展望講義・レポート問題 4

(1997/12/2)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

記号 • $\mathbb{C}$ の領域 D に対して，$A(D)$ は D の正則同型（逆も正則な全単射正則写像 $D \to D$）の全体を表す．D の点 z_0 に対して，$A(D, z_0)$ は z_0 における $A(D)$ の stabilizer とする．すなわち，$f(z_0) = z_0$ となる $f \in A(D)$ の全体とする．

• $G := SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} ; \ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$.

K は G の部分群で，行列 $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ からなるもの.

• $P := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$.　$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$.

[1] (1) D を $\mathbb{C}$ の領域とし，H は $A(D)$ の部分群で，D に推移的に作用しているとする．ある $z_0 \in D$ に対して $A(D, z_0) \subset H$ となっているならば，$H = A(D)$ であることを示せ.

(2) $A(\mathbb{D}, 0)$ は回転の群 $\mathcal{R} := \{\alpha \operatorname{Id}_{\mathbb{D}} \,;\, \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1\}$ であることを示せ.
（Schwarz の補題を使う.）

(3) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ かつ $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ とする．このとき変換 $f : P \to P$

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

が定義されること，及びこれら $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を動かしたときの f の全体 H は $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ に同型であることを示せ.

(4) $A(P, i) \subset H$ を示せ（H は (3) の H）.

• 各 $g \in A(P, i)$ は

$$z \mapsto g(z) = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}$$

の形であることを示すことになる．P を $\mathbb{D}$ に写す一次分数変換 $\dfrac{z-i}{z+i}$ を使うことを考えよ.

[2] (1) $C := \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ とおく．$G = C \cdot SL(2, \mathbb{R}) \cdot C^{-1}$ であることを示せ.

(2) $G = SU(1,1)$ は $\mathbb{D}$ に,

$$\zeta \mapsto g \cdot \zeta := \frac{\alpha\zeta + \beta}{\overline{\beta}\zeta + \overline{\alpha}} \qquad \left(g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in G,\ \zeta \in \mathbb{D} \right).$$

で作用することを示せ．また G/K は $\mathbb{D}$ に位相同型であることを示せ.

(3) $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in G,\ \zeta \in \mathbb{D}$ とし，$J(g, \zeta) := \overline{\beta}\zeta + \overline{\alpha}$ とおく．次の（ア）から（オ）を示せ：

（ア）$J(g_1 g_2, \zeta) = J(g_1,\, g_2 \cdot \zeta) J(g_2,\, \zeta)$.
（イ）$J(I, \zeta) = 1$．ただし I は単位行列.

（ウ）$J(g^{-1},\, g\cdot\zeta)^{-1} = J(g,\,\zeta) \neq 0.$
（エ）$|J(g,\,\zeta)|^2(1-|g\cdot\zeta|^2) = 1-|\zeta|^2.$
（オ）$dm(\zeta) := d\xi d\eta\ \ (\zeta = \xi + i\eta\ \ (\xi, \eta \in \mathbb{R}))$ とする．$d\lambda(\zeta) := (1-|\zeta|^2)^{-2}dm(\zeta)$ は $\mathbb{D}$ 上の G-不変測度であること，すなわち $d\lambda(g\cdot\zeta) = d\lambda(\zeta)\ \ (\forall g \in G)$ を示せ．

［**3**］ (1) n は 2 以上の自然数であるとし，

$$\mathcal{L}_n := L^2\biggl(\mathbb{D},\ \frac{n-1}{\pi}\,(1-|\zeta|^2)^{n-2}\,dm(\zeta)\biggr)$$

とする．恒等的に 1 である函数 $\mathbf{1}$ は $\mathcal{L}_n$ に属することを示し，その norm $\|\mathbf{1}\|_n$ を求めよ．

(2) $\mathbb{D}$ 上の有界函数 f は $\mathcal{L}_n$ に属し，$\|f\|_n \leqq \sup_{\zeta\in\mathbb{D}}|f(\zeta)|$ であることをを示せ．

(3) 各 $g \in G$ に対して作用素 T_g を次で定義する：

$$T_g f(\zeta) := J(g^{-1},\,\zeta)^{-n}\,f(g^{-1}\cdot\zeta) \qquad \left(f \in \mathcal{L},\ g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\right).$$

このとき，$T : g \mapsto T_g$ は G から Hilbert 空間 $\mathcal{L}_n$ 上のユニタリ作用素全体がなす群への準同型であることを示せ．

(4) $\mathcal{H}_n := \{f \in \mathcal{L}_n\,;\ f$ は $\mathbb{D}$ 上正則$\}$ とおく．$\mathbb{D}$ に含まれる任意の compact 集合 C に対して，正数 $k = k(C)$ が存在して，$|f(\zeta)| \leqq k\,\|f\|_n$ がすべての $f \in \mathcal{H}_n$ と $\zeta \in C$ が成り立つことを示せ．

- 証明はまず，f が $\mathbb{D}$ 上正則のとき，

$$|f(\zeta)|^2 \leqq \frac{1}{\pi\,\varepsilon^2}\int_{B_\varepsilon(\zeta)}|f(z)|^2\,dm(z) \qquad (B_\varepsilon(\zeta) := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-\zeta| < \varepsilon\} \subset \mathbb{D})$$

を示すことから始める．

(5) $\mathcal{H}_n$ は Hilbert 空間であることを示せ．

(6) $U_g := T_g|_{\mathcal{H}_n}$ とおく．このとき $U : g \mapsto U_g$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_n$ 上のユニタリ作用素による群 G の表現となっている．$V \neq \{0\}$ は $\mathcal{H}_n$ の閉部分空間で，すべての $U_g\ \ (g \in G)$ で不変であるとする．恒等的に 1 である函数 $\mathbf{1}$ は V に属することを示せ．

- $f \in \mathcal{H}_n$ とし，$f(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\zeta^m$ とする．まず

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,U_{u_\theta}f\,d\theta \qquad \left(u_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in K \subset G\right)$$

を示せ．ここで右辺の積分は $\mathcal{H}_n$-値函数の積分であり，結果はそれが定数函数 $\zeta \mapsto f(0)$ であることを意味している．従って，V に属する函数で $f(0) \neq 0$ であるものが存在することを示せばよい．G が $\mathbb{D}$ に推移的に作用していること及び V が G-不変であることを思い出すと ...

(7) G の表現 U が位相的に既約であること，すなわち $\mathcal{H}_n$ の閉部分空間で，すべての $U_g\ \ (g \in G)$ について不変なものは $\mathcal{H}_n$ 自身か $\{0\}$ であることを示せ．

$\boxed{\text{レポート問題 4 ・終}}$