平成 15 年度　函数解析学　試験問題 （担当：野村隆昭）

2004 年 1 月 29 日実施　　時間 **10:30 〜 12:00**

⋆ [**1**] 〜 [**3**] のすべての問題に解答のこと．
⋆ 解答用紙は 片面のみ を 縦長 に使用のこと．使用枚数に制限はない．
⋆ すべての解答用紙の上部に入学年度，氏名，学生番号を（理学部以外の人は所属学部も）記入のこと．１枚目の氏名にはふりがなを添えて下さい．
⋆ １枚の解答用紙に，たとえば [**1**]，[**2**] の小問の解答を混在させぬこと（従って全問を解答する場合，解答用紙は最低 3 枚ということになる）．
⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい．

[**1**] X はノルム空間，M は X の真閉部分空間とし，商ベクトル空間 X/M を考える．

(1) $\|x+M\| := \inf_{y\in M}\|x+y\|$ は X/M 上にノルムを定めることを示せ．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，単位ベクトル $x \in X$ が存在して，$\|x+M\| \geqq 1-\varepsilon$ となることを示せ．　（Hint: 講義では Hahn-Banach を使った．）

(3) 射影 $\pi(x) := x+M$ は X から X/M への，ノルムが 1 である有界線型作用素であることを示せ．

(4) X が完備なら X/M も完備であることを示せ．

（Hint: 講義中の定理「完備 $\Longleftrightarrow$ ノルムをとった級数が収束するなら元の級数が収束」を使って見よ．もちろん他の方法で証明しても構わない．）

[**2**] H は Hilbert 空間であるとし，$u \in H$，$u_n \in H$ $(n=1,2,\dots)$，$T \in \mathbf{B}(H)$，$T_n \in \mathbf{B}(H)$ $(n=1,2,\dots)$ とする．次の (1)〜(3) を示せ．

(1) $\|u_n - u\| \to 0$，$T_n \xrightarrow{\mathrm{w}} T$ ならば，$T_n u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Tu$．

(2) $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u$，$\|T_n - T\| \to 0$ ならば，$T_n u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} Tu$．

(3) $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u$，$T_n \xrightarrow{\mathrm{s}} T$ であっても，$T_n u_n$ は弱収束しないという例がある．

（Hint: $H = \ell^2$ で考えて，

$$T_{2m} : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, \dots, 0, \overset{(2m)}{x_{2m+1}}, 0, \dots),$$
$$T_{2m-1} : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_{2m-1}, 0, \dots).$$
）

[**3**] Banach 空間 $C([0,1])$ で次の線型作用素 T を考える：

$$Tf(x) := \int_0^{1-x} f(t)\,dt \qquad (f \in C([0,1])).$$

(1) 作用素 T はコンパクトであることを示せ．
(2) T のスペクトル $\sigma(T)$ は次の様になることを示せ：
（Hint：簡単な 2 階の常微分方程式を解くことになる．初期条件に注意．）

$$\sigma(T) = \{0\} \bigcup \left\{ \frac{1}{(\pi/2)+2k\pi}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

以上