平成元年度　数学解析 I　試験問題　　(野村担当)

1989 年 10 月 12 日実施　　時間 13 : 30 ～ 16 : 30

$*$ [**1**] ～ [**5**] のすべてに解答せよ.

$*$ 1 枚の解答用紙で 2 問にわたらぬこと.

$*$ すべての解答用紙の上部に入学年度, 所属する系, 氏名を記入すること.

$*$ 答案提出時に必要事項を記入した履修カードを添えること (科目番号は 3105).

[**1**] 距離空間 (X,d) は完備であるとする. X の閉球の列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の (a),(b) をみたせば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ はただ一つの点からなることを示せ.

(a)　各 n について, $B_n \supset B_{n+1}$,

(b)　B_n の半径を $r_n > 0$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

[**2**] $(X,\mathcal{B},\mu)$ は測度空間で, $\mu(X) < \infty$ とする. $\nu(X) < \infty$ であるような有限加法的測度 $\nu : \mathcal{B} \to [0,\infty)$ が次の性質 $(*)$ を持つとき, ν は σ-加法的, すなわち, 測度であることを示せ.

$(*)$　任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $\mu(E) < \delta$ であるすべての $E \in \mathcal{B}$ に対して, $\nu(E) < \varepsilon$ となる.

[**3**]　(1)　通常の Cantor 集合 $C(\subset [0,1])$ の定義を述べよ. そして, C は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に関して零集合であること, 及び連続濃度を持つ閉集合であることを示せ.

(2)　(1) の C に対して, 無理数 α を適当にとると, 集合 $C+\alpha := \{\, c+\alpha \,;\, c \in C \,\}$ は有理数を含まぬことを示せ.

[**4**] X は空でない集合とし, σ-algebra $\mathcal{B}$ は X の部分集合からなるある族 $\mathcal{E}$ で生成されているとする. すなわち, $\mathcal{B} = \sigma[\mathcal{E}]$ とする. このとき,

$$\mathcal{B} = \bigcup \{\, \sigma[\mathcal{F}]\,;\, \mathcal{F} \text{ は } \mathcal{E} \text{ に属する高々可算個の } X \text{ の部分集合からなる族} \}$$

となることを示せ.

[**5**] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. X 上の μ-可積分な $\mathcal{B}$-可測函数 f に対して,

$$\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right)\, d\mu(x)$$

を求めよ.