§3. 球面調和函数と回転群の表現，Gelfand 対

Δ と直交群の作用は可換であるから，$T(g)\mathscr{H}_k \subset \mathscr{H}_k$ $(\forall g \in SO(n))$.
変数を S に制限して，$T(g)\mathscr{Y}_k \subset \mathscr{Y}_k$ $(\forall g \in SO(n))$.
ゆえに，$\mathscr{Y}_k$ に $SO(n)$ の**表現**$(T_k, \mathscr{Y}_k)$ を得る：$T_k(g) := T(g)\big|_{\mathscr{Y}_k}$.
すなわち，$g \mapsto T_k(g) \in GL(\mathscr{Y}_k)$ は群準同型.
$\mathscr{Y}_k \subset L^2(S)$ であり，S の標準測度は $SO(n)$ 不変であるから，$(T_k, \mathscr{Y}_k)$ は**ユニタリ表現**．すなわち，各表現作用素はユニタリ作用素[1]である.

$$\|T(g)Y\|_2^2 = \int_S \left|Y(g^{-1}\boldsymbol{u})\right|^2 d\sigma(\boldsymbol{u}) = \int \left|Y(\boldsymbol{u})\right|^2 d\sigma(\boldsymbol{u}) = \|Y\|_2^2.$$

定理 3.1. $SO(n)$ のユニタリ表現 $(T_k, \mathscr{Y}_k)$ はすべて既約で，互いに同値ではない.

定義 3.2. (1) 表現が**既約** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 不変な閉部分空間は $\{0\}$ か全体のみ[2].
(2) 群 G の二つの表現 (T_1, V_1), (T_2, V_2) が**同値**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 線型同型 $A : V_1 \to V_2$ が存在して，$AT_1(g) = T_2(g)A$ $(\forall g \in G)$.

定理 3.1 の非同値性の部分は，今の場合は $k \mapsto \dim \mathscr{Y}_k = \dim \mathscr{H}_k$ が狭義単調増加であることから従う.

• L：$SO(n)$ における $\boldsymbol{e}_n$ の固定部分群．$L \cong SO(n-1)$ であった.
$\dim \mathscr{Y}_k^L = 1 > 0$ であったことを思い出す.

定理 3.3. $SO(n)$ の既約ユニタリ表現 (T, V) で L 不変ベクトル，すなわち $v \neq 0$ s.t. $T(l)v = v$ $(\forall l \in L)$ を持つものは，ある k に対する $(T_k, \mathscr{Y}_k)$ と同値である.

したがって，$L^2(S) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k$ は $SO(n)$ の表現としては，**無重複**な既約分解である.
$\rightsquigarrow$ $(SO(n), L)$ は **Gelfand 対**である.

G：局所コンパクト群[3]（Hausdorff はつねに仮定），K：G の部分群.
Gelfand 対 (G, K) の定義をしようと思う：
G には**左 Haar 測度** μ が，正の定数倍を除いて一意的に存在する.
— 正則な Borel 測度（$\neq$ 零測度）で左不変，コンパクト集合の測度は有限.

---

[1]全射等長作用素．有限次元空間の場合は，等長であることから全射が出るが，無限次元だとそうではない．ただし，群準同型であることが先にわかると，$T(g^{-1})$ が $T(g)^{-1}$ になるから，全射であることがわかる.
[2]無限次元表現の場合も含めた定義．正確には，**位相的既約**という．ここでは，有限次元表現なので，すべての部分空間は閉集合であることに注意.
[3]コンパクト近傍が基本近傍系をなす.

— **Borel $\boldsymbol{\sigma}$-algebra** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合全体で生成される σ-algebra.
— **Borel 測度** $\overset{\text{def}}{\iff}$ Borel σ-algebra を定義域にする測度.
— Borel 測度が**正則** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 外正則かつ内正則

(あ) μ が**外正則** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の Borel 集合 E に対して $\mu(E) = \displaystyle\inf_{\substack{U \supset E \\ U\,\text{は開集合}}} \mu(U)$.

(い) μ が**内正則** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の Borel 集合 E に対して $\mu(E) = \displaystyle\sup_{\substack{K \subset E \\ K\,\text{はコンパクト}}} \mu(K)$.

— **左不変** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の Borel 集合 E と任意の $g \in G$ に対して，$\mu(gE) = \mu(E)$.

注意 3.4. 全空間が σ コンパクトでないときは上の内正則性の要求は強過ぎる.

$L^1(G)$：左 Haar 測度 μ に関する L^1 空間.
$L^1(G)$ には**たたみ込み**がある（左移動の積分)：

$$f_1 * f_2(x) := \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x)\, dy = \int_G f_1(y) \big(L_y f_2\big)(x)\, dy.$$

$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度のときと同様に，$f_1, f_2 \in L^1(G) \implies f_1 * f_2 \in L^1(G)$.
かくして，$L^1(G)$ に結合的で双線型な積が導入された.

定義 3.5. $L^1(G/\!/K) := \{f \in L^1(G)\ ;\ L_k f = R_k f = f\ \ (\forall k \in K)\}$.

$L^1(G/\!/K)$ に属する函数を**両側 $\boldsymbol{K}$ 不変**な可積分函数という.
同様に，台がコンパクトな G 上の連続函数の空間を $C_c(G)$ で表し，その中で両側 K 不変な函数がなす部分空間を $C_c(G/\!/K)$ で表す.

- 一般に，連続準同型 $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，

$$\mu(Eg) = \Delta_G(g)\mu(E) \quad (\forall g \in G, \forall E：\text{Borel 集合}).$$

- $\mathbb{R}_{>0}$ のコンパクト部分群は $\{1\}$ のみ．ゆえに，$\Delta_G\big|_K$ は K 上恒等的に 1.
- $L^1(G/\!/K)$ は $L^1(G)$ の閉部分空間であって，たたみ込みで閉じている.

定義 3.6. (G, K)：**Gelfand 対** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $L^1(G/\!/K)$ におけるたたみ込みが可換.

定理 3.7 (Gelfand). G の連続自己同型 θ で，$\theta^2 = 1$ をみたし，かつ

$$\theta(x) \in Kx^{-1}K \qquad (\forall x \in G)$$

をみたすものが存在すれば，(G, K) は Gelfand 対である.

証明を始める前に：

- (G, K) が Gelfand 対ならば G は**ユニモジュラー**である．すなわち，Δ_G は恒等的に 1 である．したがって，次式が成り立つ.

$$\int_G f(x^{-1})\,dx = \int_G f(x)\,dx.$$

- $f^\vee(x) := f(x^{-1})$ $(x \in G)$ とおく．

問 1　一般に，$f, g \in C_c(G)$ のとき，$(f^\vee * g^\vee) = (g * f)^\vee$.

定理 3.7 の証明　各 $f \in C_c(G)$ に対して，$f^\theta(x) := f(\theta(x))$ $(x \in G)$ とおく．θ は自己同型ゆえ，$C_c(G) \ni f \mapsto \int_G f^\theta(x)\,dx$ は左不変，すなわち，f を $L_a f$ $(a \in G)$ に置き換えても不変である．左 Haar 測度の一意性より，定数 $c > 0$ が存在して，

$$\int_G f^\theta(x)\,dx = c \int_G f(x)\,dx \qquad \big(\forall f \in C_c(G)\big)$$

が成り立つ．f の所に f^θ を代入することにより，$c = 1$ がわかる．よって，たたみ込みの定義式より，g も $C_c(G)$ に属するとき，

$$f^\theta * g^\theta(x) = \int_G f\left(\theta(y)\right) g\big(\theta(y)^{-1}\theta(x)\big)\;dy = (f * g)^\theta(x).$$

さて，$f \in C_c(G/\!\!/K)$ のとき，仮定より $f^\theta = f^\vee$ となる．これと問 1 より，

$$(f * g)^\theta = (f * g)^\vee = g^\vee * f^\vee = g^\theta * f^\theta = (g * f)^\theta.$$

これより $f * g = g * f$ を得るから，(G, K) は Gelfand 対である．　□

補題 3.8.　任意の $g \in SO(n)$ に対して，$\exists l_1, l_2 \in L$ s.t. $g = l_1 g^{-1} l_2$.

証明.　${}^t g = g^{-1}$ であるから，$g\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n \cdot g^{-1}\boldsymbol{e}_n = g^{-1}\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n$ を得る．しかも $\|g\boldsymbol{e}_n\| = \|g^{-1}\boldsymbol{e}_n\| = 1$ ゆえ，ともに $\boldsymbol{e}_n$ を極とする等緯度集合に属する．よって，$\exists l_1 \in L$ s.t. $g\boldsymbol{e}_n = l_1(g^{-1}\boldsymbol{e}_n)$．ゆえに $l_2 := g l_1^{-1} g \in L$ となり，$l_1 g^{-1} l_2 = g$.　□

補題 3.8 は，θ を恒等写像として，定理 3.7 が対 $(SO(n), L)$ に対して成り立っていることを示している．ゆえに，$(SO(n), L)$ は Gelfand 対である．

一般の Gelfand 対 (G, K) に戻ろう．
$L^1(G/\!\!/K)$ はたたみ込みを積として，可換な代数である．
$C_b(G/\!\!/K)$：G 上の有界連続函数で，両側 K 不変なものがなすベクトル空間.

定理 3.9.　連続準同型 $\chi : L^1(G/\!\!/K) \to \mathbb{C}$ を考え，$\chi \neq 0$ とする．このとき，函数 $\omega \in C_b(G/\!\!/K)$ が一意的に存在して，次式が成り立つ.

$$\chi(f) = \int_G f(x)\omega(x)\,dx \qquad \big(\forall f \in L^1(G/\!\!/K)\big).$$

以下，各 $\omega \in C_b(G/\!/K)$ に対して，

$$\chi_\omega(f) := \int_G f(x)\omega(x)\,dx \qquad (f \in L^1(G/\!/K)).$$

定義 3.10. $\omega \in C_b(G/\!/K)$ が Gelfabd 対 (G,K) の**帯球函数**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ χ_ω が非自明な連続準同型 $L^1(G/\!/K) \to \mathbb{C}$ を与える.

次の定理では，コンパクト部分群 K の Haar 測度[4]を $\int_K dk = 1$ と正規化しておく.

定理 3.11. $\omega \in C_b(G/\!/K)$，$\omega \neq 0$ に対して[5]，次の (1)〜(3) は同値である.

(1) ω は帯球函数である.

(2) ω は次の**積公式**をみたす： $\displaystyle\int_K \omega(xky)\,dk = \omega(x)\omega(y) \quad (x, y \in G)$.

(3) $\omega(e) = 1$ であって，各 $f \in C_c(G/\!/K)$ に対して $\lambda_\omega(f) \in \mathbb{C}$ が存在して，次式がが成り立つ.

$$f * \omega = \lambda_\omega(f)\omega.$$

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) 各 $\omega \in C_b(G/\!/K)$ に対して，$\Phi_\omega : C_c(G) \to \mathbb{C}$ を

$$\Phi_\omega(f) := \int_G f(x)\omega(x)\,dx \qquad \bigl(f \in C_c(G)\bigr)$$

によって定義する．Φ_ω を $C_c(G/\!/K)$ に制限したものが χ_ω である．このとき，任意の $f, g \in C_c(G)$ に対して，Fubini の定理より，

$$\Phi_\omega(f * g) = \int_G \int_G f(y)\,g(y^{-1}x)\,\omega(x)\,dydx = \int_G \int_G f(y)\,g(x)\,\omega(yx)\,dxdy$$

が成り立つ．ここで，各 $f \in C_c(G)$ に対して，

$$f^\sharp(x) := \int_K \int_K f(k_1 x k_2)\,dk_1 dk_2 \qquad (x \in G)$$

とおくと，$f^\sharp \in C(G/\!/K)$ であるから，(1) を仮定していることより，

$$\begin{aligned}
0 &= \chi_\omega(f^\sharp * g^\sharp) - \chi_\omega(f^\sharp)\chi_\omega(g^\sharp) = \Phi_\omega(f^\sharp * g^\sharp) - \Phi_\omega(f^\sharp)\Phi_\omega(g^\sharp) \\
&= \int_G \int_G \bigl\{\omega(xy) - \omega(x)\omega(y)\bigr\} f^\sharp(x)\,g^\sharp(y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

この右辺において $f^\sharp$, $g^\sharp$ の定義式を代入し，次いで x についての積分，y についての積分のそれぞれにおいて変数変換を行うと，ω が両側 K 不変であることから，次式を得る.

[4] $\Delta_K(K)$ が $\mathbb{R}_{>0}$ のコンパクト部分群であり，それは $\{1\}$ に等しいから，コンパクト群はユニモジュラーであることに注意.

[5] 拙著定理 9.6.15 では $\omega \neq 0$ が落ちている.

$$\int_G \int_G \left[\int_K \omega(xky)\, dk - \omega(x)\omega(y) \right] f(x) g(y)\, dxdy = 0.$$

これより，(1) が結論される[6].

(2) $\Longrightarrow$ (3) $f \in C_c(G/\!/K)$ とすると，(2) の積公式により，

$$\begin{aligned} f * \omega(x) &= \int_G f(y)\omega(y^{-1}x)\, dy = \int_K \int_G f(k^{-1}y)\omega(y^{-1}kx)\, dydk \\ &= \int_G f(y) \left[\int_K \omega(y^{-1}kx)\, dk \right] dy = \omega(x) \int_G f(y)\omega(y^{-1})\, dy. \end{aligned}$$

したがって，$\lambda_\omega(f) := \displaystyle\int_G f(y)\omega(y^{-1})\, dy$ として，(3) を得る．さらに，(2) の積公式において $x = y = e$ とおくと $\omega(e) = \omega(e)^2$ を得るので，$\omega(e) = 0, 1$ である．$\omega(e) = 0$ ならば，積公式より $\omega(x) = 0$ $(\forall x \in G)$ となるので，$\omega(e) = 1$ である．

(3) $\Longrightarrow$ (1) $\omega(e) = 1$ であり，G はユニモジュラーであるから，$\forall f \in C_c(G/\!/K)$ に対して先に現れた $f^\vee$ を用いると，

$$\lambda_\omega(f) = f * \omega(e) = \int_G f(y)\omega(y^{-1})\, dy = \int_G f^\vee(x)\omega(x)\, dx.$$

ゆえに，$\lambda_\omega(f^\vee) = \chi_\omega(f)$．ここで $f, g \in C_c(G/\!/K)$ のとき，仮定した (3) より，

$$\lambda_\omega(f * g)\omega = f * (g * \omega) = \lambda_\omega(g) f * \omega = \lambda_\omega(f)\lambda_\omega(g)\omega.$$

これより，$\lambda_\omega(f * g) = \lambda_\omega(f)\lambda_\omega(g)$ を得る．ゆえに，問 1 より，

$$\chi_\omega(f * g) = \lambda_\omega((f * g)^\vee) = \lambda_\omega(g^\vee * f^\vee) = \lambda_\omega(g^\vee)\lambda_\omega(f^\vee) = \chi_\omega(f)\chi_\omega(g). \qquad \square$$

Gelfand 対 $(SO(n), L)$ の帯球函数を求めよう．$P_k^\lambda(t)$ を k 次の超球多項式とし，各 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\varphi_k(x) := P_k^{(n-2)/2}(x\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n) \qquad \bigl(x \in SO(n)\bigr)$$

とおく．明らかに $\varphi_k \in C\bigl(SO(n)/\!/L\bigr)$，かつ $\varphi_k(I) = 1$ である．

定理 3.12. Gelfand 対 $(SO(n), L)$ の帯球函数は φ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ですべて．

証明. まず，φ_k が帯球函数であることを示そう．$f \in C\bigl(SO(n)/\!/L\bigr)$ とする．このとき，$f * \varphi_k \in C\bigl(SO(n)/\!/L\bigr)$ である．さらに，$S \approx SO(n)/L$ 上の連続函数 f_0 を $f_0(x\boldsymbol{e}_n) := f(x)$ $(x \in SO(n))$ によって定義すると，f_0 は L 不変である．さらに $x \in SO(n)$ のとき，

[6] 拙著 p.164 の①から下 2 行は字句の修正が必要である．

$$
\begin{aligned}
f * \varphi_k(x) &= \int_{SO(n)} f(y) P_k^{(n-2)/2}(y^{-1}x\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n)\, dy \\
&= \frac{1}{\sigma(S)} \int_S f_0(\boldsymbol{v}) P_k^{(n-2)/2}(x\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{v})\, d\sigma(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}
$$

したがって，$\psi_0(x\boldsymbol{e}_n) := f * \varphi_k(x)$ $(x \in SO(n))$ によって S 上の連続函数 ψ_0 を定義すると，L 不変である．$\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$ のとき，

$$
\psi_0(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sigma(S)} \int_S f_0(\boldsymbol{v}) P_k^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\sigma(\boldsymbol{v}).
$$

ここで，直交射影 $L^2(S) \to \mathscr{Y}_k$ が

$$
\frac{d_k}{\sigma(S)} \int F(\boldsymbol{v}) P_k^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\sigma(\boldsymbol{v}) \qquad (F \in L^2(S))
$$

で表されれることに注意する[7]と，$\psi_0 \in \mathscr{Y}_k$ であることがわかり，したがって，$\psi_0 \in \mathscr{Y}_k^L$ となる．ゆえに，$\psi_0(\boldsymbol{u})$ は $P_k^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_n)$ の定数倍．すなわち，$f * \varphi_k = \chi_k(f)\varphi_k$ $(\chi_k(f) \in \mathbb{C})$ である．しかも $\varphi_k(I) = 1$ ゆえ，定理 3.11 より，φ_k は帯球函数である．

逆に，$\omega \in C\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ を帯球函数とする．このとき $\omega(I) = 1$ であり，任意の $f \in C\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ に対して

$$
f * \omega = \lambda_\omega(f)\omega \quad \cdots\cdots \text{①}
$$

が成り立つ．ここで，λ_ω はたたみ込み代数 $L^1\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ から $\mathbb{C}$ への非自明な連続準同型である．さて，仮に $\lambda_\omega(\varphi_k) = 0$ $(\forall k = 0, 1, 2, \ldots)$ であったとしよう．$L^2\big(SO(n)/\!\!/L\big) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}\varphi_k$ であり,．Schwarz の不等式から得られる評価

$$
\int_{SO(n)} |\, f(x) \,|\, dx \leqq \left(\int_{SO(n)} |\, f(x) \,|^2\, dx \right)^{1/2} \qquad \big(f \in L^2(SO(n))\big)
$$

より $L^2\big(SO(n)\big) \subset L^1\big(SO(n)\big)$ であり，L^2 ノルムによる収束から L^1 ノルムによる収束が導かれる．したがって，すべての $f \in L^2\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ に対して $\lambda_\omega(f) = 0$ となる．$L^2\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ は $L^1\big(SO(n)/\!\!/L\big)$ において稠密であるから $\lambda_\omega = 0$ を得て，λ_ω は自明な準同型となってしまう．よって，ある k に対して $\lambda_\omega(\varphi_k) \neq 0$ である．一方，①より，

$$
\lambda_\omega(\varphi_k)\omega = \varphi_k * \omega = \omega * \varphi_k = \lambda_{\varphi_k}(\omega)\varphi_k \in \mathbb{C}\varphi_k.
$$

$\lambda_\omega(\varphi_k) \neq 0$ ゆえ $\omega \in \mathbb{C}\varphi_k$ となり，I における値を比べて，$\omega = \varphi_k$ を得る． □

[7]部分空間 $\mathscr{Y}_k$ の再生核が $\dfrac{d_k}{\sigma(S)} P^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ で与えられることによる．