解析Ａ１　　期末テスト　予行演習問題

$\boxed{1}$　複素数の絶対値と偏角について簡単に説明し，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $z^6 = 1$ の解を全て求めて，極表示で表せ．

(2) (1) で求めた解のうち実部も虚部も正である（唯一の）解を ζ とする．このとき

$$|\zeta^{2n} + \zeta^n| \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

の中で正で最小の値を求めよ．

$\boxed{2}$　(1) Cauchy-Riemann の方程式と調和関数の定義を述べ，正則関数との関係を説明せよ．
(2) $f : D \to \mathbb{C}$ が正則関数で D 上 $f(z) \neq 0$ であるとき，$\log|f(z)|$ は調和関数になることを示せ．

$\boxed{3}$　γ は円周 $|z-1| = 3$ を反時計回りに一周する閉曲線とする．次の複素線積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z} dz$

(2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$

$\boxed{4}$　積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ を求めることを考える．実数 $R > 0$ をとり，曲線 $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ を次のように定める:

$$\gamma_1(t) = t, \qquad \gamma_2(t) = Re^{it}$$

以下の問いに順に答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ は収束することを示せ．

(2) $0 < R < 1$ および $R > 1$ のとき，次の複素積分を求めよ．

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$$

(3) $R \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \to 0$ を示せ．

(4) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ を求めよ．

$\boxed{5}$　(1) 部分集合 $1 \leq |z| \leq 2$ を含む領域 D で定義された正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が円周 $|z| = 1$ 上で $|f(z)| = 1$, 円周 $|z| = 2$ 上で $|f(z)| = 2$ を満たすとき，$1 \leq |z| \leq 2$ なる z について $|f(z)| \leq |z|$ が成り立つことを示せ．
(2) 整関数 $f(z)$ が $|f'(z)| \geq 1$ を満たすとき，$f(z)$ は１次関数であることを示せ．

略解とヒント

$\boxed{1}$ (1) $e^{i\pi n/3}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 5)$
(2) $\zeta = e^{i\pi/3}$ で $|\zeta^2 n + \zeta^n| = |\zeta^n + 1||\zeta^n| = |\zeta^n + 1|$ なので図形的な考察から $n = 2, 4 \mod 6$）のとき最小で最小値は 1.

$\boxed{2}$ (1) 教科書とノート参照
(2) $\log|f| = (\log|f|^2)/2$ と Cauchy-Riemann の方程式を使って確かめる.

$\boxed{3}$ (1) パラメータ表示して計算する．または

$$\int_\gamma \overline{z} dz = \int_{|z|=3} \overline{z+1} dz = \int_{|z|=3} \overline{z} + 1 dz = \int_{|z|=3} \overline{z} dz = \int_{|z|=3} (9/z) dz$$

と変形して，コーシーの積分公式を用いる．答え：$18\pi i$（コメント：複素積分をパラメータ表示して計算できるようにしておくこと.）
(2) 積分経路を変更して $z = 0$ と $z = 2$ のまわりの小さな円周での積分にする．そこでコーシーの（微）積分公式を使う．答え：$(1 + e^2)\pi i/2$

$\boxed{4}$ (1) これは微積の問題．微積の教科書を復習しておこう.
(2) コーシーの微積分公式を使う．$\pi/2$ (3) $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \int |f(z)||dz|$ を用いる.

$\boxed{5}$ (1) 関数 $f(z)/z$ に最大値原理を当てはめる.
(2) リュービルの定理から $1/f'(z)$ は定数関数になる.