

確率解析のKdV方程式への応用について

九州大学大学院数理学研究院 谷口 説男 (TANIGUCHI Setsuo)

1 はじめに — 確率解析と偏微分方程式

\mathcal{L}^V を, 関数 $a^{ij}, b^i, V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$) から定まる \mathbb{R}^n 上の 2 階偏微分作用素とする;

$$\mathcal{L}^V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \partial_{x_i} + V.$$

ただし, $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$ とする. この微分作用素の定める熱方程式の初期値問題

$$\partial_t u = \mathcal{L}^V u, \quad u(x, 0) = f(x)$$

の解 $u(x, t)$ は, $\mathcal{L}^0 (V \equiv 0$ とした $\mathcal{L}^V)$ に付随する拡散過程 $\{P_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ により次のように表示できる.

$$u(x, t) = \int_{\mathcal{W}^n} f(w(t)) \exp\left(\int_0^t V(w(s)) ds\right) P_x(dw). \quad (1)$$

この表示に用いられた用語を説明しよう.

- \mathcal{W}^n は $[0, \infty)$ 上の \mathbb{R}^n 値連続関数の全体を表す; $\mathcal{W}^n = \{w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid w \text{ は連続}\}$.
- P_x は \mathcal{W}^n 上の確率測度であり, 以下の条件を満している.
 - (a) $P_x(\{w \in \mathcal{W}^n \mid w(0) = x\}) = 1$.
 - (b) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (\equiv コンパクトな台をもつ C^∞ 関数の全体) に対し,

$$M^\varphi(t) = \varphi(w(t)) - \int_0^t \mathcal{L}^0 \varphi(w(s)) ds$$

とおけば, $\{M^\varphi(t)\}_{t \geq 0}$ は, P_x -マルチンゲールである. すなわち, 任意の $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ と $u_1 < \dots < u_k \leq s < t$ に対し次が成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}^n} M^\varphi(t) g(w(u_1), \dots, w(u_k)) P_x(dw) = \int_{\mathcal{W}^n} M^\varphi(s) g(w(u_1), \dots, w(u_k)) P_x(dw).$$

表現式 (1) は, 確率論と偏微分方程式をつなぐ架け橋であり, 微分幾何学を含め偏微分方程式論的な考察を要する事例への確率論応用の基点となっている. このような対応の発見は, 1905 年の A. Einstein[3] によるガウス核

$$p_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

を用いたブラウン運動の定式化, もしくはそれに先立つ 1900 年の L. Bachelier[1] による株価とブラウン運動の対応の指摘にまで遡ることができる. 拡散過程と偏微分作用素の対応を厳密に示したのは A. Kolmogorov(1931 年, [12]) であるが, 彼の手法は非常に解析的なものであった. ブラウン運動で駆動されるニュートン方程式を導入し, 経路空間上の

力学系を用いて，上のような拡散過程との対応に確率論的な意味付けを与えたのは，伊藤清であった．非常に残念なことには，先生は2008年11月に文化勲章を受賞された直後にお亡くなりになられた．伊藤は，ブラウン運動に基く積分である確率積分を導入し，それに付随する連鎖定理を与える伊藤の公式を確立した．その仕事は，1942年に大阪大学が出版していた「全国紙上数学談話會」に邦文で発表された ([7])．1944年に帝國學士院記事 (Proc. Imperial Acad.) に英文によるものが発表されている ([8]) が，戦争のため，まとまったものが出版されるのは1951年を待たねばならなかった ([9]) ．

表現式 (1) は， $\int_0^t V(w(s))ds$ を作用積分に現れるスカラーポテンシャル項と見なせば，シュレディンガー作用素 \mathcal{L}^V に付随するプロパゲータのファインマン経路積分表示と酷似していることが見て取れる．このような対比を見出したのは M. Kac であり，彼に因んで，(1) のような表示を，Feynman-Kac の公式と呼んでいる．R. Feynman は Los Alamos での研究に巻き込まれていたため学位論文 (ファインマン経路積分論，1942年) の公表が遅れていた ([4, 5]) ．Kac がファインマン経路積分を知るのは，5年後のコーネル大学の物理コロキウムにおける Feynman の講演においてであった ([10]) ．太平洋を狭んで西と東で経路に関する積分論が，戦争のために公表が遅れるという同じ運命を辿ったのである．

ブラウン運動が数学的に厳密に定義さえるのは，1923年の N. Wiener の仕事 ([17]) においてである．Wiener の下で研究を行っていた R. Cameron と W. Martin は，1944年に $n = 1$ ， $V(x) = -x^2/2$ という特別な場合に，すなわち偏微分作用素 $\frac{1}{2}(d/dx)^2 - \frac{1}{2}x^2$ に対して，(1) の考察をおこなっている ([2]) ．彼らの論文は，経路空間での変数変換を初めて確立したものであった．

本報告では，(1) のような確率論的表示が，無反射ポテンシャル，一般化された無反射ポテンシャルや KdV 階層の τ 関数に対しても成り立つことを，確率論的な事実の解析学的，かつ直観的な解説を加えつつ紹介する．

2 準備

2.1 無反射ポテンシャル，一般化された無反射ポテンシャル

無反射ポテンシャル，一般化された無反射ポテンシャルの定義を再確認し，本報告の概要を述べよう．

$n \in \mathbb{N}$ に対し， $2n$ 個の正数 $\eta_j, m_j > 0$ ($\eta_i \neq \eta_j$ ($i \neq j$)) の組 $\{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n}$ を散乱データという．すべての散乱データの集まりを \mathcal{S} と表す．

$$\mathcal{S} = \left\{ \{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n} \mid n \in \mathbb{N}, \eta_j, m_j > 0, \eta_i \neq \eta_j (i \neq j) \right\}.$$

散乱データ $s = \{\eta_j, m_j\} \in \mathcal{S}$ に対し，

$$G_s(x) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j} e^{-(\eta_i + \eta_j)x}}{\eta_i + \eta_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

とおき，散乱データ s から定まる無反射ポテンシャル u_s を

$$u_s(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \det(I + G_s(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

と定義する．無反射ポテンシャルの全体を Ξ_0 とおく．

$$\Xi_0 = \{u_s \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

上では散乱データから無反射ポテンシャルを定めたが，散乱理論でよく知られているように，無反射ポテンシャル φ の定める Schrödinger 作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \varphi$$

から一意的に $s \in \mathcal{S}$ が定まり， $\varphi = u_s$ が成り立つ．この意味で， Ξ_0 と \mathcal{S} は同一視できる．

$$\Xi_0 \xleftrightarrow{\text{bijective}} \mathcal{S}$$

Marchenko[13] に従い， $a \in \mathbb{R}$ と $u_n \in \Xi_0$ が存在し， u_n が u に広義一様収束し，さらに

$$\text{Spec}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u_n\right) \subset [-a, \infty), \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つとき， $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を一般化された無反射ポテンシャルという．ただし $\text{Spec}(\dots)$ はスペクトルの全体を表す．一般化された無反射ポテンシャルの全体を Ξ と表す．Marchenko は，空間 Ξ において KdV 方程式の初期値問題を考察した ([13]) ．

2.2 ガウス確率測度

\mathcal{W}^1 を簡単のため \mathcal{W} と表す．すなわち

$$\mathcal{W} = \left\{ w: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid w \text{ は連続} \right\}.$$

\mathcal{W} 上の座標関数 $X(x): \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ を $X(x, w) = w(x)$ ($w \in \mathcal{W}$) と定義する．

$$\Sigma = \left\{ \sigma \mid \sigma \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の有限測度でコンパクトな台をもつ} \right\}$$

$$\Sigma_0 = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid \sigma = \sum_{j=1}^n c_j^2 \delta_{p_j} (\exists n \in \mathbb{N}, c_j > 0, p_j \in \mathbb{R}, p_i \neq p_j (i \neq j)) \right\}$$

とおく．ただし， δ_p は $p \in \mathbb{R}$ に集中したディラック測度を表す． $\sigma \in \Sigma$ に対し，次を満す \mathcal{W} 上の確率測度 P^σ が唯一つ存在する．

- (a) 各 $n \in \mathbb{N}$ ， $a_i \in \mathbb{R}$ ， $x_i \geq 0$ に対し， $\sum_{i=1}^n a_i X(x_i)$ は平均 0 の正規分布に従う．すなわち， $v = v(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n) > 0$ が存在し，

$$P^\sigma \left(\sum_{i=1}^n a_i X(x_i) \leq a \right) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-x^2/(2v)} dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (b) 次の等式が成り立つ．

$$\int_{\mathcal{W}} X(x)X(y) dP^\sigma = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\zeta(x+y)} - e^{\zeta|x-y|}}{2\zeta} \sigma(d\zeta), \quad x, y \geq 0.$$

後節 (4.3 節) で見えるように, $\sigma \in \Sigma_0$ ならば, P^σ は Ornstein-Uhlenbeck 過程を用いて構成できる. $\sigma \in \Sigma$ に対しては, $\text{supp } \sigma_n \subset \text{supp } \sigma$ となる $\sigma_n \in \Sigma_0$ を採れば, P^{σ_n} の弱*極限として P^σ を構成できる. 一意性は, (b) より

$$\frac{d}{dx} \int_{\mathcal{W}} X(x)^2 dP^\sigma = \int_{\mathbb{R}} e^{2\zeta x} \sigma(d\zeta), \quad x \geq 0$$

となり, 測度 σ のラプラス変換が決定されることより従う.

$$\mathcal{G} = \{P^\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$$

とおけば, 上の考察よりこれは Σ と同一視できる.

$$\mathcal{G} \xleftrightarrow{\text{bijective}} \Sigma.$$

3 ソリトン解の確率論的表示

\mathcal{G} を定義域とする写像 ψ を

$$\psi(P^\sigma)(x) = 4 \frac{d^2}{dx^2} \log \left(\int_{\mathcal{W}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x X(y)^2 dy \right) dP^\sigma \right), \quad x \geq 0$$

とおく. この写像を

$$\mathcal{G}_0 = \{P^\sigma \mid \sigma \in \Sigma_0\}$$

に制限すれば, Ξ_0 への全単射となる. 実際, これは次のようにして示される.

$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j^2 \delta_{p_j} \in \Sigma_0$$

とする. 一般性を失うことなく,

$$(i) |p_j| \leq |p_{j+1}| \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad \#\{|p_1|, \dots, |p_n|\} = n-m$$

$$(ii) j(1) < \dots < j(m) \text{ が存在し, } p_{j(\ell)} > 0, \quad p_{j(\ell)+1} = -p_{j(\ell)} \quad (\ell = 1, \dots, m)$$

が成り立つと仮定してよい. $0 < r_1 < \dots < r_{n-m}$ を, r に関する方程式

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{p_j^2 - r} + 1 = 0$$

の解とする.

$$\{p_{j(1)}, \dots, p_{j(m)}\} \cap \{\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-m}}\} = \emptyset$$

が成り立つ.

$$\eta_1 < \dots < \eta_m$$

を $p_{j(1)}, \dots, p_{j(m)}, \sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-m}}$ を小さいものから順に並べ直した列とする;

$$\{\eta_1 < \dots < \eta_m\} = \{p_{j(1)}, \dots, p_{j(m)}, \sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-m}}\}.$$

$m_i > 0$ を，次式で定義する．

$$m_i = \begin{cases} 2\eta_i \frac{c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2} \prod_{k \neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k \neq j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & (i = j(\ell)), \\ -2\eta_i \prod_{k \neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k=1}^n \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & (\text{その他}) \end{cases}$$

写像

$$\varphi : \Sigma_0 \rightarrow \mathcal{S}$$

を，この $\{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n}$ を用いて，

$$\varphi(\sigma) = \{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

と定義する．

定理 1 ([6, 15]). $P^\sigma \in \mathcal{G}_0$ ($\sigma \in \Sigma_0$) とする．

(i) 次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & 4 \log \left(\int_{\mathcal{W}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x X(y)^2 dy \right) dP^\sigma \right) \\ &= -2 \log \det \left(I + G_{\varphi(\sigma)}(x) \right) + 2 \log \det \left(I + G_{\varphi(\sigma)}(0) \right) - 2x \sum_{i=1}^n (p_i + \eta_i). \end{aligned}$$

(ii) $\psi(\mathcal{G}_0) \subset \Xi_0$ であり，さらに， $\psi(P^\sigma) = u_{\varphi(\sigma)}$ が成り立つ．

(iii) $\psi : \mathcal{G}_0 \rightarrow \Xi_0$ は全単射である．

定理の (i) より，

$$\psi(P^\sigma)(x) = 4 \frac{d^2}{dx^2} \log \left(\int_{\mathcal{W}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x X(y)^2 dy \right) dP^\sigma \right) = u_{\varphi(\sigma)}(x), \quad x \geq 0$$

となる．これと，無反射ポテンシャルの解析性をあわせれば， $\psi(P^\sigma) \in \Xi_0$ としてよい．定理の (ii) の主張はこの考察による．

4 定理 1 の証明—確率解析を振り返りながら

本節では，確率解析に関わる事実を確率論的な立場ではなくより解析学的直感に訴える形で振り返りながら，定理 1 の証明を概説する．さらに，その証明を利用して得られる定理の系を述べる (4.6 節)．

4.1 Wiener 測度 μ

\mathcal{W}^n 上の Wiener 測度 μ とは, つぎの性質を満たす \mathcal{W}^n 上の一意的な確率測度である; 任意の有界連続関数 $f: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 次式が成り立つ.

$$\int_{\mathcal{W}^n} f(w(t_1), \dots, w(t_m)) d\mu(w) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} f(y_1, \dots, y_m) \prod_{j=1}^m p(t_j - t_{j-1}, y_j - y_{j-1}) dy_1 \cdots dy_m.$$

ただし,

$$p(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2t}\right).$$

ブラウン運動の定式化に際し, このような測度の存在は既に Einstein[3] により示唆されていたともいえるが, 数学的厳密さをもってこの測度を定式化したのは Wiener[17] である. その定式化にちなんで, この測度を Wiener 測度と呼んでいる.

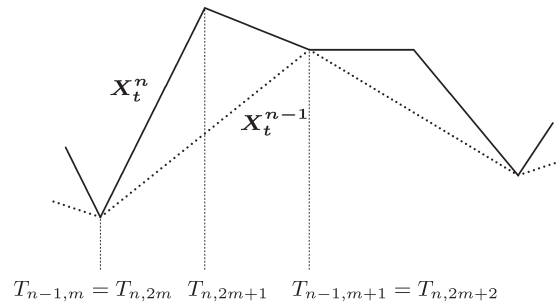
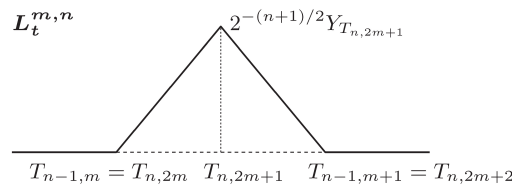
Wiener 測度の存在は, たとえば次のようにして証明できる. $Y_{m2^{-n}}$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, は確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の独立な確率変数で, それぞれ平均 0 分散 1 の正規分布に従うとする. $n \geq 1, m \geq 0$ に対し, $T_{n,m} = m2^{-n}$ とおき,

$$L_t^{m,n} = 2^{-(n+1)/2} \{1 - 2^n |t - T_{n,2m+1}|\} Y_{T_{n,2m+1}} \mathbf{1}_{[T_{n-1,m}, T_{n-1,m+1}]}(t)$$

とおく. 確率過程 $\{X_t^n\}_{t \in [0, \infty)}$, $n = 0, 1, \dots$, をつぎで定義する.

$$X_t^0 = \sum_{m=0}^{\infty} (t - m) Y_{m+1} \mathbf{1}_{[m, m+1]}, \quad X_t^n = X_t^{n-1} + \sum_{m=0}^{\infty} L_t^{n,m}, \quad n \geq 1.$$

このとき $\tilde{X}_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n$ が存在し, $\tilde{X}: \Omega \ni \omega \mapsto \tilde{X}_*(\omega) \in \mathcal{W}^1$ と定義すれば, $\mu(A) = P(\tilde{X} \in A)$ として, 1次元 Wiener 測度 μ が実現できる. 記号は繁雑であるが, 上の定義は連続関数の二進有理小数分点による折線近似に他ならないことが, 下の図から分るであろう. 多次元の場合はこれらの直積を考えればよい.



Wiener 測度を, Feynman 経路積分の視点で見直してみよう. $\Delta_j = t_j - t_{j-1}$, $\Delta w_j = y_j - y_{j-1}$ という変数変換を行えば,

$$\prod_{j=1}^m p(t_j - t_{j-1}, y_j - y_{j-1}) dy_1 \dots dy_m = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{|\Delta w_j|^2}{\Delta_j^2} \Delta_j\right) d\Delta w_1 \dots d\Delta w_m \quad (*)$$

と表記できる. $w \in \mathcal{W}^n$ は一般には微分不可能であるが, おおらかに微分の記号を流用すれば,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \frac{|\Delta w_j|^2}{\Delta_j^2} \Delta_j = \int |w'(s)|^2 ds$$

となる. よって, 仮想的な表記であるが, (*) は

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int |w'(s)|^2 ds\right) \prod_t dw(t)$$

に収束する. これらを踏まえて, Feynman 経路積分論に習って \mathcal{W}^n 上の仮想的なルベーク測度に関する積分

$$\mathcal{D}w = \prod_t dw(t)$$

を導入すれば,

$$\int_{\mathcal{W}^n} \Phi(w) d\mu(w) = \int \Phi(w) \exp\left(-\frac{1}{2} \int |w'(s)|^2 ds\right) \mathcal{D}w \quad (2)$$

という表示が得られる.

4.2 変数変換 / 確率積分

$\mathcal{D}w$ は仮想的なルベーク測度であったので, 次のような平行移動に対する変数変換が形式的に計算できる.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}^n} \Phi(w) d\mu(w) &= \int \Phi(w) \exp\left(-\frac{1}{2} \int |w'(s)|^2 ds\right) \mathcal{D}w \\ &= \int \Phi(w - \phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \int |(w - \phi)'(s)|^2 ds\right) \mathcal{D}w \\ &= \int_{\mathcal{W}^n} \Phi(w - \phi) \exp\left(\int \langle \phi'(s), w'(s) \rangle ds - \frac{1}{2} \int |\phi'(s)|^2 ds\right) d\mu(w) \end{aligned}$$

この表示式において, $\int \langle \phi'(s), w'(s) \rangle ds$ という項を数学的に正当化できれば, 最後の式は意味を持つ. この正当化は, 伊藤により導入された確率積分を通じて行うことが可能である. 実際, Stieltjes 積分風の

$$\int \langle \phi'(s), w'(s) \rangle ds = \int \langle \phi'(s), dw(s) \rangle$$

という表示が示唆するように, 確率積分を

$$\int_0^x \langle \theta(y), dw(y) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left\langle \theta(jT/2^n), \left\{ w((j+1)T/2^n) - w(jT/2^n) \right\} \right\rangle$$

と定義すれば，上の等式は数学的に厳密なものとなる．すなわち，時刻 x までの経路の情報 $\{w(y)\}_{y \leq x}$ のみに依存する関数 $\Phi : \mathcal{W}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を，その依存を明示的にするため

$$\Phi(w(y); y \leq x)$$

のように表記することにすれば，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}^n} \Phi(w(y); y \leq x) d\mu(w) \\ &= \int_{\mathcal{W}^n} \Phi\left(w(y) - \int_0^y \theta(z) dz; y \leq x\right) \exp\left(\int_0^x \langle \theta(y), dw(y) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x |\theta(y)|^2 dy\right) d\mu(w). \end{aligned} \quad (3)$$

これより特に，確率測度

$$\exp\left(\int_0^x \langle \theta(y), dw(y) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x |\theta(y)|^2 dy\right) d\mu(w)$$

のもと，

$$\left\{ w(y) - \int_0^y \theta(z) dz \right\}_{y \leq x}$$

がブラウン運動であることもしたがう．

これらの事実は，Girsanov-丸山の定理として知られている．

4.3 Ornstein-Uhlenbeck 過程

$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i^2 \delta_{p_i} \in \Sigma_0$ に付随する Ornstein - Uhlenbeck 過程 $\{\xi_\sigma(x)\}_{x \geq 0}$ を，

$$\xi_\sigma(x; w) = \int_0^x e^{(x-y)D_\sigma} dw(y) = w(x) + \int_0^x D_\sigma \xi_\sigma(y; w) dy$$

と定義する．ただし， D_σ は p_1, \dots, p_n を対角成分に持つ対角行列 $\text{diag}[p_j]$ を表す．成分毎に表示すれば，

$$\xi_\sigma^i(x) = \int_0^x e^{(x-y)p_i} dw^i(y) = w^i(x) + \int_0^x p_i \xi_\sigma^i(y) dy, \quad i = 1, \dots, n$$

となっている．

$$X_\sigma(x) = \langle \mathbf{c}, \xi_\sigma(x) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \xi_\sigma^i(x)$$

とおく．ただし， $\mathbf{c} = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$ ． $x \mapsto X_\sigma(x)$ の連続性により，写像 $X_\sigma : \mathcal{W}^n \ni w \mapsto X_\sigma(\cdot; w) \in \mathcal{W}$ を定義できる．Itô 積分の定義から，

$$\xi_\sigma(x; w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{D_\sigma x(1-k2^{-n})} \{w(x(k+1)2^{-n}) - w(xk2^{-n})\}$$

となる．各 $w(x(k+1)2^{-n}) - w(xk2^{-n})$ は平均 0，共分散行列 $x2^{-n}I$ (I は単位行列) の正規分布に従い， $w(x(k+1)2^{-n}) - w(xk2^{-n})$ ， $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ，独立となることより，正規分布の再生性に注意すれば，

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{D_\sigma x(1-k2^{-n})} \{w(x(k+1)2^{-n}) - w(xk2^{-n})\}$$

は平均 0，共分散行列

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2D_\sigma x(1-k2^{-n})} 2^{-n}$$

の正規分布に従う．よって， $n \rightarrow \infty$ とすれば， $\xi_\sigma(x)$ が平均 0，共分散行列 $\int_0^x e^{2(x-y)D_\sigma} dy$ の n 次元正規分布に従うことが分かる．これより， \mathcal{W} のボレル集合族を $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ と表せば，

$$P^\sigma(A) = \mu(X_\sigma \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{W})$$

が成り立つ．これにより，2.2 節で述べた P^σ の存在が $\sigma \in \Sigma_0$ に対しては示されたことになる．

以上より，次の等式が成り立つ．

$$\int_{\mathcal{W}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X(y)^2 dy\right) dP^\sigma = \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy\right) d\mu. \quad (4)$$

4.4 Itô の公式/変数変換

$\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ を， $n \times n$ 対称行列値 C^1 -関数とする．確率積分に関する連鎖定理である Itô の公式を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \alpha(x)w(x), w(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \langle \alpha'(y)w(y), w(y) \rangle dy + \int_0^x \langle \alpha(y)w(y), dw(y) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^x \text{tr} \alpha(y) dy \end{aligned} \quad (5)$$

という等式を得る．これは次のような考察から得られる．微小な Δx に対し，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \alpha(x + \Delta x)w(x + \Delta x), w(x + \Delta x) \rangle - \frac{1}{2} \langle \alpha(x)w(x), w(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \{\alpha(x + \Delta x) - \alpha(x)\}w(x + \Delta x), w(x + \Delta x) \rangle \\ & \quad + \langle \alpha(x)\{w(x + \Delta x) - w(x)\}, w(x + \Delta x) \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2} \langle \alpha(x)\{w(x + \Delta x) - w(x)\}, \{w(x + \Delta x) - w(x)\} \rangle \end{aligned}$$

と変形しよう． $w^i(x + \Delta x) - w^i(x)$ ， $i = 1, \dots, n$ ，はそれぞれ平均 0 分散 Δx の正規分布に従い，互いに独立であるから，

$$\int_{\mathcal{W}^n} \left(\{w^i(x + \Delta x) - w^i(x)\} \{w^j(x + \Delta x) - w^j(x)\} - \delta_{ij} \Delta x \right)^2 d\mu(w) = (1 + \delta_{ij})(\Delta x)^2$$

が成り立つので，この意味で，

$$\{w^i(x + \Delta x) - w^i(x)\}\{w^j(x + \Delta x) - w^j(x)\} \approx \delta_{ij}\Delta x$$

である．これを上の式に代入し， $\Delta x \rightarrow 0$ とすれば，(5) が得られる．

(5) を書き直せば

$$\int_0^x \langle \alpha(y)w(y), dw(y) \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha(x)w(x), w(x) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x \langle \alpha'(y)w(y), w(y) \rangle dy - \frac{1}{2} \int_0^x \text{tr} \alpha(y) dy$$

となる．この等式，さらに

$$w(y) = \left(w(y) - \int_0^y D_\sigma w(z) dz \right) + \int_0^y D_\sigma w(z) dz$$

という自明な表示，および

$$X_\sigma(y) = \langle \mathbf{c}, \xi_\sigma(y) \rangle$$

という定義に注意して，(3) を適用すれば，

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy\right) d\mu \\ &= \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x \langle \mathbf{c}, w(y) \rangle^2 dy\right) \exp\left(\int_0^x \langle D_\sigma w(y), dw(y) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x |D_\sigma w(y)|^2 dy\right) \mu(dw) \\ &= e^{-x \text{tr} D_\sigma / 2} \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x \langle E_\sigma w(y), w(y) \rangle dy + \frac{1}{2} \langle D_\sigma w(x), w(x) \rangle\right) \mu(dw) \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$E_\sigma = D_\sigma^2 + \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} = (c_i c_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

(5) に

$$-\frac{1}{2} \int_0^x \langle \gamma^2(y)w(y), w(y) \rangle dy = -\frac{1}{2} \int_0^x |\gamma(y)w(y)|^2 dy$$

を加えた自明な変形

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^x \langle (\gamma^2 + \gamma')(y)w(y), w(y) \rangle dy + \frac{1}{2} \langle \gamma(x)w(x), w(x) \rangle \\ &= \int_0^x \langle \gamma(y)w(y), dw(y) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x |\gamma(y)w(y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^x \text{tr} \gamma(y) dy \end{aligned}$$

を上式の式に代入すれば，もし γ が常微分方程式

$$\gamma^2 + \gamma' = E_\sigma, \quad \gamma(x) = D_\sigma \tag{6}$$

の解であれば，次のようになる．

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy\right) d\mu \\ &= e^{-x \text{tr} D_\sigma / 2} \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x \langle E_\sigma w(y), w(y) \rangle dy + \frac{1}{2} \langle D_\sigma w(x), w(x) \rangle\right) d\mu \\ &= e^{-x \text{tr} D_\sigma / 2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x \text{tr} \gamma\right) \times \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(\int_0^x \langle \gamma(y)w(y), dw(y) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^x |\gamma(y)w(y)|^2 dy\right) d\mu \\ &= e^{-x \text{tr} D_\sigma / 2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x \text{tr} \gamma\right). \end{aligned}$$

Cole-Hopf 変換により, $\gamma(y) = -(\phi'\phi^{-1})(x-y)$ により ϕ を定義すれば,

$$\phi'' - E_\sigma\phi = 0 \quad (7)$$

という常微分方程式を得る. これに, さらに

$$\phi(0) = I, \quad \phi'(0) = E_\sigma \quad (8)$$

という初期条件を付けて解けば, Cole-Hopf 変換と上の結果から,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy\right) d\mu &= e^{-x \operatorname{tr} D_\sigma / 2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{tr} \gamma\right) \\ &= (e^{x \operatorname{tr} D_\sigma} \det \phi(x))^{-1/2} \end{aligned}$$

となる.

初期条件 (8) のもと (7) を解けば,

$$\phi(y) = \cosh(yE_\sigma^{1/2}) - E_\sigma^{-1/2} \sinh(yE_\sigma^{1/2})D_\sigma$$

である. 定理の主張 (i) は, これを具体的に表示することにより, 証明される. 実際, もし $|p_i| < |p_{i+1}|$, $i = 1, \dots, n-1$, となっていれば,

$$\phi(y) = -\frac{1}{2} UVR^{-1}B\{I + G_{\varphi(\sigma)}(y)\}e^{yR}B^{-1}XC$$

となる ([6]). ただし,

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{diag}[|(D_\sigma^2 - r_j I)^{-1} \mathbf{c}|^{-1}], \\ R &= \operatorname{diag}[\eta_j], \\ a(i) &= \operatorname{sgn}\left[\prod_{\beta=1}^n (p_\beta - \eta_i)\right], \\ B &= \operatorname{diag}\left[a(i) \left\{-2\eta_i \frac{\prod_{\alpha \neq i} (\eta_\alpha^2 - \eta_i^2)}{\prod_{\beta=1}^n (p_\beta^2 - \eta_i^2)}\right\}^{1/2}\right], \\ X_{ij} &= (p_j + \eta_i)^{-1}, \\ C &= \operatorname{diag}[c_i]. \end{aligned}$$

これより定理 1 (i) が従う.

一般の場合は, 十分小さい $\varepsilon > 0$ をとり, $p_j^\varepsilon = p_j - \varepsilon \sum_{i=1}^m \delta_{j, \ell(i)+1}$ において上の表示を得, その後 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで主張 (i) を得る.

4.5 全単射-逆散乱理論

$u = u_s \in \Xi_0$ ($\mathbf{s} = \{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{S}$) とする. $e^+(x; \zeta)$ を, $\mathcal{L} = -(d/dx)^2 + u_s$ の右 Jost 解とする. すなわち,

$$\mathcal{L}e^+(*; \zeta) = \zeta^2 e^+(*; \zeta), \quad e^+(x; \zeta) \sim e^{i\zeta x} (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つとする．このとき， $\lambda_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ($1 \leq j \leq n$) が存在し，次式が成り立つ．

$$e^+(x; \zeta) = e^{\sqrt{-1}\zeta x} \prod_{j=1}^n \frac{\zeta - \sqrt{-1}\lambda_j(x)}{\zeta + \sqrt{-1}\eta_j}.$$

写像 $\kappa : \Xi_0 \rightarrow \Sigma_0$ を，

$$\kappa(s) = \sum_{j=1}^n (-\lambda_j'(0)) \delta_{\lambda_j(0)}$$

と定めれば，

$$\varphi(\kappa(s)) = s, \quad \kappa(\varphi(\sigma)) = \sigma$$

となる．これより， ψ が全単射であることが従う．詳しくは，[13, 15] を参照．

4.6 拡張

$u \in \Xi_0$ に対し， $\tilde{u}(x) = u(-x)$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，と定義すれば， $\tilde{u} \in \Xi_0$ である．前節の考察を利用すれば次のような表示を得る．

系 1. $\sigma \in \Sigma_0$ とする．

- (i) $\nu \in \Sigma_0$ を， $\nu((-\infty, a]) = \sigma([-a, \infty))$ ， $\forall a \in \mathbb{R}$ ，となるように定義される．このとき，

$$u_{\varphi(\sigma)}(x) = \psi(P^\nu)(-x), \quad x \in (-\infty, 0].$$

- (ii) $z \leq 0, w \in \mathcal{W}^n$ に対し， $w(z) := w(-z)$ と定義し，

$$\begin{aligned} \xi_\sigma(y) &= -e^{yD_\sigma} \int_y^0 e^{-zD_\sigma} dw(z), \\ X_\sigma(y) &= \langle \mathbf{c}, \xi_\sigma(y) \rangle, \quad y \leq 0 \end{aligned}$$

とおく．このとき，次式が成り立つ．

$$u_{\varphi(\sigma)}(x) = \psi(P^\sigma)(x) = 4 \frac{d^2}{dx^2} \left(\log \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{0 \wedge x}^{0 \vee x} X_\sigma(y)^2 dy\right) d\mu \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5 KdV 階層の τ 関数

本節では，KdV 階層の τ 関数の確率解析的表示について紹介する ([14] 参照)．

5.1 τ 関数

KdV 階層の τ 関数の定義を思い出そう．

$$\mathbb{T} = \{\vec{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \#\{j \mid t_j \neq 0\} < \infty\}$$

とおく． $x \in \mathbb{R}$ ， $\vec{t} \in \mathbb{T}$ に対し，

$$\zeta_i(x, \vec{t}) = x\eta_i + \sum_{\alpha=1}^{\infty} t_\alpha \eta_i^{2\alpha+1},$$

$$A(x, \vec{t}) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j} e^{-\{\zeta_i(x, \vec{t}) + \zeta_j(x, \vec{t})\}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

と定義する．ただし， $\{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{S}$ である．このとき，KdV 階層の τ 関数は，

$$\tau(x, \vec{t}) = \det(I + A(x, \vec{t}))$$

と定義される．

もし， $\vec{t} = (t, 0, \dots)$ ならば，関数

$$v(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau(x, \vec{t})$$

は次の KdV 方程式の解となる．

$$v_t = \frac{3}{2} v v_x + \frac{1}{4} v_{xxx}. \quad (9)$$

ただし， $v_t = \partial v / \partial t$ ， $v_x = \partial v / \partial x$ ， $v_{xxx} = \partial^3 v / \partial x^3$ である．

5.2 τ 関数の確率論的表示

$\sigma \in \Sigma_0$ ， $\{\eta_j, m_j\}_{1 \leq j \leq n} = \varphi(\sigma) \in \mathcal{S}$ とする．

$\phi(x, \vec{t}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を次のように定義する． $U \in O(n)$ を，

$$E_\sigma = UR^2U^{-1}$$

となるように選ぶ．ただし，4.4 節と同様に $R = \text{diag}[\eta_j]$ である．このとき

$$\phi(x, \vec{t}) = U \{ \cosh(\zeta(x, \vec{t})) - \sinh(\zeta(x, \vec{t})) R^{-1} U^{-1} D_\sigma U \} U^{-1}$$

とおく．

$$\beta_{\vec{t}} = -((\partial_x \phi) \phi^{-1})(0, \vec{t})$$

とし，

$$I_\sigma(x, \vec{t}) = \int_{\mathcal{W}^n} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy + \frac{1}{2} \left\langle (\beta_{\vec{t}} - D_\sigma) \xi_\sigma(x), \xi_\sigma(x) \right\rangle \right) d\mu$$

と定義する．この $I_\sigma(x, \vec{t})$ を用いて， τ 関数の確率表示を与えることができる．

定理 2. (i) 次の等式が成り立つ．

$$2 \log(I_\sigma(x, \vec{t})) = -\log \tau(x, \vec{t}) + \log \tau(0, \vec{t}) - x \sum_{i=1}^n (p_i + \eta_i).$$

(ii) $\vec{t} = (t, 0, \dots)$ とすれば，

$$v_\sigma(x, t) = -4 \partial_x^2 \log(I_\sigma(x, \vec{t}))$$

は KdV 方程式 (9) の n ソリトン解である．

5.3 証明の概要

$n \times n$ 行列値関数 $g : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ は, 方程式 (7)

$$g'' - E_\sigma g = 0$$

を満たし, さらに次の二つの条件を満たすと仮定しよう.

- (A1) $\det g(y) \neq 0$ ($y \in [0, x]$).
 (A2) $\beta(y) = -(g'g^{-1})(y)$ は対称行列である.

4.4 節で考察を繰り返すことでより一般に次のような表示式が得られる.

$$\int_{\mathcal{W}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x X_\sigma(y)^2 dy + \frac{1}{2} \langle (\beta(0) - D_\sigma)\xi_\sigma(x), \xi_\sigma(x) \rangle\right) d\mu \\ = (\det g(0))^{1/2} (e^{x \operatorname{tr} D_\sigma} \det g(x))^{-1/2}.$$

各 \vec{t} に対し, $g(y) = \phi(y, \vec{t})$ は, (A1), (A2) を満たしている. よって, 4.4 節と同様に, $\phi(y, \vec{t})$ の具体形を求め, この変換公式を用いて τ 函数との対応を示すことになる.

もし, $|p_i| < |p_{i+1}|$, $i = 1, \dots, n-1$ が成り立てば, 求める具体形は, 4.4 節の記号を用いて,

$$\phi(y, \vec{t}) = -\frac{1}{2} UR^{-1}VB\{I + A(y, \vec{t})\}e^{\zeta(y, \vec{t})}B^{-1}XC$$

となる. これより求める τ 函数との対応が従う. 一般の場合は, 4.4 節と全く同様の手法で証明することが可能である.

6 一般化された無反射ポテンシャル

6.1 一般化された無反射ポテンシャルの確率論的表示

u を一般化された無反射ポテンシャル ($u \in \Xi$) とする. すなわち, $a > 0$ と $u_n \in \Xi_0$ が存在し, u_n は u に広義一様収束し, さらに $\operatorname{Spec}(-(d/dx)^2 + u_n) \subset [-a, \infty)$, $n = 1, 2, \dots$, が成り立っているとする. \mathcal{G}_0 上の全単射

$$\psi : \mathcal{G} \supset \mathcal{G}_0 \ni P^\sigma \mapsto \psi(P^\sigma) \in \Xi_0 \subset \Xi$$

は次のように \mathcal{G} へと拡張できる.

定理 3. (i) $\sigma_n \in \Sigma_0$, $\sigma \in \Sigma$ ($n \in \mathbb{N}$) は次の 2 条件を満たすと仮定する.

- (a) σ_n は σ に漠収束する.
 (b) $\beta > 0$ が存在し, $\operatorname{supp} \sigma_n \subset [-\beta, \beta]$ ($n = 1, 2, \dots$) となる.

このとき, $\psi(P^{\sigma_n})$ は $\psi(P^\sigma)$ に広義一様収束し, さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し次式が成り立つ.

$$\operatorname{Spec}(-(d/dx)^2 + \psi(P^{\sigma_n})) \subset [-\beta^2 - \sigma(\mathbb{R}) - \varepsilon, \infty), \quad n \geq n_0.$$

- (ii) 各 $P^\sigma \in \mathcal{G}$ に対し, $[0, \infty)$ 上 $\psi(P^\sigma) = u$ となる $u \in \Xi$ が存在する.
 (iii) 各 $u \in \Xi$ に対し, $[0, \infty)$ 上 $u = \psi(P^\sigma)$ となる $P^\sigma \in \mathcal{G}$ が存在する.

定理についていくつかの注意を与えよう．

- (i) にあるような σ_n は $\sigma \in \Sigma$ が与えられれば，容易に構成できる．実際， $\beta > 0$ を $\text{supp } \sigma \subset [-\beta, \beta]$ となるように選び， σ_n を次のように定義すればよい．

$$\sigma_n = \sum_{j=-n}^n \left\{ \sigma \left(\left[\frac{j\beta}{n}, \frac{(j+1)\beta}{n} \right) \right) + \frac{1}{n} \right\} \delta_{j\beta/n}$$

- 一般化された無反射ポテンシャル $u \in \Xi$ は，無反射ポテンシャルのように解析性を持たないので，定理の (ii)，(iii) のように半直線 $[0, \infty)$ 上での一致だけが主張できる．しかし，このことから次のように構成すれば， ψ を全単射に拡張できることが分かる．

$\nu \in \Sigma$ を $\nu(A) = \sigma(-A)$ により定義する．

$$u^{(P^\sigma)}(x) = \begin{cases} \psi(P^\sigma)(x), & x \geq 0, \\ \psi(P^\nu)(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$

とおけば， $u^{(P^\sigma)} \in \Xi$ である．

逆に， $u \in \Xi$ に対し， $[0, \infty)$ 上 $u = \psi(P^\sigma)$ となる $P^\sigma \in \mathcal{G}$ を採れば， $u = u^{(P^\sigma)}$ となる．

このような意味で

$$\mathcal{G} \xleftrightarrow{\text{bijjective}} \Xi.$$

6.2 証明の概要

6.2.1 ブラウニアンシート

無反射ポテンシャルもしくは τ 函数の確率論的表示においては，対応する散乱データの次元に応じて実質的な考察を行う経路空間 \mathcal{W}^n を取り替えていた．無反射ポテンシャルの極限である一般化された無反射ポテンシャルを扱うには， \mathcal{W}^n をすべて含む空間が必要となる．このような要請に応える空間として

$$\mathbf{W} = \{W : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{連続かつ } st = 0 \text{ ならば } W(s, t) = 0\}$$

という2変数の連続関数の全体を導入する． \mathbf{W} 上に次を満す確率測度 P がただ一つ存在する．この確率測度をブラウニアンシート測度と呼ぶ．

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ ， $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ，および $s_i, t_j \geq 0$ に対し，線形和

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} W(s_i, t_j)$$

は，平均0の正規分布に従う．

- (b) 次の等式が成り立つ．

$$\int_{\mathbf{W}} W(s, t) W(u, v) dP = \min\{s, u\} \min\{t, v\}, \quad s, t, u, v \geq 0.$$

ブラウニアンシート測度 P の存在は，Wiener 測度を構成したのと同様の手法で証明できる．

6.2.2 ブラウニアンシートに対する Wiener 積分

$[0, \infty)^2$ 上のルベーク測度に関し自乗可積分な関数の全体を $L^2([0, \infty)^2)$ とし, P に関し自乗可積分な関数の全体を $L^2(P)$ と表す.

$$\mathcal{I}(\mathbf{1}_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]})(W) = \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} W(a_i, b_j), \quad W \in \mathbf{W}, 0 \leq a_i < b_i, i = 1, 2$$

と定義すれば, 前節のブラウニアンシート測度の性質 (b) より

$$\int_{\mathbf{W}} \{\mathcal{I}(\mathbf{1}_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]})\}^2 dP = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

となる. よって, \mathcal{I} は

$$\mathcal{I} : L^2([0, \infty)^2) \rightarrow L^2(P)$$

の等距離写像に拡張できる. この拡張も \mathcal{I} で表し, $h \in L^2([0, \infty)^2)$ に対する $\mathcal{I}(h)$ を

$$\int_{[0, \infty)^2} h(s, t) dW(s, t)$$

と表記する. これを h の Wiener 積分と呼ぶ.

6.2.3 P^{σ_n} を実現する X_{σ_n} の構成

$\sigma_n \in \Sigma_0$ は $\sigma \in \Sigma$ に漠収束し, さらに $\beta > 0$ が存在して, $\text{supp } \sigma_n \subset [-\beta, \beta]$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つとする.

$-a \leq b < -\beta$ なる $a > 0, b < 0$ を採る.

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{m_n} c_{n,j}^2 \delta_{p_{n,j}}$$

と表し,

$$q_{n,0} = b + a, \quad q_{n,k} = q_{n,0} + \sum_{j=1}^k |p_{n,j} - p_{n,j-1}|,$$

とおく. ただし $p_{n,0} = b$ とする. $h_n \in L^2([0, \infty)^2)$ を

$$h_n(s, t; y) = \sum_{j=1}^{m_n} \frac{e^{(y-t)p_{n,j}} c_{n,j}}{\sqrt{q_{n,j} - q_{n,j-1}}} \mathbf{1}_{[q_{n,j-1}, q_{n,j}] \times [0, y]}(s, t)$$

と定め,

$$X_{\sigma_n}(y; W) = \int_{[0, \infty)^2} h_n(s, t; y) dW(s, t)$$

と定義する. このとき

$$P^{\sigma_n}(A) = P(X_{\sigma_n} \in A)$$

となり, X_{σ_n} により P^{σ_n} が実現できる.

ブラウニアンシート測度が正規分布から定まることを用いた初等的な計算により，評価式

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbf{W}} \sup_{0 \leq y < z \leq x} \frac{|X_{\sigma_n}(y) - X_{\sigma_n}(z)|^{2m}}{|y - z|^{m-(3/2)}} dP < \infty, \quad x > 0, m \geq 2$$

を導出できる．この評価式から，確率測度の族の相対コンパクト性に関する条件が満されることがいえ，最終的に P^{σ_n} が P^σ に収束することがいえる． $\psi(P^{\sigma_n})$ の収束を示すにはもう少し詳細な評価が必要となるが，それも実質は上と同様の評価式として実現できる．

7 最後に

確率積分の行列式を用いた具体的な表現と，無反射ポテンシャルや τ 関数の行列式表現との対比を詳細に調べることで上のような確率解析的な表現が得られている．しかし，経路積分レベルでどのようなメカニズムが働いてこのような対比が起きているのかは全く解明できていない．偏微分方程式と確率解析との融合のような発展を望むには，この経路積分レベルでの対応の解明が急がれる．

References

- [1] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **17** (1900), 21–86.
- [2] R.H. Cameron and W.T. Martin, The Wiener measure of Hilbert neighbourhoods in the space of real continuous functions, J. Math. Phys. M.I.T., **23** (1944), 195–209.
- [3] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten teilchen, Ann. der Phys., **17** (1905), 549–560. (英訳) in “Investigations on the theory of Brownian movement” (R. Fürth ed.), Dover, 1956, (邦訳) 『アインシュタイン選集 1』, 湯川秀樹監修, 共立出版, 1971, に収録.
- [4] R. Feynman, A principle of least action in quantum mechanics, Princeton Univ. 学位論文, 1942.
- [5] R. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys., **20** (1948), 321–341. (J. Schwinger, Quantum electrodynamics, Dover, New York, 1958 に再録)
- [6] N. Ikeda and S. Taniguchi, Quadratic Wiener functionals, Kalman-Bucy filters, and the KdV equation, Adv. Studies Pure Math., **41** (2004), 167–187.
- [7] 伊藤清, 「Markoff過程ヲ定メル微分方程式」, 『全国紙上数学談話會』, **244** (1942), 1352–1400. <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/shijodanwakai/>にて公開されている.
- [8] K. Itô, Stochastic integral, Proc. Imperial Acad. Tokyo, **20** (1944), 519–524.
- [9] K. Itô, On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc., **4**, 1951.
- [10] M. Kac, Enigmas of chance, an autobiography, Harper & Row, 1985.

- [11] M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1951, 189–215.
- [12] A.N. Kolmogorov, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., **104** (1931), 149–160. (英訳) in “Selected works. II” (A.N. Shirayayev ed.), 62–108.
- [13] V.A. Marchenko, The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data, in: Zakharov, V.E. (Ed.) What is integrability? Springer-Verlag, New York, 1990, pp. 273–318.
- [14] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, Solitons, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [15] S. Taniguchi, Brownian sheet and reflectionless potentials, Stoch. Proc. Appl. **116** (2006), 293–309.
- [16] S. Taniguchi, Stochastic calculus and the KdV equation, Contemp. Math., 429 (2007), 245–256.
- [17] N. Wiener, Differential space, J. Math. Phys., **2** (1923), 131–174.