平成９年度　函数解析 I　試験問題

（担当：野村隆昭）

1997年9月29日実施　　時間 $\boxed{\textbf{10:30 〜 12:30}}$

⋆ [**1**] から [**3**] の全問に解答せよ.

⋆ 問題は **用紙の両面** にある.

⋆ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと.

⋆ 1 枚の解答用紙に 2 問(例えば [**1**], [**2**]）の解答を混在させぬこと.

⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい.

[**1**]　H は無限次元の Hilbert 空間であるとする．次の各命題が正しければ証明を，誤りであればその理由（反例等）を述べよ.

(1) H の有界閉集合はノルム位相でコンパクトである.

(2) H の単位球面 $\{x \in H \,;\, \|x\| = 1\}$ は弱位相でも閉集合である.

(3) H の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in H$ に弱収束するとき，H 上の任意の有界線型作用素 T に対して，点列 $\{Tx_n\}$ は Tx に弱収束する.

(4) H 上の有界線型作用素の列 $\{T_n\}$ が H 上の恒等作用素 I に作用素ノルムで収束するとき，十分大きな n に対して T_n^{-1} が存在して有界線型作用素となり，$\{T_n^{-1}\}$ も I に作用素ノルムで収束する.

(5) H 上の有界線型作用素の列 $\{T_n\}$ は，すべて逆作用素 T_n^{-1} が存在して有界であると仮定する．このとき，$\{T_n\}$ が H 上の恒等作用素 I に強収束すれば，$\{T_n^{-1}\}$ も I に強収束する.

[**2**]　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる複素数列 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ の全体を $\mathbf{c}_0$ で表し，$\mathbf{c}_0$ の各元 $x = (x_n)$ に対して，$\displaystyle\|x\| := \sup_{n \geqq 1} |x_n|$ とおく.

(1) $\mathbf{c}_0$ は $\|\cdot\|$ で Banach 空間になっていることを示せ.

(2) ℓ^1 は $\displaystyle\|y\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$ となる複素数列 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ の全体を表すものとする．各 $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ に対して，$\displaystyle f_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \ \ (x \in \mathbf{c}_0)$ とおく．このとき $f_y \in (\mathbf{c}_0)^*$，すなわち f_y は $\mathbf{c}_0$ 上の有界線型形式であって，$\|f_y\| = \|y\|_1$ であることを示せ.

(3) 任意の $f \in (\mathbf{c}_0)^*$ は，適当な $y \in \ell^1$ に対して $f = f_y$ と表されることを示せ.

($\mathbf{e}_n := (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots) \in \mathbf{c}_0$ とおくとき，各 $x = (x_n) \in \mathbf{c}_0$ は，$\mathbf{c}_0$ で収束する級数として，$\displaystyle x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbf{e}_n$ と表せることに注意.)

裏面に続く

[3]　閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続函数からなる線型空間 M は L^2-ノルム

$$\|f\|_2 := \left[\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}$$

で閉じていると仮定する.

(1) M は sup-norm $\|f\|_{\sup} := \sup_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)|$ でも閉じていることを示せ.

(2) 開写像定理を使うことにより，定数 $A > 0$ が存在して，不等式 $\|f\|_{\sup} \leqq A\,\|f\|_2$ がすべての $f \in M$ に対して成り立つことを示せ.

(3) 各 $x \in [0,1]$ に対して，$g_x \in M$ が存在して，等式 $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g_x(t)}\,dt$ がすべての $f \in M$ に対して成り立つこと，及び $\|g_x\|_2 \leqq A$ を示せ.

(4) $\dim M \leqq A^2$ が成り立つことを示せ(従って M は有限次元である）.

　（M の任意の正規直交系 $\{e_j\}_{j=1}^n$ に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^n |e_j(x)|^2 \leqq A^2$　$(\forall x \in [0,1])$ が成り立つことを(3)より導く.）

以上