得点 [1]	得点 [2]	得点 [3]	得点 [4]	得点 [5]	合計点	整理番号

解 析 学 I：中 間 試 験

1 枚 目（4 枚あります） 2017 年 5 月 29 日出題　13:00〜15:00

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

得点 [1]

[1] X, Y を空でない集合とし，U, U_α $(\alpha \in A)$ は X の部分集合，V, V_β $(\beta \in B)$ は Y の部分集合とする．写像 $f : X \to Y$ について，以下の (1)〜(3) に答えよ．(25 点)

(1) $f^{-1}\Big(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\Big) = \bigcup_{\beta \in B} f^{-1}(V_\beta)$,　$f^{-1}\Big(\bigcap_{\beta \in B} V_\beta\Big) = \bigcap_{\beta \in B} f^{-1}(V_\beta)$,　$f\Big(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} f(U_\alpha)$ を示せ．

(2) $f\Big(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in A} f(U_\alpha)$ が任意の $\{U_\alpha\}$ に対して成り立つことと，f が単射であることとは同値である．これを示せ．

(3) $f^{-1}(V^c) = \big(f^{-1}(V)\big)^c$ を示せ．

解 析 学 I： 中 間 試 験

2 枚 目（4 枚あります） 2017 年 5 月 29 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [2]

[2] Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の全体を $\mathscr{L}$ とし，$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする．
以下の各命題が正しいかどうか，理由とともに述べよ． (30 点)

(1) $E \in \mathcal{L}$ が有界ならば，$m(E) < +\infty$ である．
(2) $\mathbb{R}$ の開集合 G が $m(G) < +\infty$ をみたすなら，G は有界である．
(3) 1 点集合 $\{a\} \subset \mathbb{R}$ は零集合である．
(4) $E \in \mathscr{L}$ が零集合ならば，E は高々可算集合である．
(5) $E \in \mathscr{L}$ とする．E が内点をもてば，$m(E) > 0$ である．
(6) $E \in \mathscr{L}$ が $m(E) > 0$ をみたせば，E は内点を持つ．

解 析 学 I： 中 間 試 験

3 枚 目（4 枚あります） 2017 年 5 月 29 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [3]

[3] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続函数とする．また，$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の Borel 集合全体がなす σ 加法族とする．$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ならば $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ であることを次の手順で示せ．
(1) $\mathscr{C} := \{C \subset \mathbb{R}\,;\, f^{-1}(C) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ は σ 加法族である．
(2) $\mathscr{C}$ は $\mathbb{R}$ の任意の開集合を含む．したがって，(1) と $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ の定義から，$\mathscr{C} \supset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ となる． (15 点)

得点 [4]

[4] $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間とする．$E_n \in \mathscr{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$ をみたすならば，$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ とおくとき，$\mu\bigl(\limsup_{n\to\infty} E_n\bigr) = 0$ であることを示せ． (15 点)

解 析 学 I： 中 間 試 験

４ 枚 目（最後のページです） 2017 年 5 月 29 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [5]

[5] 各 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$\mathscr{C}_A$ は有限開区間の列 $\{(a_j,\, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ $(a_j < b_j; \forall j)$ で $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j,\, b_j)$ となるものの全体とする．このとき，各 $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ に対して，

$$m^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)\ ;\ \{(a_j,\, b_j)\} \in \mathscr{C}_A \Big\}$$

と定義すると，m^* は外測度であることを示せ． (15 点)