## §2. 調和多項式と球面調和函数

$\mathscr{P} := \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$：$\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}$ 値多項式函数全体のなすベクトル空間.

$\mathscr{P}_k := \mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{P}$：$k$ 次斉次多項式函数全体のなす部分空間.

すなわち，$p \in \mathscr{P}_k \iff p(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \ (c_\alpha \in \mathbb{C})$.

明らかに単項式 $\boldsymbol{x}^\alpha$ $(|\alpha| = k)$ は $\mathscr{P}_k$ の基底をなす.

$\therefore \dim \mathscr{P}_k = {}_n\mathrm{H}_k = {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$.

各 $p, q \in \mathscr{P}$ に対して，$(p\,|\,q) := \left[p\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\overline{q}\right](\mathbf{0})$ とおき，これを **Fischer 内積**と呼ぶ.

$p, q \in \mathscr{P}_k$ のとき，$(p\,|\,q) = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! c_\alpha \overline{c'_\alpha}$ となる．これより，Fischer 内積が実際 $\mathscr{P}$ に内積を定めていること，および $k \neq l$ ならば $\mathscr{P}_k \perp \mathscr{P}_l$ となっていることがわかる.

$\Delta$：$\mathbb{R}^n$ の Laplacian，すなわち $\Delta := \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

$\mathscr{H} := \{p \in \mathscr{P} \,;\, \Delta p = 0\}$：**調和多項式**の空間，$\mathscr{H}_k := \mathscr{H} \bigcap \mathscr{P}_k$.

以下，$r := \|\boldsymbol{x}\|$ とおき，

$$r^2\mathscr{P}_k := \{p \in \mathscr{P}_{k+2} \,;\, p(\boldsymbol{x}) = r^2 q(\boldsymbol{x}) \ \text{ for some } q \in \mathscr{P}_k\}.$$

**補題 2.1.** $(k \geqq 2)$ $\mathscr{P}_k = \mathscr{H}_k \oplus r^2\mathscr{P}_{k-2}$ （Fischer 内積に関する直交直和）.

**証明.** まず $p, q \in \mathscr{P}_k$ のとき，$(p\,|\,q) = p\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\overline{q}$ に注意（$\mathbf{0}$ で値を取る必要がない）．さて，$p \in \mathscr{P}_k$，$q \in \mathscr{P}_{k-2}$ とする．このとき，

$$(r^2 q\,|\,p) = \left(\Delta q\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\right)\overline{p} = \left(q\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\Delta\right)\overline{p} = (q\,|\,\Delta p).$$

ゆえに，$r^2 : \mathscr{P}_{k-2} \to \mathscr{P}_k$ の共役作用素は $\Delta : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{k-2}$ に等しい．したがって，

$$\mathscr{H}_k = \mathrm{Ker}\,(\Delta : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{k-2}) = (r^2\mathscr{P}_{k-2})^\perp. \qquad \square$$

**系 2.2.** $\dim \mathscr{H}_k = \dfrac{(2k+n-2)(n+k-3)!}{(n-2)!\ k!}$ $(k = 0, 1, \dots)$.

$n \geqq 3$ のとき，これは $k$ について狭義単調増加である.

**証明.** $k \geqq 2$ のとき，

$$\dim \mathscr{H}_k = \dim \mathscr{P}_k - \dim \mathscr{P}_{k-2} = \frac{(2k+n-2)(n+k-3)!}{(n-2)!\,k!}.$$

そして，右辺 $= \begin{cases} 1 = \dim \mathscr{P}_0 = \dim \mathscr{H}_0 & (k = 0), \\ n = \dim \mathscr{P}_1 = \dim \mathscr{H}_1 & (k = 1). \end{cases}$ $\square$

**定理 2.3.** $l = [k/2]$ とする．このとき，

$$\mathscr{P}_k = \mathscr{H}_k \oplus r^2\mathscr{H}_{k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2l}\mathscr{H}_{k-2l} \quad \text{（Fischer 内積についての直交直和）}.$$

**証明.** $\mathscr{P}_k$ が $r^{2j}\mathscr{H}_{k-2j}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ の代数的直和であることはすぐにわかる．$i \neq j$ のとき，$r^{2i}\mathscr{H}_{k-2i} \perp r^{2j}\mathscr{H}_{k-2j}$ を示す必要がある．帰納法によるが，細かい計算になるので講義では省略． □

**系 2.4.** $l := [k/2]$ とする．$\forall p \in \mathscr{P}_k$ に対して，$\exists q \in \bigoplus_{j=0}^{l} \mathscr{H}_{k-2j}$ s.t. $p\big|_S = q\big|_S$.

**証明.** 定理 2.3 より，

$$p = q_k + r^2 q_{k-2} + \cdots + r^{2l} q_{k-2l} \qquad (q_j \in \mathscr{H}_j,\ l = [k/2]).$$

$q := q_k + q_{k-2} + \cdots + q_{k-2l}$ とおくとよい． □

**定義 2.5.** $\mathscr{Y}_k := \left\{ h\big|_S \,;\, h \in \mathscr{H}_k \right\}$. $\mathscr{Y}_k$ を $k$ 次の**球面調和函数**の空間という．

- $\mathscr{H}_k \ni h \mapsto h\big|_S \in \mathscr{Y}_k$ は全単射である． $\because h \in \mathscr{H}_k \implies h(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^k \cdot h\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big)$.
- **極座標** 本講義では，$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{u}$ $(r > 0,\ \boldsymbol{u} \in S)$ の形で十分．

このとき，Laplacian$\Delta$ を極座標で表すと，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda. \quad \cdots\cdots \text{①}$$

ここで，$\Lambda$ は $S$ 上の **Laplace–Beltrami 作用素**と呼ばれる作用素．ただし，$\Lambda$ の具体的な表示式は本講義では用いない．

- また，$\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度は，極座標によって，次のように変換される．

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{+\infty} \left( \int_S f(r\boldsymbol{u})\,d\sigma(\boldsymbol{u}) \right) r^{n-1} dr.$$

$\sigma$ を $S$ 上の**標準測度**と呼ぶ．

- $\sigma(S) = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ である．ただし，$\Gamma$ は**ガンマ函数**で，次で定義される函数．

$$\Gamma(y) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1}\,dt \qquad (y > 0).$$

- $\sigma$ は直交変換によって不変（Lebesgue 測度が直交変換によって不変であるから）．

$$\int_S f(g\boldsymbol{u})\,d\sigma(\boldsymbol{u}) = \int_S f(\boldsymbol{u})\,d\sigma(\boldsymbol{u}) \qquad (\forall g \in O(n)).$$

以下，$\sigma$ を $S$ 上の標準測度とし，$L^2(S) := L^2(S, \sigma)$ を考える．
$L^2(S)$ の内積を $(p \,|\, q)_2$ で表す．

次に進む前に，$\mathscr{H}$ における Fischer 内積を積分で表示しよう．

**命題 2.6.** $h_1, h_2 \in \mathscr{H}$ のとき，

$$(h_1 \,|\, h_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h_1(\boldsymbol{x})\, \overline{h_2(\boldsymbol{x})}\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, d\boldsymbol{x}.$$

**証明.** $h_1\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)\overline{h}_2 \in \mathscr{H}$ であるから，Hecke 等式（定理 1.9）の (1) を $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ において適用して，

$$(h_1 \,|\, h_2) = h_1\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)\overline{h_2}(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{h_1\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)\overline{h_2}(\boldsymbol{x})\Big\} e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, d\boldsymbol{x}.$$

部分積分を実行することにより，右辺は

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{h_2(\boldsymbol{x})} \Big\{h_1\Big(-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\Big\} d\boldsymbol{x}.$$

Hecke 等式の (2) を用いると，証明すべき等式の右辺になる． □

**例 2.7.** $h_1(\boldsymbol{x}) = h_2(\boldsymbol{x}) = D(\boldsymbol{x})$（差積）とすると，$D\Big(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)D = 1! \cdot 2! \cdots n!$ より，次の非自明な積分公式を得る．

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2} \prod_{k>j} (x_k - x_j)^2\, d\boldsymbol{x} = (2\pi)^{n/2} \cdot 1! \cdot 2! \cdots n!.$$

この定積分やその一般化については，Andrews-Askey-Roy の Special Functions や Mehta の Random Matrices を参照．

**命題 2.8.** $j \neq k$ のとき，$L^2(S)$ において $\mathscr{Y}_j \perp \mathscr{Y}_k$ である．

**証明.** $Y_j \in \mathscr{Y}_j$, $Y_k \in \mathscr{Y}_k$ とし，$h_j \in \mathscr{H}_j$, $h_k \in \mathscr{H}_k$ をとって $Y_j := h_j\big|_S$，$Y_k := h_k\big|_S$ とする．このとき，命題 2.6 より，

$$\begin{aligned}
(h_j \,|\, h_k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h_j(\boldsymbol{x}) \overline{h_k(\boldsymbol{x})}\, e^{-\|\boldsymbol{x}\|^2/2}\, d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{(Y_j \,|\, Y_k)_2}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{+\infty} r^{j+k+n-1} e^{-r^2/2}\, dr \\
&= \frac{2^{-1+(j+k)/2}}{\pi^{n/2}} \Gamma\Big(\frac{1}{2}(j+k+n)\Big) \cdot (Y_j \,|\, Y_k)_2.
\end{aligned}$$

$j \neq k$ ならば $(h_j \,|\, h_k) = 0$ であるから，$(Y_j \,|\, Y_k)_2 = 0$ である． □

**注意 2.9.** Green の公式を用いても命題 2.8 を証明できる．

命題 2.8 の証明において，$j = k$ とすると，次の興味深い関係式を得る．

**命題 2.10.** $h_1, h_2 \in \mathscr{H}_k$ とし，$Y_1 := h_1\big|_S$, $Y_2 := h_2\big|_S$ とするとき，

$$(h_1 \,|\, h_2) = \frac{2^{k-1}}{\pi^{n/2}}\,\Gamma\Big(k + \frac{n}{2}\Big) \cdot (Y_1 \,|\, Y_2)_2.$$

**命題 2.11.** $\Lambda$ を $S$ 上の Laplace–Beltrami 作用素とする．このとき，各 $Y \in \mathscr{Y}_k$ は $\Lambda Y = -k(n+k-2)Y$ をみたす．

**証明.** $h \in \mathscr{H}_k$ をとって，$Y = h\big|_S$ とする．このとき，

$$h(r\boldsymbol{u}) = r^k\,Y(\boldsymbol{u}) \qquad (r > 0,\ \boldsymbol{u} \in S)$$

であるから，次式を得る．

$$0 = \Delta h(r\boldsymbol{u}) = k(k-1)r^{k-2}\,Y(\boldsymbol{u}) + \frac{k(n-1)}{r}\,r^{k-1}\,Y(\boldsymbol{u}) + r^{k-2}\,\Lambda Y(\boldsymbol{u}).$$

ゆえに，$\Lambda Y = -k(n+k-2)Y$ である． □

**定理 2.12.** $L^2(S) = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k$ （Hilbert 直和）．

**証明.** 命題 2.8 より，$f \in \Big[\displaystyle\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k\Big]^{\perp} \implies f = 0$ を示せばよい．

**証明に必要な事柄**

(1) $C(S)$ は $L^2(S)$ において稠密．

(2) $\forall g \in C(S)$ は，多項式$|_S$ の一様極限（Stone–Weierstrass の定理）．

(3) 多項式$\big|_S$ は球面調和函数の有限一次結合（系 2.4）．

(4) $S$ 上の一様収束 $\implies$ $L^2(S)$ における収束．

(1)∼(4) より，$\exists\{g_j\}$：球面調和函数の有限一次結合からなる列 s.t. $g_j \to f$ in $L^2(S)$．

このとき，$(f \,|\, f)_2 = \lim_{j\to\infty} (f \,|\, g_j)_2 = 0$ より，$f = 0$． □

• **Zonal harmonics** $\boldsymbol{e}_n = {}^t(0, \ldots, 0, 1) \in S$．

$L$：$SO(n)$ における $\boldsymbol{e}_n$ の固定部分群とすると，$L = \left(\begin{array}{c|c} SO(n-1) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$.

$\mathscr{Y}_k^L := \{Y \in \mathscr{Y}_k \,;\, Y(l\boldsymbol{u}) = Y(\boldsymbol{u})\ \ (l \in L,\ \boldsymbol{u} \in S)\}$．

$\mathscr{Y}_k^L$ に属する函数を $k$ 次の **zonal harmonics** という．

**定理 2.13.** $\dim \mathscr{Y}_k^L = 1$．

**証明.** $Y \in \mathscr{Y}_k^L$ とし，$h \in \mathscr{H}_k$ をとって $Y = h\big|_S$ とする．このとき，

$$h(l\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}) \ \ (l \in L,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n). \qquad \because h(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^k\, Y\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big).$$

定理 1.3 より，$Y(\boldsymbol{u}) = \sum_{m=0}^{k} a_m\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)^m$ $(a_m \in \mathbb{C})$ と書ける．函数系 $\{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)^m\}_{m=0}^{\infty}$ に $L^2(S)$ において Schmidt の直交化を施して，正規直交系 $\{Q_m\}_{m=0}^{\infty}$ を得る：

$$Q_m(\boldsymbol{u}) = \sum_{l=0}^{m} b_{ml}\,(u\cdot\boldsymbol{e}_n)^l \ \ (b_{lm} \in \mathbb{C}), \qquad (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)^m = \sum_{l=0}^{m} b'_{ml}\,Q_l(\boldsymbol{u}) \ \ (b'_{lm} \in \mathbb{C}).$$

このとき，$Y(\boldsymbol{u}) = \sum_{l=0}^{k} c_l\,Q_l(\boldsymbol{u})$ $(c_l \in \mathbb{C})$ となる．各 $Q_l$ が多項式の $S$ への制限との形をしているので，系 2.4 より，$Q_l \in \mathscr{Y}_0 \oplus \cdots \oplus \mathscr{Y}_l$ である．ここで，$Y \perp \mathscr{Y}_l$ $(l < k)$ であるから，$c_l = (f\,|\,Q_l)_2 = 0$ $(l < k)$．ゆえに，$f(\boldsymbol{u}) = c_k\,Q_k(\boldsymbol{u})$ である． □

**次の目標**　$\mathscr{Y}_k^L$ に属する函数を明示的に求めること．
すなわち，$\mathscr{Y}_k^L = \mathbb{C}\Phi$，かつ $\Phi(\boldsymbol{e}_n) = 1$ となる $\Phi$ を求めよう．ここでは，Schmit の直交化には固執しないで，微分方程式に持ち込む．
先ほどの計算より，$\exists\varphi(t) \in \mathbb{C}[t]$ s.t. $\Phi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)$ $(\boldsymbol{u} \in S)$．さらに $\Phi(\boldsymbol{e}_n) = 1$ より $\varphi(1) = 1$ である．一方，$\Phi \in \mathscr{Y}_k^L \subset \mathscr{Y}_k$ より，$S$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 $\Lambda$ に対して，

$$\Lambda\Phi = -k(k+n-2)\Phi.$$

Laplacian との関係 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\Lambda$ を思い出しておく．

**補題 2.14.**　函数 $\varphi$ は次の常微分方程式をみたす：

$$(1-t^2)\varphi''(t) - (n-1)\,t\,\varphi'(t) + k(k+n-2)\varphi(t) = 0 \quad \Big({}' = \frac{d}{dt}\Big).$$

**証明.**　詳細は省略．$F(\boldsymbol{x}) := \Phi\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big) = \varphi\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\boldsymbol{e}_n\Big) = \varphi\Big(\dfrac{x_n}{r}\Big)$ $(r := \|\boldsymbol{x}\|)$ とおくと，$F(r\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ $(\forall r > 0)$ である．ゆえに，$(\Delta F)\big|_S = \Lambda\Phi = -k(k+n-2)\Phi$．
左辺の $\Delta F$ を直接計算すると，

$$\Delta F(\boldsymbol{x}) = -(n-1)\frac{x_n}{r^3}\,\varphi'\Big(\frac{x_n}{r}\Big) + \Big[\frac{1}{r^2} - \frac{x_n^2}{r^4}\Big]\varphi''\Big(\frac{x_n}{r}\Big).$$

$\therefore (\Delta F)\big(\sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{e}_{n-1} + t\boldsymbol{e}_n\big) = (1-t^2)\varphi''(t) - (n-1)t\,\varphi'(t).$ □

$\varphi(t) = \psi\Big(\dfrac{1-t}{2}\Big)$ とおき，変数変換 $\dfrac{1-t}{2} = z$ を行うと，

$$z(1-z)\psi''(z) + \Big[\frac{n-1}{2} - (n-1)z\Big]\psi'(z) + k(k+n-2)\psi(z) = 0. \ \cdots\cdots \ ②$$

初期条件は $\psi(0)=1$ である．

**問 2**　Gauss の**超幾何微分方程式**

$$z(1-z)\,\frac{d^2y}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z\,]\,\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

を考える $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C})$．$\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ のとき，この微分方程式の解 $y=y(z)$ で開単位円板 $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|\,z\,|<1\}$ で正則，かつ $y(0)=1$ となるものが唯一つ存在することを，直接 $y=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ $(a_j\in\mathbb{C},\ a_0=1)$ より出発して示せ．

- 実際，$j\geqq 1$ のとき，$(\alpha)_j:=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1)$ とおくと，$a_j=\dfrac{(\alpha)_j\,(\beta)_j}{(\gamma)_j\,j!}$．

問 2 にいう一意解を $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ で表し，**Gauss の超幾何函数**と呼ぶ．

話を球面帯調和函数に戻そう．常微分方程式②は，③において，

$$\alpha=-k,\quad \beta=n+k-2,\quad \gamma=\frac{n-1}{2}$$

としたものである．このとき，$a_j=0$ $(\forall j\geqq k+1)$ かつ $a_k\neq 0$ であるから，$F\Big(-k,\,n{+}k{-}2,\,\dfrac{n{-}1}{2};\,z\Big)$ は $k$ 次の多項式である．ゆえに，次の補題を得る．

**補題 2.15.**　$\psi(z)=F\Big(-k,\,n+k-2,\,\dfrac{n-1}{2};\,z\Big)$.

**定義 2.16.**　$\lambda>-\dfrac{1}{2}$ に対して，

$$P_k^{\lambda}(t):=F\Big(-k,\,k+2\lambda\,,\lambda+\frac{1}{2};\,\frac{1-t}{2}\Big)$$

とおいて，$P_k^{\lambda}(t)$ を $k$ 次の**超球多項式** (**ultraspherical polynomial**) と呼ぶ．

**注意 2.17.**　$C_k^{\lambda}(t):=\dbinom{k{+}2\lambda{-}1}{k}P_k^{\lambda}(t)$ とおいて，$C_k^{\lambda}(t)$ を $k$ 次の **Gegenbauer 多項式**と呼ぶことも多い．

以上から，補題 2.14 の $\varphi(t)$ は $\varphi(t)=P_k^{(n-2)/2}(t)$ と表される．したがって，$\Phi(\boldsymbol{u})=P_k^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)$ である．定理の形にまとめると，

**定理 2.18.**　$\mathscr{Y}_k^{L_0}=\mathbb{C}P_k^{(n-2)/2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n)$.

**注意 2.19.**　(1) $n=2$ のとき，$P_k^0(t)=F\Big(-k,\,k,\,\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}(1{-}t)\Big)$ は Tchebycheff 多項式 $T_k(t)$ である．$T_k(t)$ は $T_k(\cos\theta)=\cos k\theta$ をみたす．
(2) $n=3$ のとき，$P_k^{1/2}(t)=F\Big(-k,\,k{+}1,\,1;\,\dfrac{1}{2}(1{-}t)\Big)$ は Legendre 多項式．