけて

$$(1/z_1)\cdot z_1\cdot z_2=z_2=0.$$

問 (1) $(1+2i)^3 = 1+6i+12i^2+8i^3 \; (= -11-2i)$

(2) $\dfrac{5}{-3+4i} = \dfrac{5(-3-4i)}{25} = -\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

◎ 複素数の四則演算は複素共役について"対称"になる:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \cdots (*)$$

$$\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$$

また絶対値について

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

が成り立つ.

∵) $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

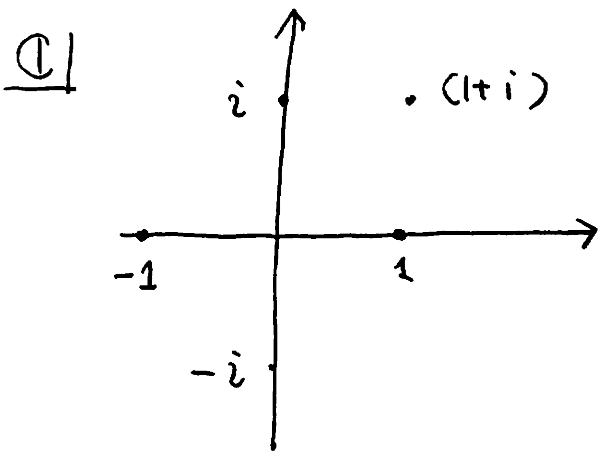
~~問 (*)~~

§1-b 複素平面と極表示

座標平面 $\mathbb{R}^2$ と 複素数の全体 $\mathbb{C}$ を次の対応で同一視する。

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow x + iy \in \mathbb{C}$$

このときの座標平面 $\mathbb{R}^2$ を（$\mathbb{C}$との対応を込めて）複素平面と呼ぶ



座標平面の点 (x, y) $(\neq (0,0))$ の極座標を (r, θ) とする。
このとき対応する複素数 $z = x + iy$ は

$$(*) \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r = |z|)$$

と表すことができる。これを z の極表示という。

<u>定義</u> $(*)$ の θ を z の偏角といい, $\arg(z)$ と表す。

注意　偏角 $\arg(z)$ には 2π の整数倍だけの任意性がある。
特に任意性を除きたいときは $-\pi < \theta \leq \pi$ という条件をつけて
一意にして値を $\mathrm{Arg}(z)$ と表す。

◎ 複素数の実数倍や和(差)は複素平面でのベクトルの
スカラー倍や和(差)に対応する。

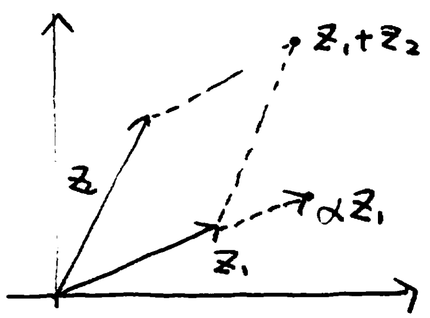
$$\begin{cases} z_1 = x_1 + i y_1 \\ z_2 = x_2 + i y_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} V_1 = (x_1, y_1) \\ V_2 = (x_2, y_2) \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \longleftrightarrow V_1 + V_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha z_1 = (\alpha x_1) + i(\alpha y_1) \qquad\qquad \alpha V_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

①



◎ 複素数の積は極表示で考えると

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\downarrow$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)\right)$$

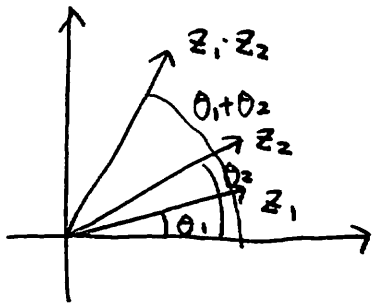
$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) - i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

つまり

"積の絶対値は絶対値の積" $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

"積の偏角は偏角の和" $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

$\mathbb{C}$



同様に商 z_1/z_2 $(z_2 \neq 0)$ について

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$$

例 $\dfrac{3+4i}{4-3i} = i$

◎ オイラー(Euler)の公式

実数 θ に対し

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \cdots(*)$$

と定義する

注意　上の(*)はオイラーの公式と呼ばれるがここでは定義と考える。これが自然であることはだんだんわかる。

このとき極形式は

$$z = re^{i\theta} \qquad (r = |z|,\ \theta = \arg(z))$$

と表せる。そして前項で述べたことは

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ z_1/z_2 &= (r_1/r_2)\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

というように指数法則のようなものと考えることができる。

◎ べき乗とべき根

$z = re^{i\theta}$ に対して そのべき乗は

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

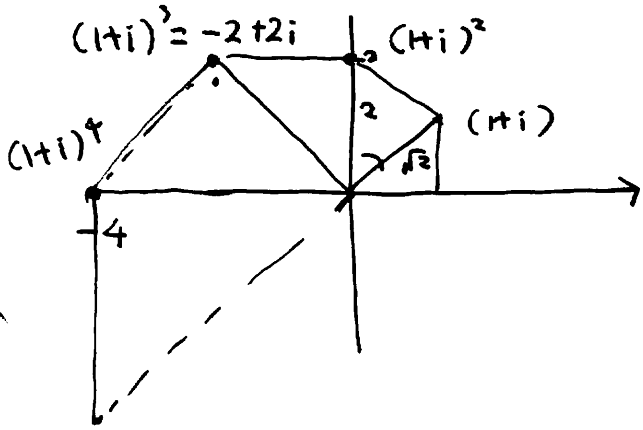
で与えられる。特に $r=1$ とすると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

(ド・モアブルの公式)

<u>例</u> $(1+i)^n = (\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)})^n$

$$= 2^{n/2} e^{i(n\pi/4)} = 2^{n/2}(\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4))$$



逆に $z^n = z_0$ をみたす複素数を z_0 の<u>n乗根</u>という。

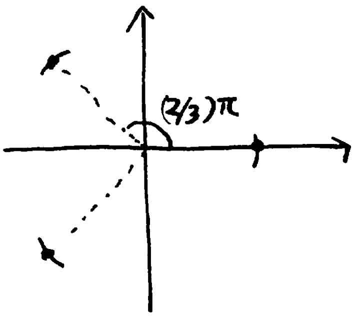
$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$　$z = re^{i\theta}$ とおくと

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} r^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff r = \sqrt[n]{r_0}\,, \quad \theta = \theta_0/n + (k/n)\cdot 2\pi \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

例 1の3乗根を求めよ。

$$\left\{ e^{i\frac{2k\pi}{3}} \;;\; k=0,1,2 \right\} = \left\{ 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \right\}$$



一般に 1のn乗根はn個あって 0を中心, 1を1つの頂点とする正n角形の頂点全体になる。

第2章　正則関数

§2-a　複素変数の関数

複素数の集合 D の各点 z に複素数 $f(z)$ を対応させる関数

(*)　$f: D \to \mathbb{C}$,　$z \mapsto f(z)$

を考える。（D を定義域という。）

例　$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$　　$f(z) = z^2$

$f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$　　$f(z) = \dfrac{1}{z}$

(*) は実部と虚部に分けて表すと

(**)　$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

になる。これは複素平面から複素平面への写像

(***)　$(x, y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$

と同一視される。

例　$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$　　$f(z) = z^2$

$$\begin{cases} (*) & f(z) = z^2 \\ (**) & f(x+iy) = (x^2 - y^2) + 2xy \cdot i \\ (***) & (x, y) \to (x^2 - y^2, 2xy) \end{cases}$$

複素変数の関数 $\longleftrightarrow$ 複素平面から複素平面への写像

例 次の関数は複素平面の写像としてどのような写像か?

(1) $f(z) = z + i$　　"$+i$ だけの平行移動"

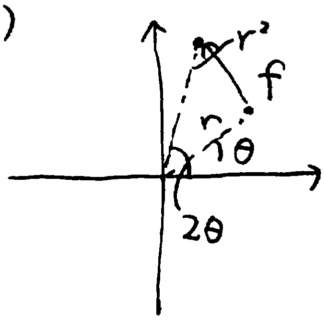
(2) $f(z) = e^{i\theta} z$　　"角 θ の回転"

(3) $f(z) = \bar{z}$　　"実軸 $(y=0)$ についての対称移動

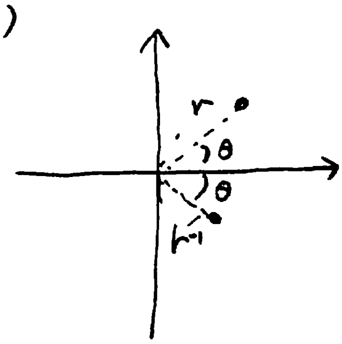
(4) $f(z) = z^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(5) $f(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$

(4)



(5)



関数の定義域として多くの場合 次のような集合を考える:

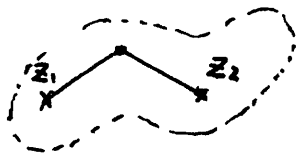
定義 (1) 部分集合 D が開集合 (open subset) とは

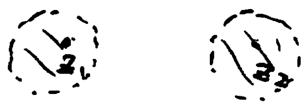
各 $x \in D$ に対し 十分小さな $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ をとると

$B(z, \varepsilon)$ が D に含まれることである。ただし

$B(z, \varepsilon) = \{ w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon \}$　　z の ε 近傍.

(2) 部分集合 D が領域(domain)とは D が開集合 で、かつ、次の意味で連結であること："任意の2点 $z_1, z_2 \in W$ は D の点のみからなる折れ線で結ぶことができる。"





連結でない.

例 (1) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

(2) $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上半平面

(3) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 単位円板

(4) $R = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$ 円環領域

注意: ~~領域の定義で~~上の連結の~~条件~~定義は位相空間論における定義と異なるが $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の開部分集合については同値になる。

§2-6 極限と連続性

複素数列の収束は（実数列の場合と同じように）次のように定義する。

<u>定義</u> $\{a_n \in \mathbb{C}\}$ が $n\to\infty$ で a_∞ に収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon>0$ に対し ある $N>0$ が存在して

"$n>N$ ならば $|a_n - a_\infty| < \varepsilon$".

［つまり 番号 n が十分大きくなれば a_n は a_∞ に十分近い
ということ. ただし ε と N の順序等に注意］

複素関数の極限についても同様に次のように定義する：

<u>定義</u> $f: D\to\mathbb{C}$ が $z\in D$ を a に近づけたときの極限 w を持つ

$\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対し ある $\delta>0$ が存在して $z\in D$ に対し

"$0<|z-a|<\delta$ ならば $|f(z)-w|<\varepsilon$". が成り立つ.

このとき $\lim_{z\to a} f(z) = w$.

<u>注意</u> 上の定義で $|z-a|>0$ ($\Leftrightarrow z\neq a$) としていることに注意。

<u>注意</u> 他にも例えば

$\lim_{z\to\infty} f(z) = w \Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0 \ {}^\exists R>0$ s.t.

"$|z|>R \Rightarrow |f(z)-a|<\varepsilon$".

$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow {}^\forall R>0 \ {}^\exists\delta>0$ s.t

"$|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)|>R$"

などと定義する。

NO.

定理

$$\lim_{z \to a} f(z) = w \iff \lim_{z \to a} \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, w$$
$$\lim_{z \to a} \mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\, w$$

定理

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0 \ , \ \lim_{z \to z_0} g(z) = \omega_1$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \{f(z) + g(z)\} = \omega_0 + \omega_1$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = \omega_0 \omega_1$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = \omega_0/\omega_1$$

NO.

定義 関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で連続

$\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$\Leftrightarrow$ $^\forall \varepsilon > 0\ ^\exists \delta > 0$ s.t. "$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$"

注意 これは f を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とみたときに連続であることと同じことである。

定理 $f: D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ で連続

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} f ; \mathrm{Im} f : D \to \mathbb{R}$ が点 z_0 で連続

定理 $f(z), g(z) : D \to \mathbb{C}$ が点 z_0 で連続

$\Leftarrow$ $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z_0) \neq 0)$ は z_0 で連続

定義 関数 $f: D \to \mathbb{C}$ が連続 $\Leftrightarrow$ f が全ての $z \in D$ で連続.

定理 $f(z) : D \to \mathbb{C}$, $g(z) : D' \to \mathbb{C}$

$z_0 \in D$ かつ $w_0 = f(z_0) \in D'$ とする。

f が z_0 で連続かつ, g が w_0 で連続 $\Rightarrow$ $g \circ f$ が z_0 で連続。

~~と~~特に

f, g 連続かつ $f(D) \subset D'$ ならば $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は連続

§2-c 複素関数の微分

$f: D \to \mathbb{C}$　　　D: 領域 $\subset \mathbb{C}$

<u>定義</u> (微分)　f が $z_0 \in D$ で微分可能 (differentiable)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極限 $f'(z) := \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が存在.

f が全ての $z \in D$ で微分可能であるとき, f は正則 (holomorphic) または単に微分可能という。(特に $D = \mathbb{C}$ のとき整関数 (entire function) という.

<u>例</u>　$f(z) = z$ は微分可能で $f'(z) = 1$

$\because)\ \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = 1$

<u>例</u>　$f(z) = z^2$ の微分可能で $f'(z) = 2z$.

$\because)\ \lim_{z \to z_0} \dfrac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0 =: f'(z_0)$

以下の命題は(証明を含めて)実関数の場合と同じ.

<u>定理</u>　$f, g: D \to \mathbb{C}$ が正則ならば

$f+g: D \to \mathbb{C}$,　$f \cdot g: D \to \mathbb{C}$,　$f/g: D \setminus \{g(z) = 0\} \to \mathbb{C}$

は正則で

$(f+g)' = f' + g'$,　$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f g'$,　$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

<u>定理</u>　$f: D \to \mathbb{C}$, $g: D' \to \mathbb{C}$ が正則で $f(D) \subset D'$ なら

合成 $g \circ f$ が (定義できて) 正則.　$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.

上の命題から有理関数の微分は容易に計算できる.

例) $n \in \mathbb{Z}$ について $(z^n)' = n z^{n-1}$

$n=0$, $n=1$ のときは明らか

$n \geq 2$ については (nについての帰納法で)

$$(z^n)' = (z^{n-1} \cdot z)' = (z^{n-1})' z + z^{n-1} z' = (n-1) z^{n-1} + z^{n-1}$$
$$= n z^{n-1}.$$

$n \leq -1$ については

$$(z^n)' = \left(\frac{1}{z^{|n|}}\right)' = \frac{-|n| z^{|n|-1}}{z^{2|n|}} = n z^{n-1}.$$

§2-d Cauchy-Riemann 方程式

~~重~~ 複素関数 $f: D \to \mathbb{C}$ を

$$f(x+iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

と表す。

<u>重要な注意</u>: 全く自明でないが, ~~(★)~~ (後で証明するように)

(★) f が正則 $\Rightarrow$ u, v が (x, y) の関数として C^∞ 級

が成り立つ。($u(x, y)$ が C^∞ 級とは u の $\forall r$ 階までの全ての偏導関数が存在して連続であること) 以下この事実を<u>認める</u>。

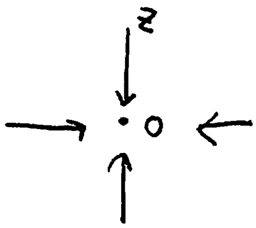
次の例は(★)の逆が成り立たないことを示している。

<u>例</u> $f(z) = \bar{z}$ は $\underbrace{\text{微分可能}}$ でない。（どの点 $z_0 \in \mathbb{C}$ でも）

∵) $z_0 = 0$ とする。(他の z_0 でも同じ) このとき $z = re^{i\theta}$ について

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\bar{z}}{z} = e^{-2i\theta}$$

ここで $z \to z_0 = 0$ ($\Leftrightarrow r \to 0$) とすると 極限は ($e^{-2i\theta}$ になるようにみえるが θ に依存するので定まらない) 存在しない! (つまり, 極限が z をどの方向から 0 に近づけるかによってしまう。)



実は次が成り立つ.

<u>定理</u>　次は同値

(1) $f : D \to \mathbb{C}$ が正則

(2) $u(x,y)$, $v(x,y)$ が(少なくとも) C^1級で次をみたす.

(Cauchy-Riemann方程式)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

[証明] (1) $\Rightarrow$ (2)　微分の定義より

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(z+t)-f(z)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(z+it)-f(z)}{it}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{i}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right\}$$

両辺の実部,虚部を比べて(CR)を得る。

(2) $\Rightarrow$ (1)　$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $b = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ とおく。

u, v は C^1級なので(全微分可能なので) ~~(x,y) から Δ~~

$\Delta x, \Delta y$ が十分小さいとき

$\cancel{u(x+\Delta x, y+\Delta y)}$ =

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + a\Delta x + b\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$
$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) = v(x,y) + (-b)\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

ただし

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_i(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

よって $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とすると

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (a+bi)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\,\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

つまり

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = a+bi + \underbrace{\frac{\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) + i\,\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)}{\Delta z}}_{\Delta z \to 0 \text{ で } \to 0} \to a+bi$$

よって f は z で微分可能で $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$. //

<u>定理</u> 次は同値

(1) $f : D \to \mathbb{C}$ は正則

(2) f を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とみたときの微分 $Df(x,y)$

は $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ という形の行列になる。

回転と拡大の合成

<u>注意</u> $Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

② 調和関数 (harmonic function)

$\varphi : D \to \mathbb{R}$ 　(D は $\mathbb{R}^2$ の開集合)

<u>定義</u>　φ が調和関数 $\Leftrightarrow$ $\Delta \varphi(x, y) = 0$ 　($\forall (x, y) \in D$)

ただし $\Delta \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(x,y)$.

<u>注意</u>　$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ はラプラス作用素(ラプラシアン)と呼ばれる。

<u>定理</u>　$f : D \to \mathbb{C}$ が正則 $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ は調和関数.

$\because$) $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, v$ とおくと C-R 方程式から

$$\frac{\partial}{\partial x^2} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^2} u.$$

v についても同様.

$u(x,y) : D \to \mathbb{R}$ が調和関数であるとき、(C-R)をみたす
$v(x,y) : D \to \mathbb{R}$ が(定数の差を除いて)唯一つ存在 更に
調和関数になる。(v を u の共役調和関数という。)
このとき　$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ と正則関数になる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \text{正則関数 } f \arrow[r, bend left, "\text{実部}"] & \text{調和関数 } u \arrow[l, bend left, "\text{共役調和関数 } v \text{ をとって } f = u + iv"] \end{tikzcd}$$

② 調和関数については(だいぶ)後で取り上げる。

第3章　初等関数

§3-a　多項式　(polynomial)

(*) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

$$(a_i \in \mathbb{C})$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は正則.

<u>定理</u>　任意の n 次多項式は・

$$f(z) = \alpha (z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n) \qquad (\alpha, \beta_i \in \mathbb{C})$$

と表わすことができる。（β_i は等しいこともある。）

系　n 次代数方程式は重複度を含めて n 個の複素解をもつ。

これは次の定理から導びかれる：

<u>代数学の基本定理</u>　n 次代数方程式

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

は少なくとも1つの解 $\beta \in \mathbb{C}$ を持つ。

[代数学の基本定理 ⇒ 定理]

$f(z)/a_n = 0$ は解 $z = \beta$ を持つので因数定理より $f(z)$ は $(z-\beta)$ で ~~$f(z)$~~ 割り切れる。よって

$$f(z) = a_n (z-\beta)(z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0).$$

次数 n についての帰納法で定理が得られる。

系 n次以下の多項式 $P(z)=a_n z^n+\cdots+a_1 z+a_0$ ($a_i \in \mathbb{C}$)
が $(n+1)$点で 0になるならば $P(z)\equiv 0$、$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0$ //

"多項式としての表示が一致" $\Leftrightarrow$ "関数として一致".

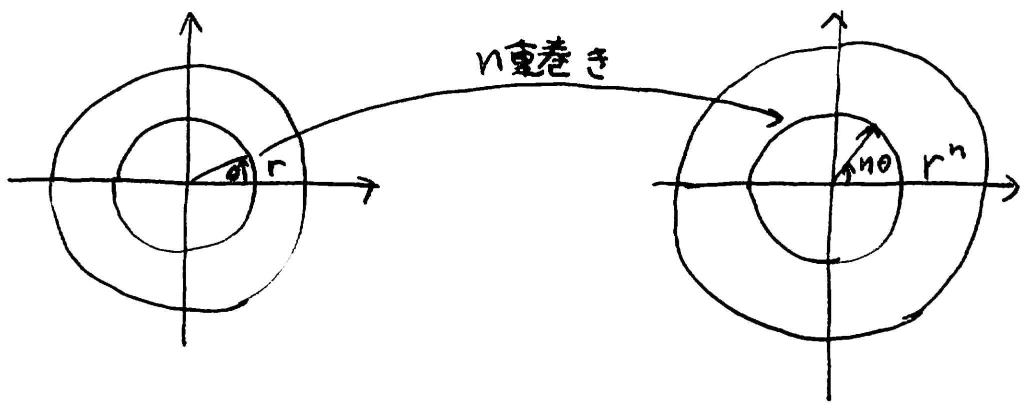
maruman Loose Leaf L840A 6mm×41行

◎写像としての多項式関数

例 $f(z) = z^n$ これは極表示を使うと

$$f(re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$$

と表せる。



一般の多項式（ただし $a_n=1$ とする）については

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

で $|z| = R \gg 1$ のとき

$$|z^n| \gg |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|$$

なので $|f(z) - z^n| \ll |z^n|$

$$f(z) \sim z^n \qquad (|z| \gg R).$$

［代数学の基本定理の（あまり厳密でない）証明］

$R \gg 1$ のとき，円 $S_R = \{z \mid |z| = R\}$ の像は原点のまわりを時計まわりに n重巻きする。次に R を徐々に小さくして 0 にすると $S_0 = \{0\}$ の像は1点 a_0 になる。（$a_0 \neq 0$ としてよい）. この途中である $\rho \leq R$ で ~~原点を~~ S_ρ の像は原点を通るハズ。（図をかいて考えよ。）

§3-b 有理関数　(rational function)

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (P(z),\ Q(z) \text{ は多項式})$$

$$= \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

$$= r\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_m)}$$

注意　$P(z)$と$Q(z)$は互いに素 ($\Leftrightarrow \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\cap\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}=\phi$) と仮定する。

このとき $f : \mathbb{C}-\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\} \to \mathbb{C}$ は正則で

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ は $f(z)$の零点 ($f(z)=0$となる点)

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ は $f(z)$の極 と呼ばれ

$$\lim_{z\to\beta_i}|f(z)| = \infty.$$

補題　上のような有理関数 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $\hat{f}(z)=\frac{\hat{P}(z)}{\hat{Q}(z)}$ について

次は同値

(1) Pと$\hat{P}$, Qと$\hat{Q}$ はそれぞれ次数と係数が等しい. (多項式として同じ)

(2) $f(z)=g(z)$ が無限個の点で成り立つ.

特に"有理関数としての表示が一致"⇔"関数として一致."

∵) §3-a の系より.

NO.

(§3-6 のつづき)

② 部分分数展開

有理関数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ の分母が

$$Q(z)=(z-\gamma_1)^{n_1}\cdots(z-\gamma_k)^{n_k} \qquad (\gamma_i \text{ は互いに異なる})$$

と表されるとき，$f(z)$ は

$$f(z)=\underbrace{p(z)}_{\text{多項式}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{n_k}\frac{c_{i,m}}{(z-\gamma_i)^m}}_{\text{特異部分}} \qquad (c_{i,m}\in\mathbb{C})$$

と表すことができる。(証明は後で)
だーいぶ

例　$f(z)=\dfrac{z}{z^3-1}$

$\omega=e^{2\pi i/3}$ とおく。$\displaystyle\lim_{|z|\to\infty}f(z)=0$ より多項式の部分はないので

$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-\omega}+\frac{c_3}{z-\omega^2}$$

両辺に (z^3-1) をかけて係数を比べてもよいが，例えば

$$c_1=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^3-1}=\frac{1}{(z-\omega)(z-\omega^2)}=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\lim_{z\to\omega}\frac{(z-\omega)z}{z^3-1}=\frac{\omega}{(z^3-1)'|_{z=\omega}}=\frac{1}{3\omega}=\frac{\omega^2}{3}$$

$$c_3=\frac{1}{3\omega^{2\cdot2}}=\frac{1}{3\omega}=\frac{\omega}{3}$$

よって　$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{1/3}{z-1}+\frac{\omega^2/3}{z-\omega}+\frac{\omega/3}{z-\omega^2}$$ //

§3-C 指数関数 (exponential function)

<u>定義</u>　$z=x+iy$ に対し

$$e^z = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\text{Eulerの公式}} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

と定義する.

関数 $f(z)=e^z$ は $\mathbb{C}$ 上の整関数になる:

<u>性質</u>　(0) 実数についての指数関数の拡張: $e^{x+i0}=e^x$

(1) $f(z)=e^z$ は正則で $(e^z)'=e^z$

(2) 指数法則をみたす: $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, $e^0=1$.

(3) $f(z)=e^z$ は周期が $2\pi i$ の周期関数: $e^{z+2\pi i}=e^z$

(4) $f(z)=e^z$ は次の巾級数表示を持つ.(後で示す.)

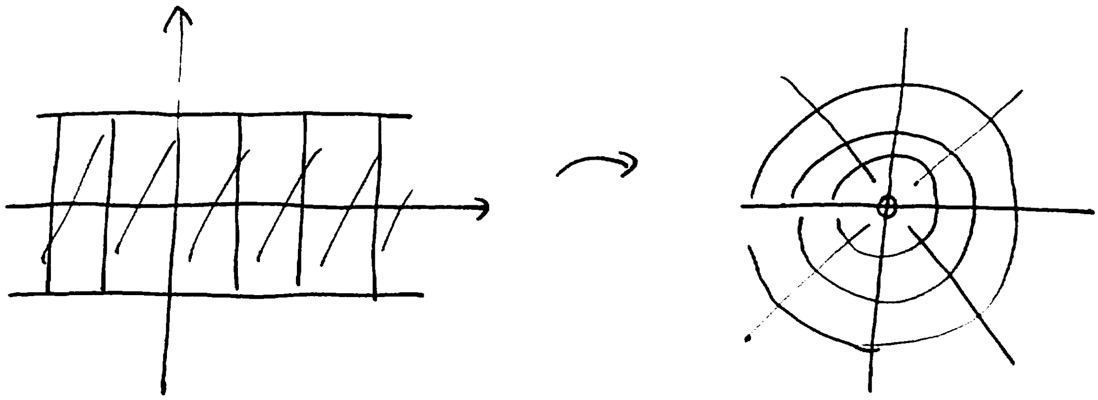
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = 1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots.$$

∵) (0)は明らか。(1)はCRを確める。(2)は

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

(3)は明らか. (4)は後で示す。

◎写像としての指数関数



$f(z)=e^{z}$ は $(-\infty,\infty)\times(-\pi,\pi]$ 上で $\mathbb{C}^{*}=\mathbb{C}-\{0\}$ への一対一写像.

直線: $\mathrm{Re}\,z=a \longrightarrow$ 円: $|z|=e^{a}$

直線: $\mathrm{Im}\,z=b \longrightarrow$ 直線: $\arg(z)=b$

また $f(z+2\pi i)=f(z)$ なので f は ($2\pi i$ を周期とする)周期関数

特に ∞ 対 1.

§3-d 対数関数 (logarithmic function)

対数関数 $\log z$ ($\ln z$ とも書く) は指数関数 e^z の逆関数として定義される:　($z \neq 0$ とする。)

$$w = \log z \iff z = e^w$$

ただし e^z は単射ではない (実際 $e^{z+2\pi i} = e^z$) ので $\log z$ の値は1つには定まらない。実際、$w = x + iy$ とおくと

$$z = e^w \iff \begin{cases} x = \underbrace{\log}_{\text{実数についての対数}} |z| \\ y = \arg(z) \end{cases}$$

なので

$$\log z = \log |z| + i \arg(z)$$

と表されるが、$\arg(z)$ には 2π の整数倍の任意性がある。

以下では $\log z$ は多価関数とみなし、$\log z$ は複素数の集合と考える。

<u>例</u> $\log(-i)$ を求めよ。

$$w \in \log(-i) \iff -i = e^w$$
$$\iff w = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

よって

$$\log(-i) = \left\{ \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

<u>問</u> $\log(1+i)$ を求めよ。

$\log z$ の値 w のうち

(*) $-\pi < \cancel{\arg z}\ \mathrm{Im}\, w \leq \pi$

をみたすものが唯一つ存在する。この値を主値といい $\mathrm{Log}\, z$ と書く。

<u>注意</u> 上の(*)は例えば $0 < \mathrm{Im}\, w \leq \pi$ などとしても~~同じことである~~。値は1つに定まる。

<u>定理</u> $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

ただし複素数の集合について $S+S = \{w_1 + w_2 \mid w_1, w_2 \in S\}$ と定め，上の等号は集合として等しいことを表す。

[証明] $w_1 \in \log z_1$, $w_2 \in \log z_2$ とすると

$$e^{w_1 + w_2} = e^{w_1} e^{w_2} = z_1 z_2.$$

よって $w_1 + w_2 \in \log z_1 z_2$

$$\log(z_1) + \log(z_2) = \{(w_1 + 2\pi i n) + (w_2 + 2\pi i m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{w_1 + w_2 + 2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \log z_1 z_2 \quad //$$

<u>注意</u> 主値 $\mathrm{Log}(z)$ については上の等式は成立しない。また $\mathrm{Log}(z)$ は $(-\infty, 0)$ で不連続

◎ 分枝 (branch)

$\log z$ は各点 $z_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$ の近傍Uでは ある連続な関数

$f: U \to \mathbb{C}$ をとって

$$\log z = \{f(z)+2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と表すことができる。($z_0 \notin (-\infty, 0]$ なら $f(z)=\mathrm{Log}\, z$ とすればよい。)

このような $f(z)$ を $\log z$ の分枝 (branch) という。

<u>定理</u> $\log z$ の各分岐 $f(z)$ は正則で

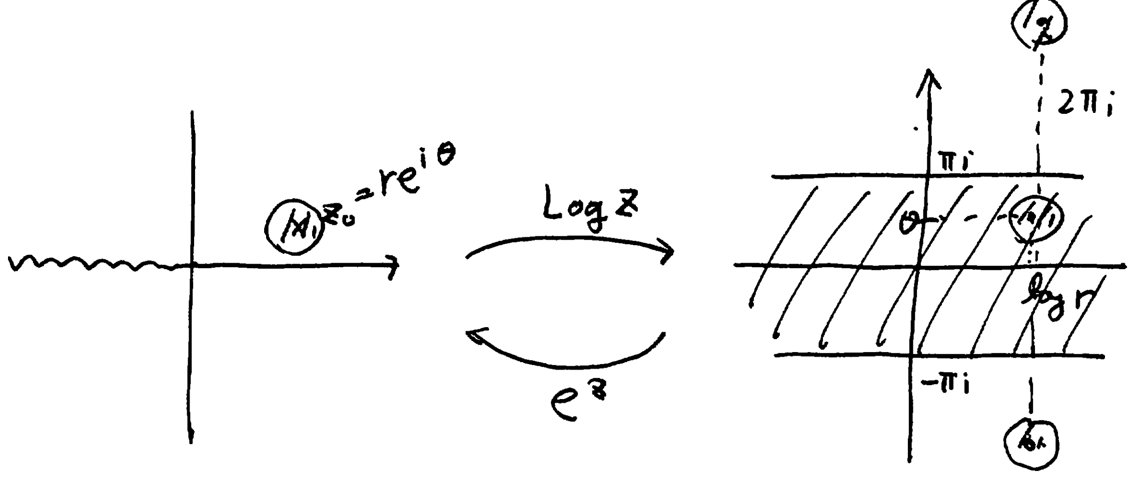
$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

[証明] $e^{f(w)}=w$ に注意して

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w \to z} \left(\frac{1}{\left(\dfrac{e^{f(w)}-e^{f(z)}}{f(w)-f(z)}\right)} \right) = \frac{1}{e^{f(z)}} = \frac{1}{z}$$

//

◎ 写像としての対数関数 ($=e^z$の逆写像)



trigonometric hyperbolic

§3-e 三角関数，双曲線関数

コメント1　実数の三角関数やその性質は複素の指数関数にすでに取り入れられている。従って改めて三角関数（や双曲線関数）を複素関数として定義する意義や有用性は少ない。

コメント2　次の事実を知っておくと以下の定義は理解しやすい。

- $f: D \to \mathbb{C}$ 正則 $\Rightarrow$ $f': D \to \mathbb{C}$ も正則
- $f, g: D \to \mathbb{C}$ が正則で実数の（空でない）開区間 $(a, b) \subset D$ 上で一致するならば $f(z) = g(z)$ on D.

特に実関数を正則関数として拡張する方法はただ一通り（または拡張できない。）

定義 ~~Definition~~　$z \in \mathbb{C}$ について

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\tan z = \sin z / \cos z \qquad \left(z \neq \left(\tfrac{1}{2} + 2n\right)\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\right)$$

また

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$$

$$\tanh z = \sinh(z) / \cosh(z) \qquad \left(z \neq -\left(\tfrac{1}{2} + 2n\right)\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\right)$$

と定義する。

③ 実数の範囲で成り立つ三角関数や双曲線関数の関係や微分の公式は複素にしてもそのまま成り立つ。（コメント2参照）

例 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$-\sinh^2 z + \cosh^2 z = 1$

$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin z_2$

$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = \sin z$

Definition $\sin^{-1}(z)$ や $\sinh^{-1}(z)$ は $\sin z$ や $\sinh z$ の逆関数として定義される。（よって無限多価）

複素べきの後で

例 $\sin^{-1} z = -i\log\{iz+(1-z^2)^{1/2}\}$

∵) $z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw}+e^{iw})$, $X = e^{iw}$ とおくと

$$X - X^{-1} = 2iW \iff X^2 - 2izX - 1 = 0$$

$$\iff (X - iz)^2 = 1 - z^2$$

$$\iff X - iz \in \underline{(1-z^2)^{1/2}}$$

2乗して$1-z^2$になる数のどちらか

$$\iff X \in iz + \sqrt{1+z^2}$$

よって

$$w \in \sin^{-1} z \iff iw \in \log(iz + (1+z^2)^{1/2})$$

$$\iff w \in -i\log(iz + (1+z^2)^{1/2})$$

§3-f 複素べき

べき関数の拡張に $c\in\mathbb{C}$ について

$$z^c = e^{c\log z} \qquad (z\neq 0)$$

と定義する。(これは多価関数)

例 $(-1)^i = \{e^{i(\pi i+2n\pi i)} \mid n\in\mathbb{Z}\}$

$$= \{e^{-\pi-2n\pi} \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

問 i^i を求めよ。

z^c は一般には無限個の値を含む。ただし

- $c\in\mathbb{Z}$ ならば z^c の値は1つで通常の定義と一致する。
- $c=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ (p, q は互いに素) の場合は z^c は p 個の値をとる。

Remark $c\notin\mathbb{Q}$ の場合の z^c は取り扱いに注意が必要。ただし あまり使われない。

Remark $\sqrt{z}$ や $\sqrt[n]{z}$ は $z^{1/2}$ や $z^{1/n}$ の意味で使われるので 値の集合を表す。

Remark $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を底とする指数関数は

$$c^z = e^{(\log c)z}$$

で定義される。ただし あまり使われない。

第4章　積分（integration）

a. 準備

1) 実変数 複素数値関数 の積分

$$f:[a,b]\to\mathbb{C} \qquad f(x)=u(x)+iv(x)$$

（$u(x)$, $v(x)$ は実数値連続関数）

に対し

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int_a^b u(x)\,dx\right)+i\left(\int_a^b v(x)\,dx\right)$$

と定義する。（つまり、実部と虚部をそれぞれ積分する。）

例 $\displaystyle\int_0^\pi e^{it}\,dt=\int_0^\pi \cos t\,dt+i\int_0^\pi \sin t\,dt=2i$

基本的な性質　　（$a<b$ とする。）

- $\displaystyle \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)=\int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx$
- $\displaystyle \int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

2) 曲線（curve）または経路（path）

定義　連続写像 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ を曲線（または経路）という。

例 $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C} \qquad \gamma(t)=z_0+re^{it}$

例 $\gamma:[0,2]\to\mathbb{C} \qquad \gamma(t)=\begin{cases} t+it & 0\le t\le 1 \\ t+i & 1<t\le 2\end{cases}$

NO.

定義 曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ について

i) γ が C^1級 $\Leftrightarrow$ $x(t), y(t)$ が C^1級

$\Leftrightarrow$ $x'(t), y'(t)$ が存在して連続

ii) γ が区分的 C^1級 $\Leftrightarrow$ ある $a_0=a<a_1<\cdots<a_{m-1}<a_m=b$ が存在して γ は各 $[a_i, a_{i+1}]$ 上で C^1級

iii) γ が(C^1級の)閉曲線 $\Leftrightarrow$ $\gamma(a)=\gamma(b)$ (かつ $\gamma'(a)=\gamma'(b)$)

iv) γ が単純(simple) $\Leftrightarrow$ γ が単射

γ が単純閉曲線 $\Leftrightarrow$ γ が閉曲線かつ $\gamma:[a,b)\to\mathbb{C}$ が単射

v) γ が C^1級のとき

$\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$

と定義する。

定義 i) 曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ に対し 曲線 $(-\gamma)$ を

$(-\gamma):[-b,-a]\to\mathbb{C}$ $\quad (-\gamma)(t)=\gamma(-t)$

で定義する。

(ii) 2つの曲線 $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ について $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$

$\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$

のとき, γ_1 に γ_2 をつなげた曲線 $\gamma_1+\gamma_2$ を

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & a_1\le t\le b_1\\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+(b_2-a_2)\end{cases}$$

で定義する。

NO.

b. 複素積分

$f : D \to \mathbb{C}$ 連続な複素積分

$\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ C^1級

に対し

$$(*) \quad \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

と定義する。γ が区分的に C^1級のときは $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ $(\gamma_i : C^1$級$)$

と表して

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_m} f(z)\,dz$$

と定義する。

注意 (*) の右辺の $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ の実部虚部は t について連続なので積分値が定まる。

例 (⇒ p78 例1.2.3)

基本的な性質

1) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$, $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

2) $\displaystyle\int_\gamma c \cdot f(z)\,dz = c\int_\gamma f(z)\,dz$, $\displaystyle\int_\gamma (f(z) + g(z))\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$.

3) (パラメータのとりかえ) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ C^1級

$h : [a', b'] \to [a, b]$ C^1級で $h(a') = a$, $h(b') = b$.

このとき $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ とすると

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

<u>定義</u> $\displaystyle\int_{\gamma} |f(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt$

特に

$$\int_{\gamma} |dz| = (\gamma \text{の長さ}).$$

<u>定理</u> $\displaystyle\left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| \cdot |dz|.$

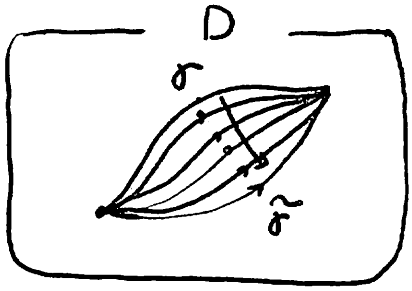
C. コーシー (Cauchy) の積分定理

$f : D \to \mathbb{C}$　正則関数

$\gamma : [a,b] \to D$　区分的 C^1 級曲線

"コーシーの積分定理"

積分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ の値は γ を端点を固定して D 内で連続的に変形しても一定~~値~~！



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$$

<u>定義</u>（ホモトピー）

$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow D$　区分的 C^1 級で $\underbrace{\gamma_0(0) = \gamma_1(0)}_{z_0}$, $\underbrace{\gamma_0(1) = \gamma_1(1)}_{z_1}$.

γ_1 と γ_2 が（D 内で端点を固定して）ホモトープ

$\Leftrightarrow$ ある連続写像 $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$ が次をみたす.

(1) $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$　$(0 \le t \le 1)$

(2) $\Gamma(s,0) = z_0$, $\Gamma(s,1) = z_1$.　$(0 \le s \le 1)$

<u>意味</u>: $\tilde{\gamma}_s(t) = \Gamma(s,t)$ とすると $\tilde{\gamma}_s : [0,1] \to D$ は D 内の曲線のパラメータ族で

(1) $\Leftrightarrow$ $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$, $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$　（$\tilde{\gamma}_s$ は γ_0 から γ_1 への連続的変形）

(2) $\Leftrightarrow$ $\tilde{\gamma}_s(0) = z_0$, $\tilde{\gamma}_s(1) = z_1$　（端点は固定）

注意 前回示したようにパラメータの(向きを保つ)取り替えで積分の値 $\int_\gamma f(z)dz$ はかわらないので、簡単のため曲線の定義区間を $[0,1]$ として考える。

定理1 $f: D \to \mathbb{C}$ 正則

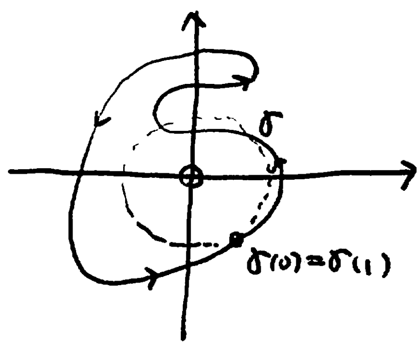
$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ 区分的 C^1 級. $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$.

γ_0 と γ_1 がホモトープならば

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

☆ 証明は次週.

例 $f(z)=\frac{1}{z}$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z|=R} f(z) = 2\pi i$$

系2 $f: D \to \mathbb{C}$ 正則

$\gamma : [0,1] \to D$ 区分的 C^1 級の閉曲線

γ が零ホモトープ(定値写像 $\gamma_c : [0,1] \to D$, $\gamma_c(t)=\gamma(0)$ とホモトープ)

ならば
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \left(= \int_{\gamma_c} f(z)\,dz\right).$$

<u>定理3</u>（単純閉曲線の場合，教科書の定理4）

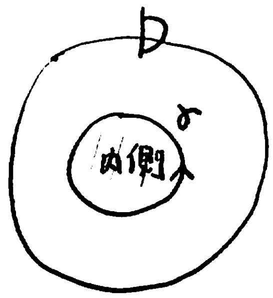
$f: D \to \mathbb{C}$ 正則

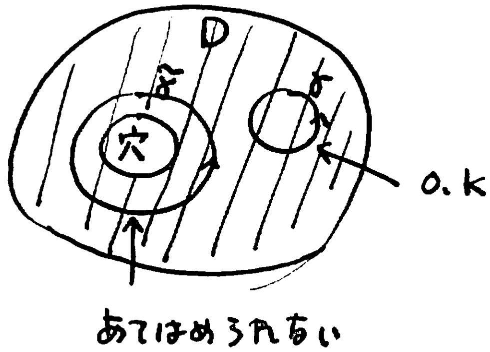
$\gamma: [0,1] \to D$　区分的C^1級の単純閉曲線

曲線γの内側（曲線γで囲まれる部分）がDに含まれるならば

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

<u>例</u>



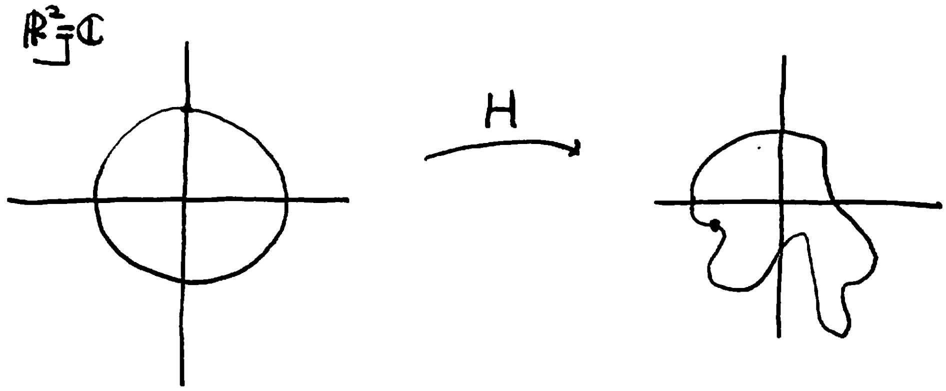


<u>参考</u>　Jordanの曲線定理

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$　単純閉曲線に対し　ある同相写像

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在して

$$H(e^{2\pi i\theta}) = \gamma(\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$



定理3はJordanの曲線定理と系2から従う。

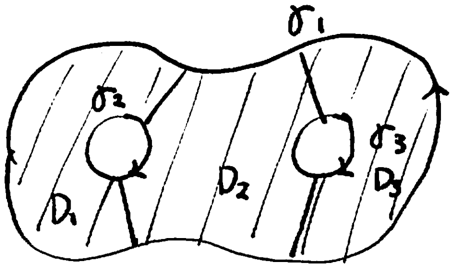
定理4 (=教科書の定理5)

$f: D \to \mathbb{C}$ 正則

$R \subset D$ は有界な領域で 閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\ell$ で囲まれているとする。

(図参照) ただし γ_i の(パラメータが増加する)向きは左手に R があるようにとられているとする。このとき

(*) $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_\ell} f(z)\,dz = 0$$

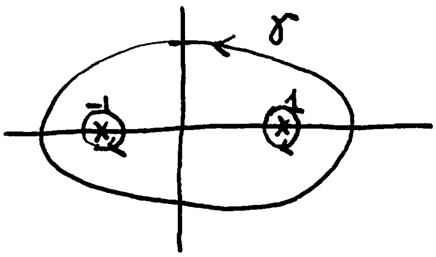


証明 図のようにいくつかの曲線 σ_i で R を切ると各 D_i には定理3があてはめられる。

$$\underbrace{\int_{\partial D_1}}_{\text{境界を反時計回りにまわる}} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\partial D_m} f(z)\,dz = 0$$

曲線 σ_i での積分が打ち消しあうことから(*)が得られる //

例 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}\right)$



$$\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{|z-1|=\varepsilon} f(z)\,dz - \int_{|z+1|=\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

よって $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{|z-1|=\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{|z+1|=\varepsilon} f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int_{|z+1|=\varepsilon} \frac{1}{z+1}\,dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

d. 原始関数 (primitive function)

定義 $f, F: D \to \mathbb{C}$ 正則

F が f の原始関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F'(z) = f(z)$ $(\forall z \in D)$

注意 F には定数の差(のみ)の任意性がある。

定理 $f: D \to \mathbb{C}$ 正則の原始関数 $F: D \to \mathbb{C}$ が存在するとする。

このとき任意の区分 C^1 級曲線 $\gamma: [a,b] \to D$ について

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

特に積分値は端点 $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ だけで定まる。

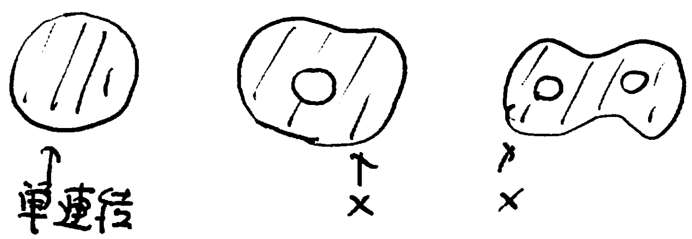
証明 $\displaystyle \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\,dt = \Big[F(\gamma(t)) \Big]_a^b$ //

いつ原始関数が存在するか?

定義 領域 D が単連結 $\Longleftrightarrow$ D 内の任意の閉曲線が零ホモトープ.

例 円板 $|z - z_0| < r$ は単連結

例



定理 D単連結, $f: D \to \mathbb{C}$ 正則 なら原始関数が存在する。

証明 点 $z_* \in D$ を固定し

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\,dz$$

（γ_z は z_* を始点, z を終点とする曲線）

注意: Dが単連結（十和2）より $F(z)$ の定義は γ_z のとり方によらない。

各 $z_0 \in D$ について $F'(z_0) = f(z)$ を示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ を十分小さくとれば

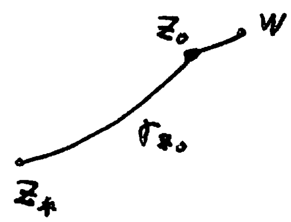
$$|w - z_0| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

~~よって $|w-z_0|<\delta$ ならば~~

$F(z)$ の定義と注意から

$$F(w) = F(z_0) + \int_{\sigma_w} f(z)\,dz \quad \left(\begin{array}{l}\sigma_w: [0,1] \to D \\ \sigma_w(t) = z_0 + t(w - z_0)\end{array}\right)$$

$$= F(z_0) + \int_0^1 f(\sigma_w(t))(w - z_0)\,dt$$



よって $|w - \delta_0| < \delta$ ならば

$$|F(w) - F(z) - f(z)(w - z)|$$

$$\leq \int_0^1 \varepsilon |w - z_0|\,dt \fallingdotseq \varepsilon |w - z_0|.$$

つまり

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z_0} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

これは $F'(z_0) = f(z_0)$ を意味する。