§4. $SL(2,\mathbb{R})^{\sim}$ の表現を絡める

極座標を導入することにより，$L^2(\mathbb{R}^n) \cong L^2\big((0,+\infty),\ r^{n-1}\,dr\big) \otimes L^2(S)$.

このとき，$L^2(\mathbb{R}^n) \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathsf{H}_m$ (Hilbert space direct sum).

ただし，$\mathsf{H}_m := L^2\big((0,+\infty),\ r^{n-1}\,dr\big) \otimes \mathscr{Y}_m$. すなわち，$Y_1,\dots,Y_{d_m}$ $(d_m := \dim \mathscr{Y}_m)$ を $\mathscr{Y}_m$ の ONB とするとき，

$$f \in \mathscr{H}_m \iff \begin{cases} f(ru) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d_m} \varphi_k(r) Y_k(\boldsymbol{u}) \ \ (r>0,\ \boldsymbol{u} \in S), \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \big|\varphi_k(r)\big|^2\, r^{n-1}\,dr < +\infty \ \ (\forall k = 1,2,\dots,d_m). \end{cases}$$

さて，次の作用素 H, X, Y を考える．

$$\begin{cases} H := E + \dfrac{n}{2} I, \quad \text{ただし } E := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ は Euler 作用素}, \\ X := -\dfrac{i}{2} \|\boldsymbol{x}\|^2 \text{ をかける作用素}, \\ Y := -\dfrac{i}{2} \Delta. \end{cases}$$

このとき，$[H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y,\ [X,Y] = H$ が成り立つ．

定義 4.1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{tr} A = 0\}$.

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は $[A,B] := AB - BA$ により，**Lie 代数**になる．

(1) $[A,B]$ は bilinear (A についても B についても linear),

(2) $[B,A] = -[A,B]$,

(3) (**Jacobi 律**) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = O$.

次の 3 つの行列は，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の基底をなす（ベクトル空間として）．

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接の計算で，$[h,x] = 2x,\ [h,y] = -2y,\ [x,y] = h$. したがって，線型写像

$$\sigma(ah + bx + cy) := aH + bX + cY \qquad (a,b,c \in \mathbb{R}) \ \cdots\cdots \text{①}$$

は，Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ 上の微分作用素による表現（準同型）である．作用素 H, X, Y の定義域としては Schwartz 空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ を考えることにするので，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ への表現という．

問題　$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は線型 Lie 群 $SL(2,\mathbb{R})$ の Lie 代数なので，$SL(2,\mathbb{R})$ あるいはその普遍被覆群のユニタリ表現 π があって，σ は π の「微分表現」であるか？
すなわち，$\sigma(X) = \dfrac{d}{dt}\pi(\exp tX)\Big|_{t=0}$ $(\forall X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$？

$SL(2,\mathbb{R})$ の 1 パラメータ部分群

以下，h, x, y が生成する行列の 1 パラメータ部分群をそれぞれ

$$a(t) = \exp(th)\ (t \in \mathbb{R}), \quad n_+(\xi) := \exp(\xi x)\ (\xi \in \mathbb{R}), \quad n_-(\eta) := \exp(\eta y)\ (\eta \in \mathbb{R})$$

とする．容易に，次式がわかる．

$$a(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad n_+(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_-(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}.$$

これらに対応する $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群を次の記号で表す．

$$A := \{a(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}, \quad N_+ := \{n_+(\xi)\ ;\ \xi \in \mathbb{R}\}, \quad N_- := \{n_-(\eta)\ ;\ \eta \in \mathbb{R}\}.$$

次の関係式が成立することに注意しておく．

$$a(t)n_+(\xi)a(t)^{-1} = n_+(e^{2t}\xi), \qquad a(t)n_-(\eta)a(t)^{-1} = n_-(e^{-2t}\eta).$$

さらに，

$$u := y - x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

とおき，$\kappa(\theta) := \exp(\theta u)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ とすると，

$$\kappa(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

対応する $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 K は

$$K := \{\kappa(\theta)\ ;\ -\pi < \theta \leqq \pi\}$$

となる．K は $SL(2,\mathbb{R})$ のコンパクト部分群である．
以下では，$w := \kappa\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ も独立に用いる．$w^2 = -I$, $w^4 = I$ である．
$wn_+(\xi)w^{-1} = n_-(-\xi)$ に注意．

問 1（岩澤分解）　多様体として，$SL(2,\mathbb{R}) = N_+AK \approx N_+ \times A \times K$.

$M := \{m(\varepsilon) := \varepsilon I\ ;\ \varepsilon = \pm 1\}$.

問 2（Bruhat 分解）　$SL(2,\mathbb{R}) = N_+MAN_- \coprod wMAN_-$.
そして，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ に対して，$g \in N_+MAN_- \iff d \neq 0$.

系 4.2. $SL(2,\mathbb{R})$ は w, N_+, A によって（代数的に）生成される．

証明. Bruhat 分解により，$SL(2,\mathbb{R})$ は w, N_+, A, M, N_- によって生成される．$m(-1) = w^2$ より，M は w で生成される．$wN_+w^{-1} = N_-$ より，証明終わり． □

ユニタリ作用素の 1 パラメータ群

$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素 $U_{N_+}(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R})$，$U_A(t)$ $(t \in \mathbb{R})$，$U_{N_-}(\eta)$ $(\eta \in \mathbb{R})$ を考える：

$$(*) \quad \begin{cases} U_{N_+}(\xi)f(\boldsymbol{x}) := e^{-i\xi\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, f(\boldsymbol{x}), \\ U_A(t)f(\boldsymbol{x}) := e^{nt/2}\, f(e^t\boldsymbol{x}), \\ U_{N_-}(\eta) := \mathscr{F} U_{N_+}(-\eta)\mathscr{F}^{-1}. \end{cases}$$

ただし，$\mathscr{F} = \mathscr{F}_n$ はユニタリ化した Fourier 変換：

$$\mathscr{F}f(\boldsymbol{x}) := \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\|\boldsymbol{y}\|\leqq N} f(\boldsymbol{y})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}\, d\boldsymbol{y}.$$

(*) の作用素はすべて $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上のユニタリ作用素であって，Schwartz 空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ を不変にする．さらに次の関係式が成り立つ．

$$U_A(t)U_{N_+}(\xi)U_A(-t) = U_{N_+}(e^{2t}\xi),$$

注意 4.3. (1) 雑な言い方をすると，$\dfrac{d}{d\xi}U_{N_+}(\xi)\Big|_{\xi=0} = X,\ \dfrac{d}{dt}U_A(t)\Big|_{t=0} = H.$
したがって，U_{N_+} や U_A の記号を用いた．
(2) $U_{N_-}(\eta)$ の定義は，$-X$ と Y が Fourier 変換に写り合っていることに基づいている．また，$n_-(\eta) = wn_+(-\eta)w^{-1}$ にも基づいている．

系**??**に基づいて，$U_{N_+}(\xi), U_A(t), \mathscr{F}$ を考えると良さそうだ．
しかし，①の σ において，

$$\sigma(u) = Y - X = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2\Big)$$

微分作用素 $-\dfrac{d^2}{dt^2} + t^2$ は Hermite 函数系 $\{\phi_j\}_{j=0,1,2,\ldots}$ を固有函数に持つ．ただし，

$$\begin{aligned} &\phi_j(t) := \frac{(-1)^j}{(2^j j!\sqrt{\pi}\,)^{1/2}}\, e^{t^2/2}\frac{d^j}{dt^j}\, e^{-t^2} \\ &\Big(-\frac{d^2}{dt^2} + t^2\Big)\phi_j(t) = (2j+1)\phi_j(t) \end{aligned} \qquad (j = 0,1,2,\ldots),$$

であり，$\{\phi_j\}_{j=0,1,2,\ldots}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の ONB．しかも，$\mathscr{F}_1\phi_j = (-i)^j\phi_j$．
よって，$\phi_\alpha(\boldsymbol{x}) := \phi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n)$ とおくと $\{\phi_\alpha\}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ の ONB であって，

$$\sigma(u)\phi_\alpha = i\Big(|\alpha| + \frac{n}{2}\Big)\phi_\alpha, \quad \mathscr{F}\phi_\alpha = (-i)^{|\alpha|}\phi_\alpha.$$

$W(\theta) := \exp\big(\theta\sigma(u)\big)$（本当は $\sigma(u)$ の閉包が生成するユニタリ作用素の 1 パラメータ群）とおくと，

$$W(\theta)\phi_\alpha = e^{i(|\alpha|+\frac{n}{2})\theta}\phi_\alpha.$$

$w = \kappa\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)$ と比べるために，

$$W\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\phi_\alpha = (-i)^{|\alpha|}e^{-in\pi/4}\phi_\alpha = e^{-in\pi/4}\mathscr{F}\phi_\alpha.$$

以上を踏まえて，$\mathscr{W} := e^{-in\pi/4}\mathscr{F}$ とおく．$\mathscr{F}^4 = I$ より，$\mathscr{W}^4 = (-1)^n I$ である．

補題 4.4. 作用素 $U_{N_+}(\xi), U_A(t), \mathscr{W}$ は H_m を不変にし，H_m 上ではそれぞれ

$$V_{N_+}(\xi)\otimes I, \qquad V_A(t)\otimes I, \qquad \mathscr{J}_m \otimes I$$

という形をしている．ただし，

$$V_{N_+}(\xi)\varphi(r) := e^{-i\xi r^2/2}\,\varphi(r), \qquad V_A(t)\varphi(r) := e^{nt/2}\,\varphi(e^t r),$$

$$\mathscr{J}_m\varphi(r) := \frac{e^{-in\pi/4}\,r^m}{2^{m-1+(n/2)}\,i^m\,\Gamma\big(\frac{n}{2}+m\big)}\int_0^{+\infty}\varphi(s)j_{\frac{n-2}{2}+m}(rs)s^{n+m-1}\,ds,$$

$$j_\lambda(z) := \Gamma(\lambda+1)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-\lambda}J_\lambda(z) \quad （J_\lambda(z) \text{ は Bessel 函数}）.$$

以下 m を固定するとき，作用素 $V_{N_+}(\xi), V_A(t), \mathscr{J}_m$ がすべて $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{R})^\sim$ の一つのユニタリ表現の表現作用素から来ていることを見よう．

簡単のため，$G = SL(2,\mathbb{R})$, $\mathscr{D} := \{z\in\mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ とおく．

G は $\mathscr{D}$ に一次分数変換で作用している：

$$g\cdot z := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in G,\ z\in\mathscr{D}\right).$$

定義 4.5. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in G$ に対して，$J(g,z) := cz+d$ （**保型因子**）．

- $z\in\mathscr{D} \implies J(g,z)\neq 0$.
- $J(g_1g_2, z) = J(g_1,\, g_2\cdot z)J(g_2,z)$,

$\mathscr{D}$ は単連結ゆえ，一価性定理より，各 $g\in G$ を固定するごとに

$$\exists\psi_g：\mathscr{D} \text{ 上一価正則 s.t. } e^{\psi_g(z)} = J(g,z)\ (\forall z\in\mathscr{D}).$$

この $\psi_g(z) = \log J(g,z)$ の枝は，$\psi_g(i) = \log(ci+d)$ の値の指定で一意的に定まる：

$$\psi_g(z) = \psi_g(i) + \int_{\Gamma(i,z)}\frac{c}{cw+d}\,dw, \qquad \Gamma(i,z) \text{ は } i \text{ と } z \text{ を結ぶ } \mathscr{D} \text{ 内の曲線}.$$

定義 4.6. $\widetilde{G} := \{(g, \psi)\ ;\ g \in G,\ \psi$ は $\mathscr{D}$ 上一価正則 s.t. $e^{\psi(z)} = J(g, z)\ (\forall z \in \mathscr{D})\}$.

$\widetilde{G}$ は次の演算で群になる：

$$(g_1, \psi_1)(g_2, \psi_2) = (g_1 g_2, \psi_3), \qquad (\psi_3(z) := \psi_1(g_1 \cdot z) + \psi_2(z)).$$

- 単位元は $(I, 0)$ （I は単位行列，0 は零函数）.
- $(g, \psi)^{-1} = (g^{-1}, -\psi \circ g^{-1})$.

$\widetilde{G}$ は G の普遍被覆群であり，$(g, \psi) \mapsto g$ が被覆準同型を与えている.

G の元 $n_+(\xi)$, $a(t)$, w に対応して，次の $\widetilde{G}$ の元を考える.

$$\widetilde{n}_+(\xi) := (n_+(\xi), 0), \qquad \widetilde{a}(t) := (a(t), c_t) \quad (c_t \text{ は定数函数 } -t),$$
$$\widetilde{w} := (w, \psi_0) \quad (\psi_0(z) := \mathrm{Log}(-z)).$$

このとき，$\widetilde{G}$ は $\widetilde{N}_+ := \{\widetilde{n}_+(\xi)\ ;\ \xi \in \mathbb{R}\}$，$\widetilde{A} := \{\widetilde{a}(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$，$\widetilde{w}$ で生成される.

定理 4.7. $\widetilde{G}$ の $L^2((0, +\infty),\ r^{n-1}\, dr)$ における既約ユニタリ表現 V_m があって，

$$V_m(\widetilde{n}_+(\xi)) = V_{N_+}(\xi)\ \ (\forall \xi \in \mathbb{R}), \quad V_m(\widetilde{a}(t)) = V_A(t)\ \ (\forall t \in \mathbb{R}), \quad V_m(\widetilde{w}) = \mathscr{J}_m.$$

注意 4.8. 実際には，V_m は G の 2 重被覆群 G_2 の表現になっている．さらに n が偶数なら，G の表現になっている.

あらすじ 次の Hilbert 空間（重み付き Bergman 空間）を考える：

$$\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D}) := \left\{ f\ ;\ f \text{ は } \mathscr{D} \text{ 上正則で，} \int_{\mathscr{D}} |f(z)|^2 (\mathrm{Im}\, z)^{\lambda-2}\, dxdy < +\infty\ \ (z = x + iy) \right\}.$$

- $\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D}) \neq \{0\} \iff \lambda > 1$.
  このとき，$\|f\|^2_{\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D})} := \dfrac{\lambda - 1}{\pi} \displaystyle\int_{\mathscr{D}} |f(z)|^2 (\mathrm{Im}\, z)^{\lambda-2}\, dxdy$ とおく.
- $\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D})$ 上に
$$U_\lambda\big((g, \psi)\big) f(z) := e^{\lambda\psi(g^{-1}\cdot z)} \cdot f(g^{-1} \cdot z)$$

によって，$\widetilde{G}$ の既約ユニタリ表現 $(U_\lambda, \mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D}))$ が実現される.

- 定理??の V_m は $U_{m+\frac{n}{2}}$ とユニタリ同値.
- 半直線上の函数と，上半平面上の正則函数を結びつけよう.

定理 4.9. $f \in \mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D}) \iff \varphi \in L^2\big((0, +\infty),\ r^{1-\lambda}\, dr\big)$ の Fourier–Laplace 変換.
すなわち，絶対収束する積分として，

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{izt}\, dt \qquad (z \in \mathscr{D})$$

と表されることが必要十分である．このとき，次のノルム等式が成立する．

$$\| f \|^2_{\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D})} = \frac{\Gamma(\lambda)}{2^{\lambda-1}\pi} \| \varphi \|^2_2.$$

この定理を $\lambda = m + \dfrac{n}{2}$ として適用すると，

$$L^2\big((0,+\infty),\, r^{1-m-\frac{n}{2}}\, dr\big) \longleftrightarrow \mathsf{A}^{m+\frac{n}{2}}(\mathscr{D}).$$

ユニタリ変換 $\varphi(r) \mapsto (2r)^{(n-2)/4}\, \varphi\big(\sqrt{2r}\,\big)$ によって，

$$L^2\big((0,+\infty),\, r^{n-1}\, dr\big) \longleftrightarrow L^2\big((0,+\infty),\, dr\big).$$

さらに，ユニタリ変換 $\psi(r) \mapsto r^{(2m+n-2)/4}\, \psi(r)$ によって，

$$L^2\big((0,+\infty),\, dr\big) \longleftrightarrow L^2\big((0,+\infty),\, r^{1-m-\frac{n}{2}}\, dr\big).$$

途中の $L^2\big((0,+\infty),\, dr\big)$ においては，$\mathscr{J}_m$ に対応する積分変換 $\mathscr{J}^0_m$ は

$$\mathscr{J}^0_m \psi(r) = i^{-m} e^{-in\pi/4} \int_0^{+\infty} \psi(s)\, J_{m+\frac{n}{2}-1}\big(2\sqrt{rs}\,\big)\, ds.$$

注意 4.10.　一般に，Bessel 函数 J_λ による積分変換

$$\psi(r) \mapsto \int_0^{+\infty} \psi(s)\, J_\lambda\big(2\sqrt{rs}\,\big)\, ds$$

は **Hankel 変換**と呼ばれ，Laguerre 函数 ℓ^λ_k が固有値 $(-1)^k$ に対応する固有函数．ただし，$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\ell^\lambda_k(t) := \sqrt{\frac{2^{\lambda+1}\, k!}{\Gamma(k+\lambda+1)}}\, e^{-t}\, t^{\lambda/2}\, L^\lambda_k(2t), \quad L^\lambda_k(t) := \frac{e^t\, t^{-\lambda}}{k!} \frac{d^k}{dt^k}\big(e^{-t}\, t^{k+\lambda}\big).$$

$L^\lambda_k(t)$ は k 次の **Laguerre 多項式**．

- $\{\ell^{\lambda-1}_k\}^\infty_{k=0}$ は $L^2((0,+\infty),\, dr)$ の ONB．
- $\mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D})$ の ONB として，

$$\gamma^\lambda_k(z) = 2^{\lambda-1} \sqrt{\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\,\Gamma(\lambda)}}\, \frac{1}{(z+i)^\lambda} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

- $\varphi^\lambda_k(t) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)^\lambda} \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k e^{-itx}\, dx$ とおくと，

補題 4.11.　$t < 0$ のとき $\varphi^\lambda_k(t) = 0$ であり，$t > 0$ のときは次式が成り立つ．

$$\varphi^\lambda_k(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^\lambda} \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda)}\, L^{\lambda-1}_k(2t)\, t^{\lambda-1}\, e^{-t}.$$

定理??の全射の部分の証明に補題??を用いる．$\gamma_k^\lambda(z)$ が実軸を含む領域 $\mathrm{Im} > -1$ において正則であることが証明を易しくする．一般の $f \in \mathsf{A}^\lambda(\mathscr{D})$ に対して，その実軸での「境界函数」$f^0 \in L^2(\mathbb{R})$ を L^2 極限によって定める必要があり，緻密な解析が必要になってくる．

結論　$L^2(\mathbb{R}^n) \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} L^2\big((0,+\infty),\ r^{n-1}\,dr\big) \otimes \mathscr{Y}_m$ は $G_2 \times SO(n)$ の無重複な既約分解を与えている．既約成分は $U_{m+\frac{n}{2}} \otimes T_m$ に同値．