Grassmann manifold in a Hilbert Jordan algebra

野 村 隆 昭　　　　　　京 大 理

実 Hilbert 空間であると同時に実 Jordan 代数であり, Jordan 積による掛算作用素 $L(x) : y \mapsto xy$ がすべて自己共軛になっているようなものを Hilbert Jordan 代数という. 本講演では, 位相的に単純な Hilbert Jordan 代数 V の階数 p の冪等元がなす多様体 $\mathfrak{I}_p$ について述べる. ここで, V の冪等元はすべて階数有限であり, 内積を正規化して $\mathfrak{I}_p$ の元のノルムはすべて $p^{1/2}$ とできることに注意しておく. さて, 各 $a \in \mathfrak{I}_p$ は V に Peirce 分解を与える:

$$V = V_0(a) \oplus V_{1/2}(a) \oplus V_1(a) \quad \text{（直交直和）}, \qquad V_k(a) := \{x \in V\,;\, ax = kx\}.$$

この分解において, $V_1(a)$ は部分代数をなし, $V_1(a)V_{1/2}(a) \subset V_{1/2}(a)$ が成り立っている. 部分代数 $V_1(a)$ の可逆元全体を $V_1(a)^\times$ で表す. そして, $\pi_a(x) := 2L(x)\Big|_{V_{1/2}(a)}$ $(x \in V_1(a))$ とおくと, $\pi_a : V_1(a) \to \mathrm{Sym}(V_{1/2}(a))$ は $\pi_a(a) = I$ をみたす Jordan 代数 $V_1(a)$ の表現になっている. 各 $b \in \mathfrak{I}_p$ を $b = b_0 + b_{1/2} + b_1$ $(b_k \in V_k(a))$ と表して, $N_a := \{b \in \mathfrak{I}_p\,;\, b_1 \in V_1(a)^\times\}$ とする. 写像 ξ_a を $\xi_a(b) := \pi_a(b_1)^{-1} b_{1/2}$ $(b \in N_a)$ で定義すると, ξ_a は N_a から $V_{1/2}(a)$ への全単射を与える. この ξ_a を用いて, a での接空間 $T_a(\mathfrak{I}_p)$ が $V_{1/2}(a)$ となる Hilbert 多様体構造を $\mathfrak{I}_p$ に導入できて, これにより, 包含写像 $\mathfrak{I}_p \hookrightarrow V$ は embedding になる. 従って, Hilbert 空間 V の閉部分多様体として, $\mathfrak{I}_p$ は Riemannian Hilbert 多様体となる. ここでは, $a, b \in \mathfrak{I}_p$ で生成される部分代数 $V[a, b]$, 及び $a \in \mathfrak{I}_p$, $x \in V_{1/2}(a)$ で生成される部分代数 $V[a, x]$ の構造が計算の簡易化に大きく貢献する. さらに, 各 $a \in \mathfrak{I}_p$ に対して $V_{1/2}(a)$ が $\{u, v, w\} := (uv)w + u(vw) - v(uw)$ によって Hilbert Jordan 3 重系 (Hilbert JTS) をなすことも $V[a, x]$ の構造の記述に関わってくる. さて, $V_{1/2}(a)$ への直交射影を $E_{1/2}(a)$ とする. また, $\mathfrak{I}_p$ 上の各接ベクトル場 X を, a での値が $V_{1/2}(a)$ に属する V-値 C^∞-函数とみなし, $\mathfrak{I}_p$ の標準接続 ∇ を　$\nabla_X Y(a) := E_{1/2}(a)\Big(Y'(a)(X(a))\Big)$　で定義する. ただし, Y' は V-値函数とみた接ベクトル場 Y の Fréchet 微分である. さらに, 各 $x \in V_{1/2}(a)$ に対して, $\gamma(t) := \gamma_{a,x}(t) := (\exp 4t\,[\,L(x),\, L(a)\,])a$ は $\gamma(0) = a$, $\dot\gamma(0) = x$ をみたす $\mathfrak{I}_p$ の測地

線であり, 次の表示を持つ：

$$\gamma(t) = \left[\cos(2tL(x^2)^{1/2})\right] a + \frac{1}{2}\frac{\sin(2tL(x^2)^{1/2})}{L(x^2)^{1/2}}\, x + \frac{1}{2}\frac{I - \cos(2tL(x^2)^{1/2})}{L(x^2)}\, x^2.$$

ここで, 作用素 $L(x^2)$ は半正定値であることに注意しておく. 指数写像 $\mathrm{Exp}_a(x) := \gamma_{a,x}(1)$ は $B_a := \{x \in V_{1/2}(a)\ ;\ |\!|x|\!|_{1/2} < \pi/2\}$ から N_a の上への微分同相になっている. ただし, $|\!|\cdot|\!|_{1/2}$ は Hilbert JTS $V_{1/2}(a)$ のスペクトルノルムを表す. $\mathfrak{I}_p$ の Riemann 距離は $\mathrm{dist}(a,b) = \|\mathrm{Arcsin}(a-b)\|$ で与えられる（Arcsin は, Hilbert JTS とみなした V 上で「作用素解析」を通して定義されるもの）. $\mathfrak{I}_p$ の a における断面曲率 $k_a(x,y)$ ($x, y \in V_{1/2}(a)$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \perp y$) は, Hilbert JTS $V_{1/2}(a)$ 上の作用素 $u \,\square\, v := \{u, v, \cdot\}$, $P(u) := \{u, \cdot, u\}$ を用いて次の (1) の様に表される.

(1) $k_a(x,y) = 2\,\langle\,(y \,\square\, y - P(y))x \,|\, x\,\rangle = 2\,\langle\,(x \,\square\, x - P(x))y \,|\, y\,\rangle$.
(2) $0 \leqq k_a(x,y) \leqq 4\min(|\!|x|\!|_{1/2}^2, |\!|y|\!|_{1/2}^2) \leqq 2 \qquad (\because |P(x)| \leqq x \,\square\, x)$.

Hilbert JTS $V_{1/2}(a)$ の部分空間 W が平坦であるとは, $\{W, W, W\} \subset W$ かつ $\{u, v, w\} = \{v, u, w\}$ $(\forall u, v, w \in W)$ が成り立つときをいう. そうすると,

(3) $k_a(x,y) = 0 \iff x, y$ は 1 つの平坦部分空間 W に含まれる.