確率解析の KdV 方程式への応用について

九州大学大学院数理学研究院　谷口 説男　(Setsuo Taniguchi)

確率論が効果的に利用される一例として，考察対象の諸量が適当な確率変数の期待値となる場合を挙げることができる．このような例は，Einstein によるブラウン運動と拡散方程式の関係の発見，Kolmogorov によるマルコフ過程への偏微分方程式の応用など既に 100 年以上の歴史を持つ．より具体的な例としては，調和振動子に対応する微分作用素 $\frac{1}{2}\{(d/dy)^2 - y^2\}$ に付随する熱方程式

$$\partial u/\partial x = \tfrac{1}{2}\{(\partial/\partial y)^2 - y^2\}u, \quad u(y,0) = f(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

に対する Feynmann-Kac の公式と呼ばれる解の表示式

$$u(y,x) = E\left[f(y+B(x))\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x (y+B(z))^2 dz\right)\right] \tag{$\natural$}$$

がある．ただし $\{B(x)\}_{x\geq 0}$ は原点を出発するブラウン運動であり，E はこのブラウン運動を実現する確率測度に関する期待値を表す．これは，Feynmann 経路積分と Wiener 積分の類似を示す非常に興味深い例でもある．しかし，本講演にとってより重要なのは，Cameron-Martin の公式と呼ばれる経路空間上の変数変換公式を通じて得られる次の等式である; $t > 0$，$f(y) = e^{-(\tanh t)y^2/2}$ に対する ($\natural$) の $u(y,x)$ を $u(y;x,t)$ と表せば，

$$u(0;x,t) = \big(\cosh t\big)^{1/2}\big(\cosh(x+t)\big)^{-1/2}.$$

このとき $v(x,t) = -4(\partial/\partial x)^2 \log u(0;x,t)$ は KdV 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{3}{2}\,v\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{4}\,\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

の 1 ソリトン解となっている．このような期待値との結びつきは，より一般の n ソリトン解，KdV 階層の τ 函数に対しても成り立っている ([1, 3, 4])．

上のような期待値と KdV 方程式の結びつきの出発点となるのは，以下に述べる古典的無反射ポテンシャルの期待値表現である．散乱データ $\mathbf{s} = \{\eta_j, m_j\}_{1\leq j\leq n}$ をもつ無反射ポテンシャルは次で与えられる．

$$u_{\mathbf{s}}(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\log\det(I + G_{\mathbf{s}}(x)). \quad \text{ただし } G_{\mathbf{s}}(x) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}\, e^{-(\eta_i+\eta_j)x}}{\eta_i + \eta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

散乱データ $\mathbf{s}$ と一対一に対応する $\sigma = \{p_j, c_j\}_{1\leq j\leq n}$ から一意的に定まる Gauss 過程

$$X^\sigma(y) = \sum_{j=1}^n c_j \int_0^y e^{(y-z)p_j}\, dB^j(z) \qquad \Big(\{(B^1(y),\ldots,B^n(y))\}_{y\geq 0} \text{ は } n \text{ 次元ブラウン運動}\Big)$$

を用いて，無反射ポテンシャル $u_{\mathbf{s}}$ は

$$u_{\mathbf{s}}(x) = 4\frac{d^2}{dx^2}\log\bigg(E\bigg[\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^x (X^\sigma(y))^2 dy\Big)\bigg]\bigg)$$

と表示できる．講演では，この一対一対応の詳細を含め，τ 函数への拡張，さらに Marchenko[2] により導入された一般化された無反射ポテンシャルの期待値表示などについて紹介する．

参 考 文 献

[1] N. Ikeda, S. Taniguchi, Quadratic Wiener functionals, Kalman-Bucy filters, and the KdV equation, Adv. Studies Pure Math. **41**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 167–187.

[2] V.A. Marchenko, The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data, in: Zakharov, V.E. (Ed.) What is integrability? Springer-Verlag, New York, 1990, pp. 273–318.

[3] S. Taniguchi, Brownian sheet and reflectionless potentials, Stoch. Proc. Appl. **116** (2006), 293–309.

[4] S. Taniguchi, Stochastic calculus and the KdV equation, Contemp. Math., 429 (2007), 245-256.