整級数再訪

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ ：収束半径 ρ $(0 < \rho \leqq \infty)$

- $|x| < \rho$ のとき， $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ （項別に微分可能）.
- $|x| < \rho$ のとき， $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ （項別に積分可能）.

整級数を項別に微分あるいは項別に積分

$\rightsquigarrow$ 結果は同じ収束半径を持つ整級数

$\rightsquigarrow$ 整級数は何回でも項別に微分，あるいは項別に積分できる

例　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である.

$|x| < 1$ のとき, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ であり,

項別に微分したり $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

項別に積分することが可能 $-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

- しかしこの整級数は $|x| < 1$ では一様収束していない.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$ は一様収束ではない.

証明.　$S_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n$ とおく.
$|x| < 1$ で一様収束していると仮定すると，番号 N が存在して

$$\left| S_N(x) - \frac{1}{1-x} \right| \leqq 1, \quad \forall x\ (|x|<1). \qquad (\varepsilon = 1)$$

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1-x}\right| &\leqq \left|\frac{1}{1-x} - S_N(x)\right| + |S_N(x)| \\ &\leqq 1 + 1 + |x| + \cdots + |x|^N \leqq N+2.\end{aligned}$$

ゆえに函数 $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ は $|x|<1$ のとき有界.
これは明らかにおかしい.　$\square$

でも，整級数の項別微分可能性，項別積分可能性と，
先週までの一様収束性とを結びつけて考えたい.

- 整級数 $(*)$ $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 ρ $(0 < \rho \leqq \infty)$.

定理 $0 < R < \rho$ とする.
整級数 $(*)$ は $|x| \leqq R$ で一様収束する.

証明. $|x| \leqq R$ とすると，$|a_n x^n| \leqq |a_n| R^n$ であり，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$$

であるから，整級数 $(*)$ は収束する優級数を持つ.
ゆえに $|x| \leqq R$ で一様収束する. □

系　整級数は $|x| < \rho$ で項別に積分可能である.

証明.　$|x| < \rho$ として

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1} \qquad (**)$$

を証明する. $|x| \leqq R < \rho$ をみたす $R > 0$ をとる.

$|t| \leqq R$ で整級数 $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ は一様収束している.

ゆえに, 項別積分ができて, $(**)$ が成り立つ. $\square$

系　整級数は $|x| < \rho$ で項別に微分可能である.

証明.　$|x| < \rho$ として

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1}$$

を証明する. $|x| \leqq R < \rho$ をみたす $R > 0$ をとると,
$|x| \leqq R$ で二つの整級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

は一様収束している
（$g(x)$ の収束半径も ρ に等しいことは以前に示した）.
ゆえに, 項別微分ができて, $f'(x) = g(x)$ である. $\square$

定義　函数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で広義の一様収束をする
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I に含まれる任意の有限閉区間で一様収束する.

定義　函数項級数 $\sum f_n(x)$ が区間 I で広義の一様収束
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I に含まれる任意の有限閉区間で一様収束.

例　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ は区間 $(-1,1)$ で広義の一様収束をする.

証明.　収束半径は 1 であるから，任意の R $(0<R<1)$ に対して，級数は $|x| \leqq R$ で一様収束する.
そして，$(-1,1)$ に含まれる閉区間 J は，適当な R $(0<R<1)$ に対して，$J \subset [-R,R]$ となるから，証明終わり.　□

全く同様にして

定理　整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が $\rho\ (0<\rho\leqq\infty)$ $\Longrightarrow$ $\sum a_n x^n$ は $\lvert x\rvert<\rho$ で広義の一様収束をする.

定理　**(1)** $\{f_n(x)\}$ が区間 I で $f(x)$ に広義の一様収束,   **(2)** どの $f_n(x)$ も $x=a\in I$ で連続 $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で連続.

証明.　$x\to a$ のときに $f(x)\to f(a)$ となるかが問題.
ゆえに，初めから十分小さい $\delta_0>0$ を固定して，
変数 x の変域を $\lvert x-a\rvert\leqq\delta_0$ と制限して考えてよい.
そして，$\lvert x-a\rvert\leqq\delta_0$ では $\{f_n(x)\}$ は一様収束している.　□

定理　**(1)** $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に区間 I で収束,
(2) $\{f'_n(x)\}$ は区間 I で広義の一様収束
$\Longrightarrow$ $f(x)$ は微分可能で，$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ $(\forall x \in I)$.

証明.　$a \in I$ をとって，その十分小さい近傍 $J_a := [a-\delta,\ a+\delta]$ で考えて，以前の定理を適用すればよい.
結論は，$f(x)$ は J_a で微分可能であって

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad (\forall x \in J_a).$$

特に $f'(a) = \lim f'_n(a)$ であり，$a \in I$ は任意だから証明終.　□

アーベルの連続定理

動機：$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を求めるために，$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を考え，
$S = f(1)$ としたい．

- 収束半径が 1 より大きければ何も問題はない．
- 収束半径が 1 より小さければ，$\sum a_n$ は発散する．

ゆえに問題なのは収束半径が 1 のときである．

定理　（アーベルの連続定理）

(1) $f(x)=\sum a_n x^n$ の収束半径は 1

(2) $S=\sum a_n$ は収束する

$\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=S$.

証明.　a_0-S を a_0 とすることで，$S=0$ としてよい．

$S_n := a_0+a_1+\cdots+a_n \ (n=0,1,2,\dots)$ とおく．$|x|<1$ で

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\cdots$$

を掛け合わせる．x^n の係数は $a_0+a_1+\cdots+a_n$ となるので

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

$\varepsilon > 0$：**given**. $\exists N$ **s.t.** $n \geqq N \implies |S_n| < \varepsilon$.

$$f_1(x) := (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n, \qquad f_2(x) := (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n$$

とおく. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ である. ここで $0 < x < 1$ のとき

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n\right| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} |S_n x^n| \leqq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \varepsilon \cdot \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

ゆえに, $|f_2(x)| \leqq \varepsilon x^{N+1} \leqq \varepsilon.$

一方, $f_1(x)$ は多項式であるから, $x = 1$ でも連続.

$f_1(1) = 0$ より, $\exists \delta > 0$ **s.t.** $1 - \delta < x < 1 \implies |f_1(x)| < \varepsilon$.

ゆえに $1 - \delta < x < 1$ のとき

$$|f(x)| \leqq |f_1(x)| + |f_2(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これは, $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0 = S$ を示す. $\square$

例 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \cdots + \frac{(-1)^n}{p+nq} + \cdots \quad (p, q > 0)$

証明. $|x| < 1$ のとき

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1}\bigl(1 - x^q + x^{2q} - \cdots + (-1)^n x^{nq} + \cdots\bigr)$$

ゆえに $0 < t < 1$ のとき，項別に積分ができて

$$\int_0^t \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{p+nq}}{p+nq}.$$

最右辺の交代級数において：

正の数列 $\left\{\dfrac{1}{p+nq}\right\}$ は単調に減少して 0 に収束する.

ゆえに交代級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$ は収束する.

$t \to 1-0$ とすると，最右辺はアーベルの連続定理から

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{p+nq}}{p+nq} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

一方，明らかに $\displaystyle\int_0^t \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx \to \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx \ (t \to 1-0)$ ゆえ，

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \cdots + \frac{(-1)^n}{p+nq} + \cdots \qquad (p, q > 0) \quad \square$$

先の例において,

- $p = q = 1$ とすると

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{1+n} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2.$$

- $p = 1$, $q = 2$ とすると

$$1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\, x\Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}.$$

注意　アーベルの連続定理の逆は成立しない：

$f(x) = \sum a_n x^n$（収束半径は 1）において，$\exists \lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$ だが，$\sum a_n$ は存在しないことがある．

例　$|x| < 1$ のとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

において，$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ であるが，整級数自身に $x = 1$ を代入できない：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ は収束しない．

母函数 (generating function)

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：数列

整級数 $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ を $\{a_n\}$ の母函数（生成函数）という.

例　2項係数 $\binom{\alpha}{n}$ の母函数は $(1+t)^{\alpha}$

例　$\{a_n\}$：フィボナッチ (**Fibonacci**) の数列：

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ で定まる数列

$a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ \ldots$

- フィボナッチの数列の母函数を求めてみよう：

(1) 整級数 $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$ 以上.

（ここでは収束半径を求めるということはしない）

証明. 明らかに $\{a_n\}$ は単調に増加するので, $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \leqq 2a_{n-1}$$

ゆえに $0 < a_n \leqq 2^2 a_{n-2} \leqq 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1}$.

従って, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \limsup_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{n}} = 2$.

収束半径を ρ とすると, $\rho = \dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geqq \dfrac{1}{2} > 0$.

- 以下 $|t| < \dfrac{1}{2}$ として考える.

漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ に t^n を乗じて $\sum\limits_{n=2}^{\infty}$ とする：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n \\
&= t \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} \\
&= t \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n + t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n
\end{aligned}$$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ より, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n t^n = f(t) - t$ であるから

$$f(t) - t = t f(t) + t^2 f(t).$$

ゆえに

$$f(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

注意　$1-t-t^2 = -(t+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$ より，$|t| < \frac{1}{2}$ では $t \mapsto 1-t-t^2$ は単調減少で，$1-t-t^2 \geqq \frac{1}{4} > 0$.

$s = \frac{1}{t}$ とすると $1-t-t^2 = \frac{1}{s^2}(s^2-s-1)$.
$s^2-s-1=0$ の 2根を $\alpha > 0$, $\beta < 0$ とすると

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$ であり，

$$1-t-t^2 = \frac{1}{s^2}(s-\alpha)(s-\beta) = (1-\alpha t)(1-\beta t).$$

$|t| < \frac{1}{2}$ のとき，$|\beta t| \leqq |\alpha t| < 1$ に注意.

これより

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{1-t-t^2} = \frac{t}{(1-\alpha t)(1-\beta t)} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha t} - \frac{1}{1-\beta t}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n t^n\right). \end{aligned}$$

ゆえに t^n の係数を比べて

$$a_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

一般項がわかってしまうと，母函数の収束半径が $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $(> \frac{1}{2})$ であることもわかる.

実際，$a_n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ より

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right| = \left|\frac{1-\dfrac{\beta^n}{\alpha^n}}{\alpha-\beta\cdot\dfrac{\beta^n}{\alpha^n}}\right|.$$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = |\beta|$ より，$\dfrac{\beta^n}{\alpha^n} \to 0\ (n\to\infty)$.

ゆえに $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{\alpha}$ となって，収束半径は $\dfrac{1}{\alpha}$ である.

注意　$\dfrac{1}{\alpha}$ は $f(t) = \dfrac{t}{1-t-t^2}$ の分母 $=0$ の2根のうち，

原点に近い方（実はこれは偶然ではない）.

例　Legendre（ルジャンドル）の多項式

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2-1) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \qquad \dots\dots$$

一般に，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k\,(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$