解析 A 1 演習問題 No.1　　(10/3)

§1 複素数

$\boxed{\textbf{1-1}}$ 次の値を求めよ.

(1) $\dfrac{5}{-3-4i}$ (2) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$ (3) $(1+i)^n+(1-i)^n$ （n について場合分け.）

$\boxed{\textbf{1-2}}$ 複素数の和と積について交換・結合・分配法則（教科書 2p の (5),(6), (7)）を示せ.

$\boxed{\textbf{1-3}}$ 共役複素数について次を示せ.

(1) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\quad \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w},\quad \overline{(z/w)}=\overline{z}/\overline{w}$

(2) $\mathrm{Re}(z)=(z+\overline{z})/2,\quad \mathrm{Im}(z)=(z-\overline{z})/(2i).$

$\boxed{\textbf{1-4}}$ 次の複素数 z, w に対して，和 $z+w$, 差 $z-w$，積 zw，商 z/w を求め，それらと z, w の幾何学的（図形的）な関係を複素平面上に図示せよ.

(1) $z=1+i,\quad w=1-i,$ (2) $z=1+\sqrt{3}i,\quad w=\sqrt{3}-i$

$\boxed{\textbf{1-5}}$ 次の値を絶対値と偏角の性質を使って求めよ.

(1) $|-2i(3+4i)(1+2i)(2-i)|,$ (2) $\left|\dfrac{(3-4i)(2+i)}{(4-3i)(1-2i)}\right|$

(3) $\arg\Big((1+\sqrt{3}i)(1-i)\Big)$ (4) $\arg\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)$

$\boxed{\textbf{1-6}}$ 次の不等式（三角不等式）を示せ．また，等式はどんな場合に成り立つか？

(1) $||z|-|w||\le|z-w|\le|z|+|w|,$

(2) $|z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|.$

$\boxed{\textbf{1-7}}$ 次の値を絶対値と偏角を調べることで求めよ.

(1) $(1+i)^{16}$ (2) $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^9$ (3) $\left(\dfrac{1+i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{12}$

$\boxed{\textbf{1-8}}$ 次の方程式の解を求めて，複素平面上に図示せよ.

(1) $z^3=-8,$ (2) $z^4=-i,$ (3) $z^5=-z.$

$\boxed{\textbf{1-9}}^{\dagger}$ 複素数 $z\neq0$ について，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数になるためには「z が実数または $|z|=1$」が必要かつ十分であることを示せ.

$\boxed{\textbf{1-10}}$ † $z \neq 1$ に対して，等式

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

を示せ．これに $z = e^{i\theta}$（$\theta \neq 0$）を代入することで，次のラグランジュの恒等式を示せ．

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n + 1/2)\theta)}{2\sin\theta/2}$$

$\boxed{\textbf{1-11}}$ † (1) 実数を係数とする有理式

$$R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

について，$\overline{R(z)} = R(\overline{z})$ が成り立つことを示せ．

(2) 実数係数の多項式 $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$（$a_k \in \mathbb{R}$）について，複素数 z_0 が方程式 $P(z) = 0$ の解であれば共役複素数 $\overline{z}_0$ も解であることを示せ．

$\boxed{\textbf{1-12}}$ † (1) $|\alpha| = 1$ または $|\beta| = 1$ の場合に $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\overline{\beta}}\right| = 1$ を示せ．(ただし，$\alpha \neq \beta$ とする．)

(2) $|\alpha| < 1$ かつ $|\beta| < 1$ であるとき，$\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\overline{\beta}}\right| < 1$ を示せ．

$\boxed{\textbf{1-13}}$ † 次の不等式（コーシーの不等式）を示せ．

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right), \qquad (a_k, b_k \in \mathbb{C})$$

$\boxed{\textbf{1-14}}$ † 複素数 z_1, z_2, z_3 を複素平面上の点と見なす．次を示せ．

(1) z_1, z_2, z_3 が一直線上に並ぶためには $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}$ が実数であることが必要十分。

(2) 三角形 $z_1 z_2 z_3$ の面積は $|\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1})|/2$ で与えられる．

$\boxed{\textbf{1-15}}$ † 複素数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ が原点を通るある直線 ℓ の片側にあるとする．このとき次を示せ．

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n \neq 0 \quad \text{かつ} \qquad z_1^{-1} + z_2^{-1} + \cdots + z_n^{-1} \neq 0.$$

$\boxed{\textbf{1-16}}$ † 複素数 $z = a + b\,i$ に対して行列 $M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を対応させる。このとき次を示せ。

(1) $M(z + w) = M(z) + M(w)$, $M(zw) = M(z)M(w)$, $M(1/z) = (M(z))^{-1}$

(2) $\det M(z) = |z|^2$。$M(z)$ の固有値は z と $\overline{z}$。

コメント： 上の問題の (1) は複素数の全体 $\mathbb{C}$ と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ という形の行列の全体が和や積を含めて同一視できることを示している．

解析 A 1 演習問題 No.2 (10/10)

§2 複素変数の関数

2-1 $\mathbb{C}$ から有限個の複素数を除いて得られる部分集合は領域であることを示せ.

2-2 次の集合を図示せよ．また，それらが領域であるかどうか判定し，理由を述べよ.
$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2|z|\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) > 1\}$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 1\}$.

2-3 次の複素関数を実部と虚部に分けて $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ の形に表せ.

(1) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^3 - 3\overline{z}^2$

(2) $f_2 : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = 1/\overline{z}$.

逆に，複素関数 $g(x + iy) = x^2 + iy^2$ を z と $\overline{z}$ の多項式として表せ．ただし，z と $\overline{z}$ の多項式とは $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} z^i \overline{z}^j$（$a_{ij} \in \mathbb{C}$) と表される関数である.

2-4 $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ とする．f による実軸 $\mathrm{Im}(z) = 0$ の像を求めよ.

2-5 関数の極限について，次の同値を示せ.
$\lim_{z\to a} f(z) = w \iff \lim_{z\to a} \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(w)$ かつ $\lim_{z\to a} \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(w)$

2-6 複素関数 $f, g : D \to \mathbb{C}$ が点 $a \in D$ において $\lim_{z\to a} f(z) = w_0$, $\lim_{z\to a} g(z) = w_1$ をみたすとする.

(1) $\lim_{z\to a} f(z)g(z) = w_0 w_1$ を証明せよ.

(2) $w_1 \neq 0$ ならば $\lim_{z\to a} f(z)/g(z) = w_0/w_1$ を証明せよ.

2-7 † z と $\overline{z}$ の多項式（問題 2-3 参照）として表される関数 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で連続であることを示せ.

2-8 † 関数 $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = z - (1/z)$ を複素平面の写像と考える．円 $|z| = r$ が f でどのような図形にうつされるかを調べよ．また，各点 z の逆像（$f(w) = z$ をみたす w）はいくつあるか調べよ.（教科書の 25 ページ参照.）

$\boxed{\textbf{2-9}}$ † 複素数 z に対して無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ を考える.（$n! = \prod_{k=1}^{n} k$，ただし，$0! = 1$ とする.）

(1) 上の無限級数が収束すること，すなわち，$\sum_{k=0}^{N} z^k/n!$ が $N \to \infty$ で収束することを示せ.

(2) 前問の極限を $f(z)$ とするとき $f(z)$ は z の関数として $\mathbb{C}$ 上連続であることを示せ.

ヒント：実関数の（一様）収束についての結果を使う．ただし，使うときにはどのような結果か明示しよう.

$\boxed{\textbf{2-10}}$ † 連続関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して $f(z+w) = f(z) + f(w)$ を満たすとする．次を順に示せ.

(1) 有理数 $r = p/q$ について $f(rz) = rf(z)$ が成り立つ,

(2) 有理数 r, s について $f(r + si) = r \cdot f(1) + s \cdot f(i)$ が成り立つ.

(3) ある複素数 α, β が存在して $f(z) = \alpha \cdot z + \beta \cdot \overline{z}$ と表される.

$\boxed{\textbf{2-11}}$ † 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について次は同値であることを示せ.

(1) f は連続,

(2) 任意の収束する複素数列 z_n について $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n)$.

$\boxed{\textbf{2-12}}$ † 複素平面上の開集合 D について次が同値であることを示せ.

(1) D 内の任意の 2 点を折れ線で結ぶことができる.

(2) 空集合でない開集合 U, V で $U \cup V = D$ と $U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在しない.

解析Ａ１ 演習問題 No.3　　(10/17)

§3　複素関数の微分

以下では D は複素平面上の領域を表す．いずれの問題も極限についての公式は用いてよい．また，複素関数が正則であるとき実部と虚部が（少なくとも）C^1 級であるという事実は使ってよい．

3-1　微分の定義に従って，$f(z) = 1/z$ に対して $f'(z) = -1/z^2$ を示せ．

3-2　正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と $g : D' \to \mathbb{C}$ が $f(D) \subset D'$ をみたすとき，合成 $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ は正則関数で，$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ であることを示せ．

3-3　次の複素関数が微分できることを確かめ，導関数を求めよ．

(1) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_1(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)))$,

(2) $f_2 : \{\mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}, \quad f_2(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i\arg(z)/2}$．（ただし，$-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ とする．）

3-4　平面 $\mathbb{R}^2$ の線形変換

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

を，平面 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視して複素関数と考える．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 α, β を用いて，$f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$ と表せることを示せ．

(2) f が正則であるための a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ．

3-5　次の関数 $u(x, y)$ は調和関数であることを示し，$\mathrm{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$ となるような正則関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を求めよ．

(1) $u(x, y) = -3x^2y + y^3$,

(2) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

3-6　関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が正則であるとする．このとき次を示せ．

(1) $\overline{f(z)}$ も正則であるならば f は定数関数．

(2) $\mathrm{Im}(f(z))$ が定数であるならば f は定数関数．

3-7 †　複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が極座標を使って $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ と表されているとする[1]．このとき，Cauchy-Riemann 方程式に対応する条件は次のようになることを示せ．（教科書 p39 および p45 の問題 2-27 参照）

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \qquad \text{(極座標での Cauchy-Riemann 方程式)}$$

[1] 例えば D が上半平面で $0 < \theta < \pi$，などの条件があって，θ が一意に決まるとして考えよ．

$\boxed{\textbf{3-8}}^{\dagger}$　複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が C^1 級関数 $r(x, y)$ と $\theta(x, y)$ を用いて $f(x+iy) = r(x, y)e^{i\theta(x,y)}$ と表されているとする．

(1) Cauchy-Riemann 方程式に対応する条件を $r(x, y)$ と $\theta(x, y)$ についての条件として書き表せ．

(2) 前問を使って，$\arg(f(x + iy)) = x$ を満たす正則関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{3-9}}^{\dagger}$　正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が点 $z_0 \in D$ において，$f'(z_0) \neq 0$ をみたすとする．

(1) f の局所的な逆関数 g が存在すること，すなわち，$f(z_0)$ を含む開集合 U と関数 $g : U \to \mathbb{C}$ が存在して，$f \circ g(z) = z$（$z \in U$）が成り立つことを示せ．（ヒント：逆関数定理）

(2) この局所的な逆関数 g は正則であることを示せ．

$\boxed{\textbf{3-10}}^{\dagger}$　関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表したとき，u, v が C^1 級とする．このとき

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i^2\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

と定義する．同様に $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) f$ とする．次を示せ．

(1) 全ての点 $z \in D$ で $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z) = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$ が成り立つならば f は定数関数．

(2) f が正則であるための必要十分条件は D の全ての点で $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$ が成り立つことである．また，そのとき $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$ が成り立つ．

$\boxed{\textbf{3-11}}^{\dagger}$　複素関数 $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ において，実部 u と虚部 v がそれぞれ x と y の実係数の多項式であるとする．このとき関数 f は z と $\overline{z}$ の多項式，すなわち，$f(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{ij} z^i \overline{z}^j$（$a_{ij} \in \mathbb{C}$）と表されることを示せ．さらに，この関数 f が $\mathbb{C}$ 上で正則であるための，係数 a_{ij} についての必要十分条件を求めよ．

$\boxed{\textbf{3-12}}^{\dagger}$　正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．点 $w_0 \in D$ を中心とする半径 $\epsilon > 0$ の小さな円を $S(\epsilon)$ とし，その像を $f(S(\epsilon))$ を $f(w_0)$ を中心にして ϵ^{-1} 倍に拡大したものを $S'(\epsilon)$ とする．$\epsilon \to 0$ とするとき，$S'(\epsilon)$ は半径 $|f'(w_0)|$ の円に近づくことを示せ．（$w_0 = f(w_0) = 0$ として考えれば十分．）

コメント：できれば，f が正則でなく，単に C^1 級であるときどうなるかを調べて，正則性の持つ幾何学的な意味について考えてみよ．

解析 A 1 演習問題 No.4 (10/24)

§4 初等関数 (多項式・有理関数・指数関数)

4-1 次の有理関数を部分分数展開せよ.

$$R_1(z) = \frac{1}{z^3 - 1}, \qquad R_2(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

4-2 次を満たす $z \in \mathbb{C}$ を全て求めよ.

(1) $e^z = -1 + \sqrt{3}i$,

(2) $e^{2z-1} = -1$

4-3 指数関数について次を示せ.

(1) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$,

(2) $|e^z| \leq e^{|z|}$.（等号はいつ成り立つか？）

4-4 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ を複素平面の写像と考えるとき，次の問いに答えよ.

(1) 長方形 $R = \{z \mid \mathrm{Re}(z) \in [a, b], \mathrm{Im}(z) \in [0, c]\}$ の像 $f(R)$ を $0 < c < 2\pi$ の場合に図示せよ. また，$c \geq 2\pi$ の時はどのようになるか.

(2) 円板 $D(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ の逆像 $f^{-1}(D(r)) := \{w \in \mathbb{C}; f(z) \in D(r)\}$ を求めよ.

(3) 上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の逆像 $f^{-1}(H)$ を求めよ.

4-5 実数係数の n 次多項式 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$（$a_n \neq 0$）は 2 次以下の実数係数の多項式の積に因数分解できる，すなわち，

$$P(x) = a_n(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_p) \cdot (x^2 + c_1 x + d_1) \cdots (x^2 + c_q x + d_q)$$

（b_i, c_i, d_i は全て実数で $c_i^2 - 4d_i < 0$）と表すことができること，を示せ.（問題 1-11 参照.）

4-6 整関数 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で微分方程式 $g'(z) = g(z)$ をみたすものを全て求めよ.（ヒント：$g(z)/e^z$ の微分を考えてみよ.）

$\boxed{\textbf{4-7}}$ † （実有理関数の部分分数展開.）有理関数の部分分数展開から次の主張を導け．実数係数の有理関数 $R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k / \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ は次の形に分解できる．

$$R(x) = P(x) + A(x) + B(x)$$

ここで，$P(x)$ は多項式，$A(x)$, $B(x)$ はそれぞれ次のような項のいくつかの和である：

$$\frac{a}{(x-b)^k}, \qquad \frac{cx+d}{(x^2+ex+f)^k}, \qquad (a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}, e^2-4f<0, k \text{ は自然数})$$

$\boxed{\textbf{4-8}}$ † n 次多項式 $P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$（ただし，$\alpha_k \in \mathbb{C}$）を考える．

(1) $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \dfrac{1}{z-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{1}{z-\alpha_n}$ を示せ.

(2) 複素平面のある直線 ℓ の片側を領域 H とする．α_i が全て H に含まれるならば，$P'(w) = 0$ の解も全て H に含まれることを示せ.（ヒント：H の補集合上で $P'(z) \neq 0$ を示す．問題 1-15 も参照.）

$\boxed{\textbf{4-9}}$ † 有理関数 $R(z)$ が単位円周 $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ を単位円周にうつす，すなわち,「$|z| = 1$ であれば $|R(z)| = 1$」が成り立つとする．

(1) $S(z) = \overline{R(\overline{z})}$ が有理関数であることを確かめよ．また，$R(z)$ を

$$R(z) = \eta \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j)}, \qquad \{\alpha_i\} \cap \{\beta_j\} = \emptyset$$

という形に書き表すとき，$S(z)$ はどのように表されるか？

(2) $z \in S^1$ について $S(z) = 1/R(1/z)$ が成り立つことを示せ.

(3) $R(z)$ は一般に次の形に表せることを示せ.

$$R(z) = e^{i\theta} \cdot \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{z-\gamma_i}{1-\overline{\gamma_i} z} \right), \qquad \gamma_i \in \mathbb{C} \setminus S^1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textbf{4-10}}$ † 整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が周期関数であるとは，ある複素数 $\omega \neq 0$ が存在して，全ての $z \in \mathbb{C}$ について $f(z+\omega) = f(z)$ が成り立つことである.（ω を周期という.）

(1) 正則関数 $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ に対して，関数 $f(z) = g(\exp(2\pi i z/\omega))$ は周期が ω の周期関数であることを示せ.

(2) 逆に，周期 ω の任意の周期関数 $f(z)$ に対してある正則関数 $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ が存在して，$f(z) = g(\exp(2\pi i z/\omega))$ と表せることを示せ.（ヒント：まず g をどのように定義すれば良いかを考えよ．g の正則性については問題 3-9 を参照.）

解析 A 1 演習問題 No.5 　　(10/31)

§5 初等関数 (三角関数・双曲線関数・対数関数)

$\boxed{\textbf{5-1}}$ 次の値（または，値の集合）を求めて，複素平面上に図示せよ．
$\log(1+i), \qquad (1+i)^i$

$\boxed{\textbf{5-2}}$ 複素数の集合 S について，$S+S=\{s_1+s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$, $2S=\{2s \mid s \in S\}$ と定義することにする．複素数の集合として次の等式は成り立つか？
$\log(\exp(i\pi/4)^2) = \log(\exp(i\pi/4)) + \log(\exp(i\pi/4)) = 2\log(\exp(i\pi/4))$

$\boxed{\textbf{5-3}}$ 対数の主値 $\mathrm{Log}(z)$ についての対数法則

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$$

は一般には成り立たないことを例を挙げて示せ．また，$\mathrm{Re}(z) > 0$ かつ $\mathrm{Re}(w) > 0$ であるときは成り立つことを示せ．

$\boxed{\textbf{5-4}}$ 対数関数の主値 $\mathrm{Log}(z) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ が正則関数であることを Cauchy-Riemann 方程式を確かめることで示せ．またその導関数 $(\mathrm{Log}(z))'$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{5-5}}$ 次の値を求めよ。$\sin(-i), \qquad \tan(1+i).$

$\boxed{\textbf{5-6}}$ $\sin(\pi - z) = \sin(z)$ を示せ。また、$\sin(z) = \sin(w)$ であるための z と w についての必要十分条件を求めよ。

$\boxed{\textbf{5-7}}$ 指数関数の性質と定義に基づいて次の等式を示せ．

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$
$$\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\frac{z+w}{2}\cos\frac{z-w}{2}$$

$\boxed{\textbf{5-8}}$ $\tan^{-1} z$ を $\log z$ を用いて表せ．

$\boxed{\textbf{5-9}}$ † 多価関数として次の等式を示せ．　$\cos^{-1}(w) = i \cdot \log\left(w + \sqrt{w^2-1}\right).$

$\boxed{\textbf{5-10}}$ † 三角関数 $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ や双曲線関数 $\sinh z$, $\cosh z$, $\tanh z$ は周期関数（問題 4-10 参照）であることを示し，周期のうち絶対値が最小のものを一つ求めよ．また，これらの関数について問題 4-10(2) の関数 $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ はどのように取ればよいか？

$\boxed{\textbf{5-11}}$ † 関数 $f(z) = \sin z$ を複素平面上の写像とみるとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 $\mathrm{Im}(z) = y$（y は定数）の像を求めよ．また、像は y の値によってどのように変化するか?

(2) 直線 $\mathrm{Re}(z) = x$（$-\pi/2 < x < \pi/2$ は定数）の像を求めよ．また像は x の値によってどのように変化するか？

(3) 帯状の領域 $E = \{x + iy \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$ を考える．写像 $f : E \to \mathbb{C}$ は単射であることを示せ．また，像 $f(E)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{5-12}}$ † 次の問いに答えよ．

(1) $f(z) = \tan(z)$ を指数関数 $g(z) = e^z$，関数 $R(z) = 1/z$ および $z \mapsto az + b$ という形のいくつかの関数の合成として表せ.（順番は適当に決めよ.）

(2) 帯状の領域 $E = \{x + iy \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$ を考える．(1) の答えを用いて写像 $f : E \to \mathbb{C}$ は単射であることを示せ．また，像 $f(E)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{5-13}}$ † 次の問いに答えよ。（前問を参照せよ。）

(1) 関数 $R(z) = 1/z$ は原点を通らない円を原点を通らない円にうつすことを示せ．また原点を通らない直線を原点を通る円から原点を除いたものにうつすことを示せ.

(2) 直線 $\mathrm{Im}(z) = y$（y は定数）および $\mathrm{Re}(z) = x$（$-\pi/2 < x < \pi/2$ は定数）の f による像は円またはその一部になることを示せ．また、それらの像は x,y の値によってどのように変化するかを調べよ.

解析 A 1 演習問題 No.6　　(11/14)

§6　複素関数の積分

コメント：以下は複素積分の問題です．来週以降に習うことは使ってはいけません．

6-1　次の積分を求めよ．(t は実変数とする．)

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (1+it)^{-1}dt$

6-2　次の領域の境界を反時計回りに一周する（区分的 C^1 級の）閉曲線 γ を具体的に区間 $[0,1]$ から $\mathbb{C}$ への写像として表せ．また，積分 $\int_\gamma \overline{z}dz$ を求めよ．

(1) 円板 $|z-i| \leq 1$.

(2) 点 ± 1 と i を頂点とする三角形.

6-3　次の曲線 γ について，積分 $\int_\gamma z^2dz$ を求めよ．

(1) 0 から $1+i$ へ向かう線分.

(2) 0，1, $1+i$ を順に結ぶ折れ線.

6-4　閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ で定める．次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$,　　(2) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}^n dz$. ただし n は整数として，負の値の場合も考えよ．

6-5　複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と C^1 級の曲線 $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ について次を示せ．

(1) $\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz$（$c \in \mathbb{C}$ は定数.）

(2) $\displaystyle\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) \leq \int_\gamma |f(z)||dz|$

(3) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|$.　ヒント：$\theta$ を適当にとれば $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\cdot\int_\gamma f(z)dz\right)$

ただし，実数値連続関数の積分の基本的性質は使ってよい．

6-6　点 z_0 を通らない C^1 曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ を $\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}$ と表す．問いに答えよ．

(1) 積分 $\int_\gamma (1/(z-z_0))dz$ の値を $r(a), r(b), \theta(a), \theta(b)$ で表せ.

(2) γ が閉曲線であるときは積分 $\int_\gamma (1/(z-z_0))dz$ の値は $2\pi i$ の整数倍になることを示せ.

(3) 整数 $(2\pi i)^{-1}\int_\gamma (1/(z-z_0))dz$ は γ の z_0 の周りの回転数と呼ばれる．なぜか？

$\boxed{\textbf{6-7}}$ 積分 $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-1||dz|$ を計算せよ．

$\boxed{\textbf{6-8}}$ † 積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1}dz$ を計算せよ．ただし,「$|z|=2$」は原点を中心とする半径 2 の円周を反時計回りに一周する閉曲線とする．(ヒント：まず，被積分関数を部分分数展開する．)

$\boxed{\textbf{6-9}}$ † 積分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$ を 2 つの方法で計算することで次の等式を示せ．

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))/(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)$$

(ヒント：$|z|=1$ のとき $(z+z^{-1})=2\mathrm{Re}(z)$ を利用する．また，展開して問題 6-4 を使う．)

$\boxed{\textbf{6-10}}$ † 三角形 T の境界を反時計回りに一周する曲線を γ をする．次を示せ．

(1) $\int_\gamma z dz = 0$,

(2) $\int_\gamma \overline{z} dz = 2i\cdot$ (T の面積)．

$\boxed{\textbf{6-11}}$ † $f: D\to\mathbb{C}$ が正則で，$\gamma:[a,b]\to D$ は区分的に C^1 級の閉曲線であるとする．このとき

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)dz$$

は純虚数であることを示せ．

$\boxed{\textbf{6-12}}$ † 連続な複素関数 $f: D\to\mathbb{C}$ と C^1 級の曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ を考える．区間 $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b$$

について, 各区間 $[a_i, a_{i+1}]$ 上の点 ξ_i を任意にとり，

$$I(f,\gamma,\Delta,\{\xi_i\}) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\gamma(\xi_i))\cdot(\gamma(a_{i+1})-\gamma(a_i))$$

と定義する．分割 Δ の目 $|\Delta| = \max_{0\le i\le k-1}|a_{i+1}-a_i|$ が 0 に近づくとき，$I(f,\gamma,\Delta,\{\xi_i\})$ は（点列 $\{\xi_i\}$ の取り方によらず）$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ に収束することを示せ．

コメント： 上の問題から複素積分がリーマン積分の複素数への自然な一般化であることがわかる．また，積分が曲線のパラメータ付けによらないことや問題 6-5 で示した不等式もほぼ自明な命題になる．

解析 A 1 演習問題 No.7　　(11/28)

§7　コーシー (Cauchy) の積分定理と原始関数 (1)

7-1　4 つの点 $\pi/2$, $\pi/2+i$, $-\pi/2+i$, $-\pi/2$ を頂点とする長方形の周を反時計回りに一周する曲線を γ をする．曲線 γ を具体的に写像として与え，関数 $\cos(z)$ の曲線 γ に沿う積分 $\displaystyle\int_\gamma \cos(z)dz$ を直接計算することで，コーシーの積分定理が成り立つことを確認せよ.

7-2　領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$ で定義された正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える.

(1) 多重連結領域の場合のコーシーの積分定理（教科書の定理 5）を用いて，$0 < r < r' < R$ について $\displaystyle\int_{|z|=r} f(z)dz = \int_{|z|=r'} f(z)dz$ が成り立つことを説明せよ.

(2) 教科書の定理 5 の証明における議論を具体的な場合に行うことで，単純閉曲線の場合のコーシーの積分定理（教科書の定理 1）を用いて (1) の主張を示せ.

7-3　原点 0 を始点とし, 点 $w \in \mathbb{C}$ を終点とする線分を $\gamma_w : [0, 1] \to \mathbb{C}$ とする.

(1) 曲線 γ_w を具体的に写像として表せ.

(2) 積分 $F(w) = \int_{\gamma_w} z^n dz$ を（直接の計算で）求めよ.

(3) $F(z)$ が z^n の原始関数になることを確かめよ.

7-4　領域 $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上で次の関数の原始関数を求めよ.

(1) $\mathrm{Log}(z)$

(2) $z^{1/2}$（実部が正になる分枝を考える.）

(3) $z^2 e^{iz}$

7-5　グリーンの定理の主張を述べ，領域の形が辺が座標軸に平行な長方形である場合に証明を与えよ.（微積の教科書を参照してよい.）

7-6 †　区分的 C^1 級の単純閉曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ が囲む領域を E とする．E と γ を含む領域 D 上で定義された複素数値関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表す．ただし，$u(x, y)$, $v(x, y)$ が C^1 級であるとする．グリーンの定理を使うことで次を示せ.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i \int_E \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy)dxdy.$$

ただし $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f$（問題 3-10 参照．ミスプリントに注意）とし，右辺の面積分は実数変数の複素数値関数の積分と同様に実部と虚部に分けて別々に行うものとする.

$\boxed{\textbf{7-7}}^{\dagger}$　領域 D から点 $z_0 \in D$ を除いた部分 $D^* = D \setminus \{z_0\}$ で定義された正則関数 $f(z)$ が

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a$$

をみたすとする．$r > 0$ を円板 $|z - z_0| \leq r$ が D に含まれるように十分小さくとれば

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) = 2\pi i a$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：問題 7-2 から積分は r によらない．$r \to 0$ の極限を考える.）

$\boxed{\textbf{7-8}}^{\dagger}$　次数 m の多項式関数 $P(z)$ について, $r > 0$ を十分大きくとれば

$$\int_{|z|=r} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2\pi m i$$

であることを示せ.（ヒント：こんどは $r \to \infty$ の極限を考える.）

$\boxed{\textbf{7-9}}^{\dagger}$　領域 $D = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq n\pi (\forall n \in \mathbb{Z})\}$ で定義された関数 $f(z) = 1/\sin(z)$ を考える．曲線 γ は円周 $|z| = r$ を反時計回りに一周する閉曲線とする．次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{z \to 0} z f(z) = 1$，$\lim_{z \to \pi} (z - \pi) f(z) = -1$ を示せ.

(2) $r < \pi$ のとき，積分 $\int_\gamma f(z) dz$ を求めよ.（問題 7-7 が解かれていれば使ってよい.）

(3) $r > \pi$ かつ $r \notin \pi\mathbb{Z}$ であるとき，積分 $\int_\gamma f(z) dz$ を求めよ.（r の値で分類する.）

以下は位相の問題.（位相幾何の講義で詳しく扱われるはず.）

$\boxed{\textbf{7-10}}$　共通の始点と終点を持つ，領域 $D \subset \mathbb{C}$ 内の 2 つの曲線 $\gamma_i : [0,1] \to D$ （$i = 0, 1$） が D 内で端点を固定してホモトープ (homotopic) であるとは，ある連続写像 $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ が存在して次をみたすことである： $0 \leq t \leq 1$ と $0 \leq s \leq 1$ について

$$\Gamma(i, t) = \gamma_i(t) \quad (i = 0, 1) \qquad \Gamma(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

区間 $[0,1]$ を定義域とする曲線の間のホモトープという関係は同値関係であることを示せ.

$\boxed{\textbf{7-11}}$　領域 $D \subset \mathbb{C}$ が凸集合（convex set）であるとは任意の 2 点 $z, w \in D$ を結ぶ線分が D に含まれることである.

(1) 開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$（$z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$）は凸集合であることを示せ.

(2) 領域 D が凸集合であるとき D は単連結であることを示せ.

$\boxed{\textbf{7-12}}^{\dagger}$　共通の始点と終点を持つ，領域 D 内の 2 つの曲線 $\gamma_i : [0,1] \to D$,（$i = 0, 1$）について，次の 2 条件が同値であることを示せ.

(1) γ_0 と γ_1 が D 内で端点を固定してホモトープ.

(2) γ_0 に γ_1 の向きを逆にしたものをつなげた閉曲線 $\gamma_0 + (-\gamma_1)$ が定値写像

$$\gamma_c : [0,1] \to D, \quad \gamma_c(t) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

に D 内で端点を固定してホモトープ.

解析 A 1 演習問題 No.8　　(12/5)

§8　コーシー (Cauchy) の積分定理と原始関数 (2)

8-1　曲線 $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \cos t + i \sin t$ について，次の積分を求めよ．

$$\int_\gamma \mathrm{Log}(z)dz, \qquad \int_\gamma \sqrt{z}dz.$$

ただし，後者において $\sqrt{z}$ は $\mathrm{Re}\sqrt{z} > 0$ となる分枝を考えるものとする．

8-2　下図の閉曲線 γ_1 と γ_2 について，積分 $\displaystyle\int_{\gamma_i} \frac{z}{z^2+1}dz$, （$i = 1, 2$）を求めよ．

8-3　下図の閉曲線 γ_1 と γ_2 について，積分 $\displaystyle\int_{\gamma_i} \frac{1}{z}dz$, （$i = 1, 2$）を求めよ．

8-4　問題 8-3 の曲線 γ_1, γ_2 について積分 $\displaystyle\int_{\gamma_i} \frac{1}{z^2}dz$, （$i = 1, 2$）を求めよ．

8-5　関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ を点 ± 1 を通らない任意の閉曲線 γ に沿って線積分するとき，値 $\int_\gamma f(z)dz$ のとりうる値をすべて求めよ．また，それぞれの値を与える曲線の例をあげよ．

8-6　関数 $f(z) = 1/(z^3+1)$ と円周 $|z - z_0| = \sqrt{3}$ を正の向きに一周する曲線 γ を考える．積分 $\int_\gamma f(z)dz$ の値を複素数 z_0 の値によって場合分けして求めよ.（曲線 γ が $f(z)$ が定義されていない点を通るときは考えなくてよい.）

8-7　$\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i$ を示せ．（$\dfrac{e^z}{z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{e^z - 1}{z}$ と分けて考える．問題 7-7 へのヒント.）

8-8　領域 $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上での関数 $f(z) = 1/z$ の原始関数を求めよ．また，$f(z)$ は領域 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で定義されるが、その上では f の原始関数は存在しないことを示せ．

$\boxed{\textbf{8-9}}$ † 関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ の部分分数展開を求めよ.

(2) 積分 $\int_{|z-i|=1/2} f(z)dz$ を求めよ. (問題 8-4 を参照.)

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{8-10}}$ † 次の問いに答えよ.

(1) 実数変数の関数 $f(x) = \cos(x^2)$ のグラフの概形を描け.

(2) 実数 $R > 0$ について, γ_R は R から $R + iR$ へ向かう線分とする. このとき次を示せ.

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2} = 0$$

(3) 0, R, $R + Ri$ を頂点とする三角形の周に沿う e^{iz^2} の積分を考えることで次を示せ[2].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\textbf{8-11}}$ † $R > 1$ に対して, 領域 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を考え, その周を反時計回りに 1 周する閉曲線を γ とする. 曲線 γ のうち, 実軸上の開区間 $(-R, R) \subset \mathbb{C}$ を除いた部分を γ_0 とする.

(1) 関数 $f(z) = e^{iz}/(z^2 + 1)$ の積分 $\int_\gamma f(z)dz$ を求めよ. (問題 7-7 を参照)

(2) $R \to \infty$ とするとき $\int_{\gamma_0} f(z)dz$ は 0 に近づくことを示せ.

(3) (1), (2) を使って, 次の広義積分を計算せよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}dx.$$

$\boxed{\textbf{8-12}}$ † 関数 $f(z) = (e^{iz} - 1)/z$ の領域 $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0, r < |z| < R\}$ ($r < R$) の境界に沿う積分を考えて, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - x}{x}dx - i\pi = -i\int_0^{\pi} \exp(iRe^{-i\theta})d\theta.$

(2) $\displaystyle\left|\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}dx - \pi\right| < \frac{\pi}{R}$. 特に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$

$\boxed{\textbf{8-13}}$ † 実数 s について, 次の等式を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+si)^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

また, これを利用して次の積分 (Fourier 積分) を求めよ.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}e^{-t^2}dt$$

ヒント：$s > 0$ のときは, 長方形 $R = \{z \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq s, |\mathrm{Re}(z)| \leq L\}$ の周に沿う積分を考えよ.

---

[2] 等式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ は微積の教科書の重積分の項に載っているので示さなくてもよいが思い出しておこう.

解析 A 1 演習問題 No.9 (12/19)

§9 コーシーの積分公式とその応用

9-1 コーシーの積分公式を利用して次の積分の値を求めよ.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} \qquad \int_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz$$

9-2 † $f: D \to \mathbb{C}$ は正則関数で，$\gamma: [0,1] \to D$ は区分 C^1 級単純閉曲線とする．また，γ の内側は D に含まれ，γ は反時計回りに向きづけられているとする．点 z_0 が γ の内側にあるとき，次の問いに答えよ.

(1) $|z-z_0|=r$ かつ $0<|\Delta z|<r/2$ のとき，n と r にのみに依存する定数 $C>0$ が存在して

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^n}-\frac{1}{(z-z_0)^n}\right)-\frac{n}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq C|\Delta z|$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：右辺を通分して Δz について整理する.）

(2) n についての帰納法で次の等式（コーシーの微積分公式）を示せ.

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

9-3 コーシーの微積分公式を使って次の積分の値を求めよ.

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^3}\, dz \qquad \int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z-i)^2}\, dz$$

9-4 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz$ を考えることで次を示せ.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

9-5 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2} \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-1)^n}\, dz$.

9-6 $|z| \neq 1$ のとき $\displaystyle\int_{|w|=1} \frac{\overline{w}}{w-z} dw$ を求めよ.

9-7 † 次の積分を求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n} dx$ （ヒント：問題 8-11 を参照）

$\boxed{\textbf{9-8}}$ † 自然数 $n \geq 3$ について広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$ を求めよ.
（ヒント：領域 $D_R = \{z \mid 0 < \arg z < 2\pi/n, |z| < R\}$ の境界に沿う積分を考える.）

$\boxed{\textbf{9-9}}$ 整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が全ての $z \in \mathbb{C}$ について $\mathrm{Re}(f(z)) < 0$ をみたすとする．このとき $f(z)$ は定数関数であることを示せ.（ヒント：$g(z) = e^{f(z)}$ を考える.）

$\boxed{\textbf{9-10}}$ 整関数 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が全ての $z \in \mathbb{C}$ について $|f(z)| < |g(z)|$ をみたすとき，f と g はどのような関係にあるか？

$\boxed{\textbf{9-11}}$ † 関数 $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則で $f(z) < 1$ をみたすとする．このような $f(z)$ のうちで $|f^{(n)}(0)|$ を最大にするものを求めよ.（n は与えられた自然数とする.）

$\boxed{\textbf{9-12}}$ † 整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が n 次以下の多項式関数であるための必要十分条件はある $n > 0$ と $C > 0$ について $|f(z)| < C(1 + |z|^n)$ が成り立つことである．このことを証明せよ.（ヒント：十分性が問題．$f^{(n+1)}(z) = 0$ を示す.）

$\boxed{\textbf{9-13}}$ リュービルの定理による代数学の基本定理の証明で使った次の評価を示せ.
$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ とするとき $\lim_{|z|\to\infty} |1/P(z)| = 0$.

§10 テーラー（Taylor）展開

10-1 関数 $f(z) = \cos z$ の原点 0 におけるテーラー級数を次の 2 つの方法で求めよ．

(1) n 階微分 $f^{(n)}(0)$ を計算して係数を求める．

(2) 定義 $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ と e^z のテイラー級数展開（と整級数展開の一意性）を用いる．

また，求めたテーラー展開はどの範囲の z について $\cos(z)$ に収束するか？

10-2 関数 $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ の原点 0 におけるテーラー級数を次の 2 つの方法で求めよ．

(1) n 階微分 $f^{(n)}(0)$ を計算して係数を求める．

(2) $f'(z) = (1+z)^{-1}$ であることと次の等式を使う．

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \qquad (|z| < 1).$$

また，求めたテーラー展開は $|z| < 1$ の範囲で $\mathrm{Log}(z)$ に収束することを示せ．

10-3 次の関数の括弧内に与えられた点 z_0 におけるテーラー級数を求めよ．

(1) z^5 （$z_0 = 1$） (2) $1/z$ （$z_0 = 2$）

10-4 関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ の $z = 0$ におけるテーラー級数を求めよ．ヒント：部分分数展開

10-5 次の関数の原点 0 におけるテーラー級数を求めよ．

(1) $\sinh(z)$ (2) $\cos^2(z)$

10-6 次の関数の原点 0 におけるテーラー級数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-z^4}$ (2) $e^{-z^2/2}$

10-7† $\mu \in \mathbb{C}$ について，多価関数 $(1+z)^\mu$ の一つの分枝として次の関数を考える：

$$f : D \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = e^{\mu \mathrm{Log}(1+z)} \qquad (D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$$

このとき f の $z = 0$ でのテイラー展開を求めよ．ただし，答えを表示するのに次の一般二項係数を用いよ．

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

10-8 　次の関数を $z = 0$ のまわりでテーラー級数展開せよ．

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

ただし，$\sqrt{1-z}$ は $z = 0$ のとき 1 になるような分枝を考えるものとする．

10-9 † 　正弦関数 $\sin(z)$ の逆関数 $\sin^{-1}(z)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $(\sin^{-1})'(z) = (1-z^2)^{-1/2}$ を示せ．（$z \neq \pm 1$ とする．多価性を適当に解釈せよ．）

(2) $\sin^{-1}(z)$ の 0 の近傍での分枝で，0 での値が 0 になるものを $\mathrm{Sin}^{-1}(z)$ と表す．（問題 5-11 参照）$\mathrm{Sin}^{-1}(z)$ の $z = 0$ におけるテーラー級数を求めよ．

10-10 † 　次の関数の原点 0 におけるテーラー級数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1+z^2}$

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}(z)$．（ヒント：まず $(\mathrm{Tan}^{-1})'(z) = 1/(1+z^2)$ を示す．）

ただし，$\mathrm{Tan}^{-1}(z)$ は tan の逆関数（多価関数になる）の $z = 0$ の近傍での分枝のうち $\mathrm{Tan}^{-1}(0) = 0$ となるものとする．（問題 5-12 参照）

10-11 　恒等的に 0 でない整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は任意の $R > 0$ について $|z| < R$ の範囲に有限個の零点しか持たないことを示せ．

10-12 　定数関数でない正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ について，$|f(z)|$ が点 $a \in D$ で極小値をとる，すなわち a のある近傍 U があって $|f(a)| = \min_{z \in U} |f(z)|$ であるならば，$f(a) = 0$ であることを示せ．

10-13 　$f : D \to \mathbb{C}$ が定数でない正則関数であるとき，その実部 $\mathrm{Re}(f(z))$ と虚部 $\mathrm{Im}(f(z))$ は D で最小値も最大値も持たないことを示せ．

10-14 † 　最大値原理を次の順に確かめよ：　$f : D \to \mathbb{C}$ は正則関数とする．

(1) 開円板 $B(a, r) = \{z \mid |z - a| < r\}$ が D に含まれるとき，$0 < s < r$ について次を示せ．

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{i\theta})| d\theta$$

(2) $B(a, r)$ 上で $|f(z)| \leq |f(a)|$ ならば，$|f(z)|$ は $B(a, r)$ 上で定数であることを示せ．

(3) $|f(z)|$ が $B(a, r)$ 上で定数ならば $f(z)$ は定数関数であることを示せ．

(4) 最大値原理を示せ．