微積は計算だけ？

野村隆昭
◎九州大学数理学研究院

ロピタルで極限値計算は十分？

ロピタルの定理は微積分の多くの教科書で取り上げられているが，本稿は次の定理から始めよう．

【定理】 次の (1)〜(3) をみたす $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 函数 $f(x)$ と $g(x)$ が存在する．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ は存在して有限値,

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ は存在しない．

あれっ，ロピタルの定理と矛盾しているのでは，と思った人にはまず以下を読んでいただこう．

$$f(x) := x + \sin x \cos x, \quad g(x) := e^{\sin x} f(x)$$

は明らかに C^∞ 函数であり，定理の (1)〜(3) をみたす．実際，$f(x) \geqq x - 1$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ であり，これと $e^{\sin x} \geqq e^{-1}$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ も得て，条件 (1) がみたされている．さらに $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, \\ g'(x) &= e^{\sin x}(f(x)\cos x + f'(x)) \\ &= e^{\sin x}(f(x) + 2\cos x)\cos x. \end{aligned}$$

ゆえに，$\cos x$ を約分することにより，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| &= \left|\frac{2\cos x}{e^{\sin x}(f(x)+2\cos x)}\right| \\ &\leqq \frac{2}{g(x)-2e} \qquad (\text{ただし } x \text{ は十分大})\end{aligned}$$

を得る．これより $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ がわかるので，条件 (2) がみたされる．しかし，$\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}$ は $x \to +\infty$ のときに極限を持たない．

実は上記定理はロピタルの定理とは矛盾しない．すなわち，ロピタルの定理にあって，上記定理の (1)〜(3) にはない条件がある．それは，$g'(x)$ が 0 にならないという条件である．シュトルツの論文 [2][1] にあるこの例は，ロピタルの定理の『分母に現れる $g'(x)$ が 0 にならない』という条件の重要性を示している[2]．大学入試の解答でロピタルの定理を使っていいのか，というのは FAQ[3] であるが，答案ではこの $g'(x) \neq 0$ の条件をチェックしていないことが多いと思われるので，採点側とすればそこに目くじらを立てることが可能なわけである．さらに二つ例を挙げておこう．ロピタルの定理の裏が不成立であること，および不定形でなくても『ロピタルの定理』が成立し得ることを示す C^∞ 函数の例である．

【例 1】 $f(x) := x(2+\sin x)$ と $g(x) := x^2+1$ は，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\end{aligned}$$

をみたすが，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は存在しない．

---

[1] 実は Mathematische Annalen の第 15 巻が第 2 号までしか Mathematical Reviews には掲載されておらず，3-4 合併号にあるこの論文は MathSciNet には現れない．

[2] 分子の $f'(x)$ の零点が分母の $g'(x)$ の零点を約するときが盲点となっている．この条件を明記していない教科書が存在するのは残念なことである．

[3] Frequently Asked Question.

【例 2】 $f(x) := \sin\sqrt{x}$ と $g(x) := x$ は

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

をみたすが，$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ は存在しない．

ロピタルの定理の応用例として，多くの教科書にたとえば次のような演習問題が載っている．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} \tag{1}$$

この例では，分子は 3 回微分すれば e^x に，分母は 3 回微分すれば 6 になるから，ロピタルの定理を 3 回使えばよい，という具合である．ロピタルの定理を使っても使わなくても自由であるが，この演習問題自身よりも，その結論である

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

の方が重要である．ここで書いた $f(x) = g(x) + o(x^3)$ $(x \to 0)$ は，$h(x) := f(x) - g(x)$ が $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3} = 0$ をみたすことを表す（**ランダウの記号**という）．そういうことならば，テイラーの定理を学習したあとで，任意の自然数 n に対して，$x \to 0$ のとき

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}x^n + o(x^n)$$

が成り立つことをまず示し，先ほどの極限 (1) は

$$\frac{e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \to \frac{1}{6}$$

と認識する方がはるかに良い．たとえば，極限を求めるための次の (2) における式変形も，$x \to 0$ のとき，分母では

$$\sin x = x + o(x^2), \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3),$$

分子では $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$，および

$$xe^x = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) + o(x^3)$$

と見ていくという戦略によるもので，決して単なる思いつきによるものではない．

$$\begin{aligned}&\frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x\,(1-\cos x)}\\&\quad = \frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\frac{f(x)+o(x^3)}{x^3}.\end{aligned}\tag{2}$$

ただし，

$$\begin{aligned}f(x) &:= x - \frac{x^3}{3!} - x\Big(1 + x + \frac{x^2}{2!}\Big) + x^2\\&= -\frac{2}{3}x^3.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x\,(1-\cos x)} = 1\cdot 2\cdot\Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}.$$

この戦略はまた，複素函数論において極や零点の位数を求めたり，極における留数を求めるときにも有用である．

ランダウの記号 o を用いて函数の漸近的な振る舞いを記述することは，有効数字の桁数に似た雰囲気があり，教員が思い込んでいるよりもずっとよく学生諸君は理解する．ただし，ランダウの記号でも，大文字の O の方は初学者には混乱の元であるので，私は1年生の授業では持ち出さないことにしている[4]．

函数の漸近的な振る舞いがわかれば，たとえば

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-\cos x)^\alpha}\quad(\alpha > 0)\tag{3}$$

のような広義積分の収束・発散もすぐに見えてくる．すなわち，式 (3) を広義積分たらしめている $x = 0$ の近傍では $1 - \cos x = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ ゆえ，被積分函数は定数倍を除いて，$\dfrac{1}{x^{2\alpha}}$ と同等であることがわかる．ゆえに，$2\alpha < 1$ が広義積分可能となる条件である．ただし，これでは減点する先生もいらっしゃるかもしれないので，次のように書いておこう．

[4] 一度にいろいろと教え込むのは良くないということで．

すなわち，$\delta > 0$ をとって，

$$|x| \leqq \delta \implies \frac{1}{3}x^2 < 1 - \cos x < \frac{2}{3}x^2$$

としておくと，$0 < x \leqq \delta$ をみたす x に対して

$$\frac{3^\alpha}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}} < \frac{1}{(1-\cos x)^\alpha} < 3^\alpha \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

を得る．これより，$2\alpha \geqq 1$ のときは左側の不等式より広義積分 (3) の発散がわかり[5]，$2\alpha < 1$ のときは右側の不等式を使えば広義積分 (3) が収束することがわかる．ロピタルの定理を使って極限値計算をして事足れりとしていると，このような解析的感覚を身につけないままになってしまう．

2 変数函数の極限は極座標で？

1 変数函数の極限の次は，2 変数函数の極限へと話を進めるのが自然であろう．某有名演習書にある誤答から始めることにする．

【誤答】 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0. \tag{4}$$

なぜなら，極座標で考えて $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおくと，$r \to +0$ のとき，

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{r\,\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} \to 0.$$

その本にある誤答はここまでであるが，この誤答を『より完全な誤答』にするために，次のことを書き加えておこう．すなわち，$\sin\theta = 0$ のときは，$y = 0$ かつ $x^2 = r^2$ より $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$ ゆえ，求める極限値は 0 である．

たしかに $(x,y) \to (0,0)$ と $r := \sqrt{x^2+y^2} \to +0$ とは同値であるが，θ は自由勝手に動いていることを忘れてはいけない．また特別な場合として，θ は r の函数ということもあり得る．たとえば，$\theta = \mathrm{Arcsin}\, r$

[5] 閉区間 $[\delta, 1]$ 上では通常の連続函数の定積分である．

だと $\sin\theta = r$ より，$r \to +0$ のとき

$$\frac{r\,\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^4\theta + 1} \to \frac{1}{2}$$

となってしまう．

以下，式 (4) の左辺に現れる函数を $f(x,y)$（ただし，$(x,y) \neq (0,0)$ のとき）とし，$f(0,0) = 0$ とおく．上で述べたことは，θ を固定して $r \to +0$ とするとき，$f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \to f(0,0)$ であるが，函数 f は原点で不連続であることを示している[6)]．変数 x のベキを増やして $\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ を考えると，原点でどの方向にも微分可能であるが，原点で不連続な函数を得る．さらに一般の自然数 k に対して，$\dfrac{x^ky}{x^{2k}+y^2}$ を考えてみると面白いであろう．

さて，なぜ誤答が生じたのかを考えてみることにしよう．より易しい次の問題を考えてみよう．

【問題 1】 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ を調べよ．

次のような解答を載せている本がある．

極座標を用いて，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \cos\theta\,\sin\theta.$$

この値は θ によりいろいろな値をとるので，$r \to +0$ のとき一定でない．よって，問題の極限は存在しない．

なかなか微妙な言い回しである．おそらくは，$r \to +0$ としたとしても $\cos\theta\,\sin\theta$ は一定ではないので，問題の極限は存在しないと結論しているのであろう．しかし，次のように解釈する人もいるだろう．すなわち，θ を固定して $r \to +0$ とすると，極限は θ に依存してしまうので，問題の極限は存在しないと結論している．一旦こちらで考えてしまうと，極座標で考えるときは θ が固定されているという感覚になっ

---

6) 説明の流れにより，$f(r\cos(\mathrm{Arcsin}\,r),\, r^2)$ を考えたが，もちろん式の形から $f(x, x^2)$ を考える方が自然である．

てしまうので，上記の誤答が生じると思われる．

次の問題 2 の解答 1 は，多くの学生諸君の答案に見られるものであるが，評価がないので不完全な解答である．すでに述べたように，動いている $\cos\theta$ や $\sin\theta$ を押さえ込む評価を書かないといけない．

【問題 2】 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ を求めよ．

極座標を用いると，$r \to +0$ のとき

解答 1 $\displaystyle\frac{xy^2}{x^2+y^2} = r\cos\theta\,\sin^2\theta \to 0.$

解答 2 $\displaystyle 0 \leqq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = r|\cos\theta\,\sin^2\theta\,| \leqq r \to 0.$

しかし，どうせ評価をするなら，極座標を持ち出さずとも，次の解答の方が自然であると思う．

$$|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}, \quad y^2 \leqq x^2+y^2 \tag{5}$$

であるから，$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$0 \leqq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqq \sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

問題が少し捻ってあって，分母が次のような場合だとどうするか，考えてみよう．

【問題 3】 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}$ を求めよ．

分母の式を平方完成をすると

$$x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \tag{6}$$

となるから，$x^2+xy+y^2 \geqq \dfrac{3}{4}y^2$ を得る．x と y の役割を入れ替えて $x^2+xy+y^2 \geqq \dfrac{3}{4}x^2$ も得るから，二つの不等式を足して 2 で割ることで

$$x^2+xy+y^2 \geqq \frac{3}{8}(x^2+y^2).$$

あるいは，$xy \geqq -|xy| \geqq -\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ より

$$x^2+xy+y^2 \geqq \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

いずれにしても，定数 $\lambda > 0$ が存在して，

$$x^2+xy+y^2 \geqq \lambda(x^2+y^2) \tag{7}$$

が成立するから，

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}\right| \leqq \frac{1}{\lambda}\frac{|xy^2|}{x^2+y^2}$$

となって，問題 2 に帰着される．

ところで，同次 2 次多項式（**2 次形式**という），すなわち，a, b, c を実数の定数として，

$$P(x,y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{8}$$

がすべての $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $P(x,y) > 0$ をみたすとき，$P(x,y)$ は**正定値**であるという．不等号を逆にして，$P(x,y) < 0$ としたときに**負定値**であるという[7]．そして $P(x,y) > 0$ にも $P(x,y) < 0$ にもなるとき，**不定符号**であるという．式 (6) により，2 次形式 x^2+xy+y^2 は正定値である．さて，正定値 2 次形式 $P(x,y)$ に対して，円周 $x^2+y^2=1$ 上での $P(x,y)$ の最小値を λ とすると，$\lambda > 0$ であって，任意の $(x,y) \neq (0,0)$ に対して，

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (x^2+y^2)\,P\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \\ &\geqq \lambda(x^2+y^2). \end{aligned}$$

よって

$$P(x,y) \geqq \lambda(x^2+y^2). \tag{9}$$

不等式 (9) は $x=y=0$ でも明らかに成り立つので，結局すべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で不等式 (9) が成り立つ．問題 3 の解答で不等式 (7) を導いたのは，以上のような背景によるものである．

2 次形式の符号判定は，多変数函数の極値問題のところで必ず出てくる[8]．そして不等式 (9) に現れる λ は，実は正定値 2 次形式 (8) に対応する実対称

[7] 正の定符号や負の定符号という方がわかりやすいかもしれないが，不定符号と負の定符号とは音が似ていて，聞き間違いかねない．

[8] そのような書き方をしていない教科書も多いのであるが．

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の 2 個の固有値 $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2$ の内の λ_1 に等しい．線型代数学で学ぶ実対称行列の対角化からわかることなので，線型代数学もしっかり勉強してほしい．

極座標表示に関して，一言注意を述べておきたい．$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ で $x \neq 0$ のとき，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

であるが，後者を $\theta = \mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}$ と書くのは誤りである．点 (x, y) が第 2 象限や第 3 象限にあるときを考えてみればよい．そもそも $\left|\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}\right| < \dfrac{\pi}{2}$ であることを忘れてはいけない．最近は TeX で原稿が書かれている本も多く，TeX に初めから備わっているコマンドだと，$\arctan x$ というように頭文字が小文字で印字され，逆正接函数の主値を表す場合でも小文字のままである本も多い．$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ と書かれた場合，多価函数の適切に選ばれた分枝として受け入れてしまいそうになるが，その本の arctan の定義を見ると $|\arctan t| < \dfrac{\pi}{2}$ となっていたりする．極座標に変換したときの連鎖律の計算，たとえばラプラシアンの極座標表示のところで，この辺のことに無頓着な本もある．ただし，第 2，第 3 象限の (x, y) に対して $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ としても，本来の θ と定数しか違わないので，θ_x や θ_y の計算結果は合っている．

偏微分って計算だけ？

上でラプラシアンが出てきたので，関連する問題を考えてみよう．ここからは n 変数になる．まず

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

を**ラプラシアン**とし，**オイラー作用素**と呼ばれる

$$E := x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

を考える．作用素 E には次の性質がある．すなわち，$\lambda \geqq 0$ を定数とし[9]，$\mathbb{R}^n$ 上のなめらかな函数 $f(x)$ が，すべての $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(tx) = t^\lambda f(x)$ をみたすとき，$Ef = \lambda f$ が成り立つ．さらに，$r^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$ をかける作用素を M とする．すなわち，

$$Mf(x) = r^2 f(x).$$

2 個の作用素 A, B に対して，$[A, B] := AB - BA$ とおく（**交換子**）．

【問題 4】恒等作用素を I で表すとき，次を示せ．

$$[\Delta, M] = 4E + 2nI, \qquad [\Delta, E] = 2\Delta,$$
$$[E, M] = 2M.$$

それこそ計算するだけなので，詳細は読者に委ねる．この計算を踏まえて

$$H := E + \frac{n}{2}I, \quad X := -\frac{1}{2}M. \quad Y := \frac{1}{2}\Delta$$

とおくと，問題 4 からまったく形式的な計算で

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を得る．ここで次の 3 個の行列を考える．

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

行列 a, b に対しても交換子 $[a, b] := ab - ba$ を定義しておくと，直接の行列計算で

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h$$

[9] $\lambda < 0$ でもよいが，そのときは f の定義域から原点を除かないといけない．

を得る．3 個の作用素 H, X, Y が 1 次独立であり，3 個の行列 h, x, y も 1 次独立なので，ともに 3 次元の線型空間 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$ を張る．

$$\mathfrak{G} := \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y, \quad \mathfrak{g} := \mathbb{R}h \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y.$$

実際，$\mathfrak{g}$ は対角成分の和が 0 の実 2×2 行列のなす線型空間に他ならない．さらに，上で示したことから，$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{g}$ はともに交換子で不変である．すなわち

$$\begin{aligned} P, Q \in \mathfrak{G} \quad &\Longrightarrow \quad [P, Q] \in \mathfrak{G}, \\ p, q \in \mathfrak{g} \quad &\Longrightarrow \quad [p, q] \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{10}$$

結合法則は成り立たないけれど交換子を積と見て，式 (10) により，線型空間 $\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{g}$ は**リー環**をなすという．リー環と見たとき，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と書かれ，数学のさまざまな場面に現れる．ここにも実際に現れており，$\mathfrak{G}$ から $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の上の線型同型写像

$$\alpha H + \beta X + \gamma Z \mapsto \alpha h + \beta x + \gamma z$$

が交換子を保つことから，$\mathfrak{G}$ は Lie 環として $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に同型である．ラプラシアンと関連してこのようにして現れる $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ は，回転群 $SO(n, \mathbb{R})$，すなわち行列式が 1 の n 次実直交行列がなす群と対にして考えることにより，計算だけと思われた偏微分の問題からリー環やリー群という構造を持つ世界へと繋がっていく．それはまた，ハウ (Howe) により定式化された好一対[10] (dual pair) の特別な場合となっていて，その背後には壮大な世界が広がっているのである（文献 [1] 等参照）．

参考文献

[1] R. Howe, Dual pairs in physics: harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons. Applications of group theory in physics and mathematical physics (Chicago, 1982), 179–207, Lectures in Appl. Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[10] 訳語は岩波数学辞典第 4 版による．

[2] O. Stolz, Über die Grenzwerte der Quotienten, Math. Ann., **15** (1879), 556–559.

[のむら たかあき]