§1. 復習.

- 自然数の全体
- 整数の全体
- 有理数の全体
- 実数の全体
- 複素数の全体

これらはすべて集合

$\cdots\cdots\ \mathbb{N}$
$\cdots\cdots\ \mathbb{Z}$
$\cdots\cdots\ \mathbb{Q}$
$\cdots\cdots\ \mathbb{R}$
$\cdots\cdots\ \mathbb{C}$

（万国共通記号）

- 全称記号 $\forall$ （**all**, 肯定文での **any**, **arbitrary**, **each**）
  $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $x^2+x+1>0$. $x^2+x+1>0$ **for** $\forall x \in \mathbb{R}$.

- 存在記号 $\exists$ (**exist**) $\exists x \in \mathbb{C}$ **s.t.** $x^2+ax+b=0$.
  (There exists a complex number x **such that** $x^2+ax+b=0$.**)**

集合の表記

元 $a, b, c, \ldots$ から成る集合を$\{a, b, c, \ldots\}$ と表す.
しかしこの表記法は時としてあいまい.
$\{1, 2, 3, \ldots\}$ $\cdots\cdots\cdots$ この集合は $\mathbb{N}$？
でも $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ かもしれない.
$\{0, \sqrt{2}, 18, \ldots\}$ だと何なのか全然わからない.
実は $\{\sqrt{2}\,(n-1) + (9 - \sqrt{2}\,)(n-1)(n-2)\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N} = \{n\ ;\ n$ は自然数$\}$.
セミコロン「;」のかわりに縦線「|」や，コロン「:」を使って

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ は自然数}\}, \quad \mathbb{N} = \{n\ :\ n \text{ は自然数}\}$$

と書く人もいる.

$\{x\ ;\ x$ は $0 < x < 1$ をみたす実数$\}$.
少し横着をして，$\{x \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < x < 1\}$と書くことも多い.

実数について：

$\mathbb{Q}$：加法・乗法に関して閉じている．減法もできる．

- さらに除法ができる：
  $\forall x \in \mathbb{Q}$（ただし $x \neq 0$），$\exists y \in \mathbb{Q}$ **s.t.** $xy = 1$.

  この y は一意的に定まるので，それを $\dfrac{1}{x}$ と書く．
- $b \in \mathbb{Q}$ かつ $b \neq 0$ のとき，$\dfrac{a}{b} := a \cdot \dfrac{1}{b}$.

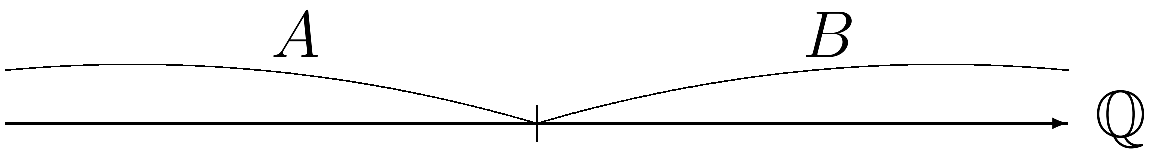
加減乗除に限っていえば，$\mathbb{Q}$ で間に合っている．

$\mathbb{Q}$ になくて $\mathbb{R}$ にある性質とは？

定義：$\mathbb{Q}$ の部分集合の対 (A, B) が $\mathbb{Q}$ の切断であるとは

(1) $\mathbb{Q} = A \cup B$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$.

(2) $a \in A$, $b \in B \implies a < b$.



可能性としては，次の４つが考えられる：

(1) A に最大数があり，B に最小数がない.

(2) A に最大数がなく，B に最小数がある.

(3) A に最大数がなく，B に最小数がない.

(4) A に最大数があり，B に最小数がある.

ここで，$\boxed{\textbf{(4)}\ A \text{ に最大数があり，} B \text{ に最小数がある}}$ は起こらない：

$\because$ α が A の最大数，β が B の最小数とする．

有理数 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ は α より大きいので A の元ではなく，

β より小さいので，B の元ではない．

これは $\mathbb{Q} = A \cup B$ に反する． $\square$

(1) の例： $A := \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x \leqq 0\}$, $\quad B := \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x > 0\}$.

（A に最大数 0 があり，B に最小数はない．）

(2) の例： $A := \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x < 0\}$, $\quad B := \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x \geqq 0\}$.

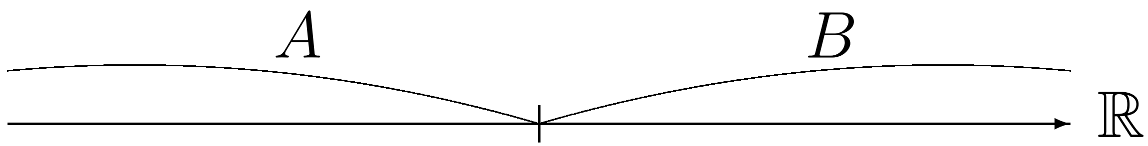
（A に最大数がなく，B に最小数 0 がある．）

(3) の例： $B := \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x^2 > 2$ かつ $x > 0\}$, $\quad A := \mathbb{Q} \setminus B$.

（A に最大数がなく，B に最小数がない．）

実数の連続性：

定義：$\mathbb{R}$ の部分集合の対 (A, B) が $\mathbb{R}$ の**切断**であるとは
(1) $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$.
(2) $a \in A$, $b \in B \implies a < b$.

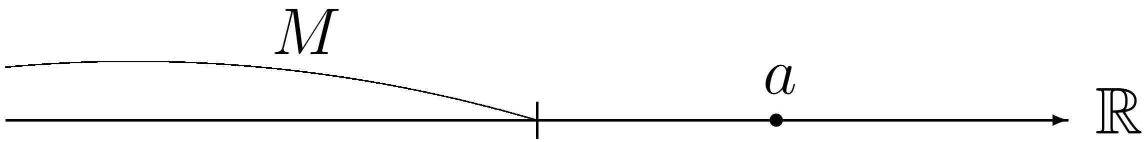


Dedekind の公理：$\mathbb{R}$ の切断 (A, B) においては，**(1)**,**(2)** の場合のみ起きる（**(3)** は起こらない）.

(1) A に最大数があり，B に最小数がない.
(2) A に最大数がなく，B に最小数がある.

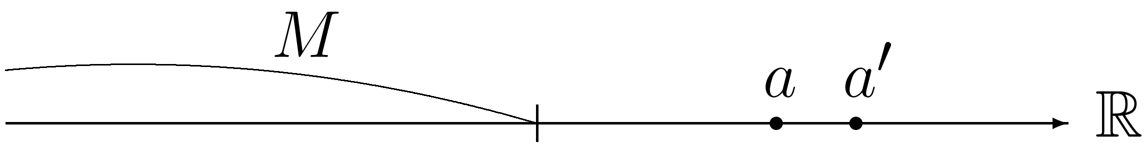
定義　$M \subset \mathbb{R}$ とする.

M が**上に有界** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists a \in \mathbb{R}$ **s.t.** $x \leqq a$ **for** $\forall x \in M$.



このような a を M の一つの**上界**という.

- a : M の上界, かつ $a < a'$ $\Longrightarrow$ a' は M の上界.



従って, できるだけ小さな上界に関心がある.

定理　上に有界な集合 $M \neq \emptyset$ の上界には最小のものが存在する.

証明. $B := \{x \,;\, x$ は M の上界$\} \neq \emptyset$, $A := B^c$ とする.
$M \neq \emptyset$ より, $y \in M$ をとると, $y - 1 \notin B$. ゆえに $B \neq \mathbb{R}$.
よって $A \neq \emptyset$.
このとき, 対 (A, B) は $\mathbb{R}$ の切断になっていることを示そう.
$\because$ $a \in A$, $b \in B$ とする. $b \in B$ より, $m \leqq b$ **for** $\forall m \in M$.
一方, a は M の上界ではないから, $\exists m_0 \in M$ **s.t.** $a < m_0$.
$\therefore$ $a < m_0 \leqq b$. ゆえに $a < b$. //

定理　上に有界な集合 $M \neq \varnothing$ の上界には最小のものが存在する.

証明. $B := \{x\ ;\ x$ は M の上界$\} \neq \varnothing$, $A := B^c$ とする.
$M \neq \varnothing$ より, $y \in M$ をとると, $y - 1 \notin B$. ゆえに $B \neq \mathbb{R}$.
よって $A \neq \varnothing$.
このとき, 対 (A, B) は $\mathbb{R}$ の切断になっている.

Dedekind の公理から, A に最大数があるか, B に最小数があるかのどちらか. もし A に最大数 α があったとすると, α は M の上界ではないので, $\exists m_1 \in M$ **s.t.** $\alpha < m_1$.
このとき, $c := \frac{1}{2}(\alpha + m_1)$ を考えると, $c < m_1$ より, c は M の上界ではないので, $c \in A$ となるが, $c > \alpha$ より, α の定義に反する. ゆえに B に最小数がある. □

定義　上に有界な集合 $M \neq \emptyset$ の上界の最小数を集合 M の上限 **(supremum)** といい, $\sup M$ と表す.

$$
\begin{aligned}
(\text{上限 } \alpha) &= (\alpha \text{ は上界の最小数}) \\
&= \begin{cases} \textbf{(1)} \ \alpha \text{ は上界の一つ}, \\ \textbf{(2)} \ \forall \alpha' < \alpha \text{ は上界ではない}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

いいかえると

命題　$\alpha = \sup M \iff$ 次の **(1)**,**(2)** が成り立つ：

(1) $m \leqq \alpha$ **for** $\forall m \in M$,

(2) $\forall \alpha' < \alpha$ に対して, $\exists m_0 \in M$ **s.t.** $\alpha' < m_0$.

- 下に有界な集合 $\to$ 下界 $\to$ 下限（最大下界：**infimum**）
  記号 $\inf M$

§2. ε-δ (ε-N) 論法の復習

[高校での定義]　番号 n が限りなく大きくなるとき，a_n が一定の数 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，α を $\{a_n\}$ の極限値という．記号で，$n \to \infty$ のとき，$a_n \to \alpha$，あるいは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く．

限りなく近づく?

例　$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & (n \text{ は偶数}) \\ -\dfrac{1}{n} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$ を考えると，$a_n \to 0$ であるが，偶数項めと奇数項めで，0 に近づく速さが違うので，実際には 0 に近づいたり離れたりしている．

$\{a_n\}$：数列，$\alpha \in \mathbb{R}$

> $\{a_n\}$ が α に収束するとは，任意の正の数 ε に対して，番号 N が存在して，すべての $n > N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つこと．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，あるいは $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ と書く．

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ **s.t.** $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ **for** $\forall n > N$.

For each $\varepsilon > 0$, there exists an integer N such that we have $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ for all $n > N$.

- 番号 N は，正の数 ε が与えられるごとにうまく決めればよい．
- 求めるのではなくて，適当（テキトーではなくて，適切）に自分で決める．

例： $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のとき：もちろん $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ε-N 論法を使うと. . . （普通はこんな事をわざわざしない）

- ε が与えられたとき，番号 N を選んで，
  $n > N$ のとき，$|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ が成り立つようにしたい.

実験

ε	N
1	
0.1	
0.01	
0.001	

たとえば，N として以下のようにとればよい．

ε	N
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000

$\varepsilon = 0.1$ のとき：$n > 10\,(= N)$ ならば，$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10} = 0.1$ となる．

$\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$ のときも同様．

$\varepsilon = 0.1$ のとき，N としては，別に 10 でなくても，11でも12でも，100でも，10000000でも，とにかく10以上の自然数なら何でもよい
（10以上の自然数を一つ選んでくればよい）：そうすると
$n > N$ のとき，$|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} \leqq \dfrac{1}{10}$

- εが小さくなれば，それに応じて番号Nをとれば（後出し！），$n > N$ のとき，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つようにできる.
- 番号 N が ε に対して定まるのではなく，選ぶことができるという意味である.

$a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{なぜならば，任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，番号 } N \text{ を，} N \geqq \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{がみたされるように選ぶと} \\ n > N \text{ のとき，} |a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} \leqq \varepsilon\text{，したがって} \\ |a_n - 0| < \varepsilon \text{ となるからである.}\end{array}}$$

- 青字のところだけを読めば，収束の定義の文言通りである.

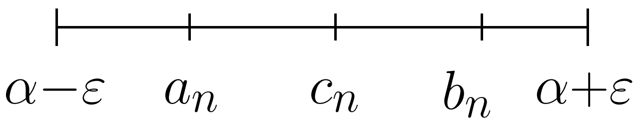
定理（はさみうちの定理）$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば数列 $\{c_n\}$ も α に収束する.

証明. $\varepsilon > 0$ は与えられたものとする.
仮定より，番号 N が存在して,

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon,\ |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

(番号 N は a_n に対するものと b_n に対するものとは違うかもしれないが，存在すれば大きく取り直すのは自由なので，a_n，b_n 共通にとれる）．そうすると，$n > N$ のとき

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < \alpha + \varepsilon$$



ゆえに $|c_n - \alpha| < \varepsilon$. $\square$

例題：$a_n := \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{n} & (n\text{は奇数}) \\ 1 & (n\text{は偶数}) \end{cases}$

もちろん，$\{a_n\}$ は収束しない．

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = \lim_{m\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2m-1}\right) = 2$ であるのに

$a_{2m} = 1\ (\forall m)$ だからである．これを ε-N 論法でみてみよう．

$a_{2m} = 1\ (\forall m)$ より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = 1$ でないことを示せばよい．

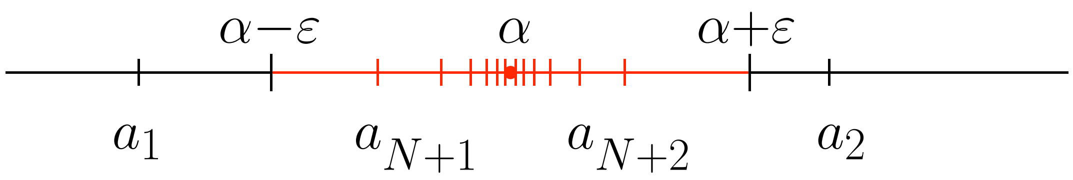
$m \geqq 2$ ならば

$$|a_{2m-1} - 1| = \left|1 - \frac{1}{2m-1}\right| \geqq 1 - \frac{1}{2m-1} \geqq \frac{2}{3} > 0.5$$

となるから，$\varepsilon = 0.5$ に対して，$|a_{2m-1} - 1| > \varepsilon$ となる m が無数にある．

α に収束 $\iff$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \ \textbf{s.t.} \ |a_n - \alpha| < \varepsilon \ \textbf{for} \ \forall n > N\textbf{.}$$



α に収束しない $\iff$

「$\forall\varepsilon > 0, \exists N \ \textbf{s.t.} \ |a_n - \alpha| < \varepsilon \ \textbf{for} \ \forall n > N$」の否定.

$$\exists\varepsilon > 0 \ \textbf{s.t.} \ \forall N\textbf{,} \ \exists n > N \ \textbf{s.t.} \ |a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$$

より噛み砕けば ...

$N = 1$ に対して，$\exists n_1 > 1$ **s.t.** $|a_{n_1} - \alpha| \geqq \varepsilon$**.**

$N = n_1$ に対して，$\exists n_2 > n_1$ **s.t.** $|a_{n_2} - \alpha| \geqq \varepsilon$**.**

$N = n_2$ に対して，$\exists n_3 > n_2$ **s.t.** $|a_{n_3} - \alpha| \geqq \varepsilon$**.**

....

結局

$\exists\, n_1 < n_2 < \cdots <$ **s.t.** $|a_{n_k} - \alpha| \geqq \varepsilon\ (k = 1, 2, \dots)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \text{ に収束しない } \Longleftrightarrow \\ \qquad \exists\varepsilon > 0, \textbf{ s.t. } \text{無数の } n \text{ に対して } |a_n - \alpha| \geqq \varepsilon \end{array}}$$

定義　$\{a_n\}$ が ∞ に発散するとは，任意の正の数 L に対して，番号 N が存在して，すべての $n > N$ に対して $a_n > L$ が成り立つこと．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，あるいは $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ と書く．

$\forall L > 0$, $\exists N$ **s.t.** $a_n > L$ **for** $\forall n > N$.

同様に

定義　$\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散するとは，任意の正の数 L に対して，番号 N が存在して，すべての $n > N$ に対して $a_n < -L$ が成り立つこと．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$，あるいは $a_n \to -\infty\ (n \to \infty)$ と書く．