

積分記号下の微分

函数列 $\{f_n(x)\} \cdots \cdots f_n(x)$ は x と n に関係.

- $f_n(x)$ の収束が, (考えている範囲の) x に関して一様
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} n \rightarrow \infty$ のときの $f_n(x)$ の収束の度合いが
 x に依存しない

パラメータ (媒介変数, 助変数) n が自然数から
連続変数 (ある範囲の実数) になっても同様.

$f_\alpha(x)$: 連続パラメータ α を持つ区間 I 上の関数

$\alpha \rightarrow \alpha_0$ のとき, 各 $x \in I$ において, $f_\alpha(x) \rightarrow g(x)$ とする :

$$g(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(x).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta \implies |f_\alpha(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

定義 上の $\delta > 0$ が $x \in I$ に依存しないように選べるとき, $f_\alpha(x)$ は, $\alpha \rightarrow \alpha_0$ のとき, $x \in I$ に関して一様に $g(x)$ に収束するという.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$$

$$0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta \implies |f_\alpha(x) - g(x)| < \varepsilon \ (\forall x \in I).$$

定義 $\alpha \rightarrow \infty$ のとき, $f_\alpha(x)$ が $x \in I$ に関して一様に $g(x)$ に収束する

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ s.t.}$

$$\alpha > M \implies |f_\alpha(x) - g(x)| < \varepsilon \ (\forall x \in I)$$

- もちろん $M > 0$ が $x \in I$ に依存しないように選べるというところがポイント.

以下では x と α を同等に扱って, $f(x, \alpha)$ と書くことにしよう.
もっと平等に, 文字も α の代わりに y を用いて,
 $f(x, y)$ と書いてしまうのがより自然かもしれない.

$\rightsquigarrow$ 2変数の関数

$K := \{(x, \alpha) ; a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$
 $f(x, \alpha) : K$ で連続な関数 (2変数の関数として)

$F(\alpha) := \int_a^b f(x, \alpha) dx$ とおく.

定理 (1) $F(\alpha)$ は区間 $[\alpha_1, \alpha_2]$ で連続.

$$(2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx.$$

(積分の順序交換)

(3) 偏導関数 $f_\alpha(x, \alpha) := \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)$ が K で連続ならば

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx \quad (\text{積分記号下の微分})$$

証明. (1) 積分区間 $[a, b]$ を n 等分して, その分点を x_i とし, Riemann 和を考える:

$$F_n(\alpha) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, \alpha) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx = F(\alpha)$ である.

● この収束は α に関して一様である.

$\therefore \forall \varepsilon > 0 : \text{given. } f(x, \alpha) \text{ は } K \text{ で一様連続ゆえ}$

$\exists N (x, x', \alpha \text{ に無関係}) \text{ s.t. } \forall n \geq N \text{ に対して}$

$$|x - x'| \leq \frac{b-a}{n} \implies |f(x, \alpha) - f(x', \alpha)| < \varepsilon \quad (\forall \alpha).$$

$$F_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, \alpha) dx, \quad F(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \alpha) dx \quad \text{より}$$

$$F_n(\alpha) - F(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i, \alpha) - f(x, \alpha)) dx.$$

ゆえに $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} |F_n(\alpha) - F(\alpha)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i, \alpha) - f(x, \alpha)| dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (x_{i+1} - x_i) = (b - a)\varepsilon. // \end{aligned}$$

$F_n(\alpha)$ は α に関して連続であるから、その一様収束極限である $F(\alpha)$ は連続である. (1) の証明終.

(2) $F_n(\alpha) \Rightarrow F(\alpha)$ (一様収束) であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha. \quad (*)$$

ここで、極限をとる前の左辺について

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_i, \alpha) d\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \Phi(x_i).$$

$$\text{ただし } \Phi(x) := \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha.$$

(1) より、 $\Phi(x)$ は連続であることに注意.

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \Phi(x_i) = \int_a^b \Phi(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx\end{aligned}$$

これが前ページ (*) の左辺に等しいので、右辺に $F(\alpha)$ の定義を代入すれば

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha. //$$

この式を次のように書くことも多い：

$$\int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx.$$

(3) 仮定より, $f_\alpha(x, \alpha)$ は (2変数の) 連続関数である.

$$G(\alpha) := \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx$$

とおくと, (2) より

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha} G(\alpha) d\alpha &= \int_{\alpha_1}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx \\ &= \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha} f_\alpha(x, \alpha) d\alpha \\ &= \int_a^b (f(x, \alpha) - f(x, \alpha_1)) dx \\ &= F(\alpha) - F(\alpha_1). \end{aligned}$$

両辺を α で微分して, $F'(\alpha) = G(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx.$ □

例 $\int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha + 1)^{n+1}} \quad (\alpha > 0, n = 0, 1, 2, \dots).$

発見的には

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}$$

において、両辺を α で微分すると $(x^\alpha = e^{\alpha \log x})$

$$\int_0^1 x^\alpha \log x dx = \frac{-1}{(\alpha + 1)^2}$$

これをどんどん続ければよいことになる.

まず $\alpha > 0$ より, $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha (\log x)^n = 0$.

ゆえに被積分関数の $x = 0$ での値を 0 と定義すれば,
被積分関数は $0 \leq x \leq 1, \alpha > 0$ で (2変数の関数として) 連続.

$0 < \alpha_1 < \alpha_2$ を任意に選んで, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ で考える.

• 等式 $\int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$ を帰納法で示そう.

(1) $n = 0$ のときは明らか.

(2) $n \geq 1$ とし, $n - 1$ のときは正しいと仮定する.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha (\log x)^{n-1} = x^\alpha (\log x)^n$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha (\log x)^{n-1} dx \\
&= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 x^\alpha (\log x)^{n-1} dx \\
&= \frac{d}{d\alpha} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(\alpha+1)^n} \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

ゆえに, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ で所要の等式が成り立つ.

α_1, α_2 は任意であったから, 結局任意の $\alpha > 0$ で等式が成立.

□

$$K := [a, b] \times [c, d]$$

定理 $f(x, y) : K$ で 2 変数の函数として連続
 $\exists f_y(x, y) : K$ で 2 変数の函数として連続
 $p(y), q(y) : \text{微分可能}$ ($p, q : [c, d] \rightarrow [a, b]$),

$$F(y) := \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx$$

$\implies F(y)$ は $[c, d]$ で微分可能であって

$$F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f_y(x, y) dx + f(q(y), y)q'(y) - f(p(y), y)p'(y).$$

証明. $G(x_1, x_2, x_3) := \int_{x_1}^{x_2} f(t, x_3) dt$ とおく.

$$G_{x_1}(x_1, x_2, y) = -f(x_1, y), \quad G_{x_2}(x_1, x_2, y) = f(x_2, y).$$

さらに

$$G_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f_y(t, x_3) dt.$$

$F(y) = G(p(y), q(y), y)$ であるから

$$\begin{aligned} F'(y) &= G_{x_1}(p(y), q(y), y)p'(y) + G_{x_2}(p(y), q(y), y)q'(y) \\ &\quad + G_{x_3}(p(y), q(y), y) \\ &= \int_{p(y)}^{q(y)} f_y(t, y) dt + f(q(y), y)q'(y) - f(p(y), y)p'(y). \end{aligned}$$

例 $f(x) : \text{閉区間 } [a, b] \text{ で連続} \implies$

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \cdots \int_a^x}_{n \text{ 個}} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$$

$n = 1$ のときは明らかに正しい.

n のときに正しいとして, $n+1$ のときを示そう.

$$F(x) := \frac{1}{n!} \int_a^x (x-y)^n f(y) dy$$

とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x n(x-y)^{n-1} f(y) dy + \frac{1}{n!} [(x-y)^n f(y)]_{y=x} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy \\
&= \underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \cdots \int_a^x}_{n \text{ 個}} f(x) dx
\end{aligned}$$

$F(a) = 0$ であるから

$$F(x) = \int_a^x F'(x) dx = \underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \cdots \int_a^x}_{(n+1) \text{ 個}} f(x) dx$$

例 $f(x)$: 区間 $[0, a]$ で連続 ($a > 0$)

$$F(x) := \frac{1}{k} \int_0^x f(y) \sin k(x - y) dy \quad (k \neq 0 \text{ は定数})$$

は微分方程式 $F''(x) + k^2 F(x) = f(x)$ をみたす. (特殊解)

証明. $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, a]$ に対して

$$g(x, y) := f(y) \sin k(x - y)$$

とおく. 明らかに $g(x, y)$ は連続. さらに

$$g_x(x, y) = k f(y) \cos k(x - y)$$

も連続であるから, 積分記号下で微分できて

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x g_x(x, y) dy + \frac{1}{k} [f(y) \sin k(x - y)]_{y=x} \\ &= \int_0^x f(y) \cos k(x - y) dy \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} F''(x) &= -k \int_0^x f(y) \sin k(x-y) dy + [f(y) \cos k(x-y)]_{y=x} \\ &= -k^2 F(x) + f(x). \end{aligned}$$

広義積分の積分記号下における微分

使い勝手のよい定理は **Lebesgue 積分論**で習う.

$$K := \{(x, \alpha) ; x \geq c, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$

$f(x, \alpha) : K$ で連続で, 次の積分は α に関して一様に収束すると仮定する :

$$F(\alpha) := \int_c^\infty f(x, \alpha) dx$$

すなわち

$$F(\alpha, t) := \int_c^t f(x, \alpha) dx$$

が, $t \rightarrow \infty$ のとき, α に関して一様に $F(\alpha)$ に収束すると仮定.

定理 (1) $F(\alpha)$ は区間 $[\alpha_1, \alpha_2]$ で連続.

$$(2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_c^{\infty} f(x, \alpha) dx = \int_c^{\infty} dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha.$$

証明. (1) $F(\alpha, t) = \int_c^t f(x, \alpha) dx$ は t を止めるごとに α の連続関数で, 仮定より $F(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(\alpha, t)$ は α に関して一様収束. ゆえに $F(\alpha)$ は連続.

(2) $t \rightarrow \infty$ のとき, $F(\alpha, t) \Rightarrow F(\alpha)$ (一様) より

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha, t) d\alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_c^t f(x, \alpha) dx \end{aligned}$$

最後の式では、積分の順序を交換してよいので

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \\ &= \int_c^\infty dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \quad \square\end{aligned}$$

定理 $F(\alpha) := \int_c^\infty f(x, \alpha) dx$ が収束し, $f_\alpha(x, \alpha)$ は K で連続, かつ $\int_c^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$ が一様に収束する $\implies$

$$\frac{d}{d\alpha} \int_c^\infty f(x, \alpha) dx = \int_c^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$$

証明. $G(\alpha) := \int_c^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$ とおく.

広義積分は α に関して一様収束しているので

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^\alpha G(\alpha) d\alpha &= \int_c^\infty dx \int_{\alpha_1}^\alpha f_\alpha(x, \alpha) d\alpha \\ &= \int_c^\infty [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_1)] dx \\ &= F(\alpha) - F(\alpha_1). \end{aligned}$$

両辺を α で微分すると, $G(\alpha) = F'(\alpha)$.

□