

微分積分学 B・試験問題

(2004/01/26)

(担当：野村隆昭)

- * [1] ~ [5] のすべての問題に解答せよ.
 - * 解答用紙は片面のみを使用すること.
 - * 上から第 n 枚目に問題 [n] の解答を書くこと ($n = 1, 2, 3, 4, 5$).
 - * 計算用紙の提出は不要.
 - * 試験時間は 150 分.
-
-

[1] 次の積分の収束・発散を判定せよ：

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

[2] 函数 $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ が、区間 $(0, 1]$ で一様連続か否かを、理由と共に述べよ.

[3] $x > 0$ の範囲で考える.

(1) 次の等式が成立することを示せ：

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \sin \left(t + \frac{n+1}{2} \pi \right) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(2) 不等式 $\left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ.

[4] 函数 $f(x)$ は閉区間 $[0, 1]$ で定義されて連続で

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]), \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

をみたしているとする. このとき、次の不等式が成り立つことを示せ：

$$\left(\int_0^1 f(x) \cos x dx \right)^2 + \left(\int_0^1 f(x) \sin x dx \right)^2 \leq 1.$$

HINT: $f(x) \cos x = \sqrt{f(x)} \times \sqrt{f(x)} \cos x$ 等と見てみよ.

[5] Γ 函数を用いて、

$$I(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

を表し、次に $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I(\alpha)$ を求めよ.

以上