

平成 10 年度 函数解析 II レポート問題 (担当: 野村隆昭)

締切: 1999年2月12日(金) 厳守

レポート用紙は A4 判 のものを用い, 必ず表紙をつけ, そこに
系・入学年度・氏名(ふりがな)・学生証番号
を記入し, 左上を綴じて提出すること. 先行する小問の結果は(解けなくても)自由に用いてよい.

複素 Hilbert 空間 $H = L^2[0, 1]$ で考える. 内積は $(f | g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$ で, ノルムは $\|f\| := \sqrt{(f | f)}$ である. 本問では次の作用素を考える:

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y) dy \quad (0 \leq x \leq 1).$$

- (1) T は H 上の有界な自己共役作用素を定義し, $\|T\| \leq 1$ であることを示せ.
- (2) 作用素 T はコンパクトであることを示せ.
- (3) $f \in C[0, 1]$ とし $g = Tf$ とおく. 函数 g は C^2 級であって

$$\begin{cases} g''(x) - g(x) = -2f(x), \\ g(0) = g'(0), \quad g(1) = -g'(1) \end{cases}$$

をみたすことを示せ.

- (4) 逆に g は $[0, 1]$ 上 C^2 級であって, $g(0) = g'(0)$, $g(1) = -g'(1)$ をみたすとする. $f = -(g'' - g)/2$ とおくと, $g = Tf$ であることを示せ. ($h := g - Tf$ を考えてみよ.)
- (5) 0 は T の固有値ではないことを示せ. また 0 は T のスペクトル $\sigma(T)$ に属するかどうか, 理由とともに述べよ.
- (6) $f \in C[0, 1]$ とし $g = Tf$ とおくと, 次式を示せ:

$$2(Tf | f) = \int_0^1 (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2) dx + |g(1)|^2 + |g(0)|^2.$$

- (7) $\sigma(T) \subset [0, 1]$ を示せ.

- (8) $0 < \lambda \leq 1$ とし, $a_\lambda := \sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda}}$ とおく. このとき次を示せ:

$$\lambda \in \sigma(T) \iff (1 - a_\lambda^2) \sin a_\lambda + 2 a_\lambda \cos a_\lambda = 0.$$

これより次を示せ:

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n; n = 0, 1, \dots\}, \quad \frac{2}{1 + (\frac{\pi}{2} + n\pi)^2} < \lambda_n < \frac{2}{1 + (n\pi)^2}.$$

以上