解析学 B2 期末試験 (H18.7.20)–問題と解答例–

問　題

$\boxed{\mathbf{1}}$ (i) X を集合とし，$A \subset X$ は $A \neq \emptyset, \neq X$ を満たすとする．$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ は σ 加法族であることを証明せよ．

(ii) $(X, \mathcal{E}, \mu)$ は測度空間とし，$f, g : X \to \mathbb{R}$ は可測であるとする．

(a) f^2 は可測であることを証明せよ．

(b) fg は可測であることを証明せよ．

(c) $\cos(fg)$ は可測であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $(\mathbb{R}^N, \mathcal{F}, \lambda)$ を Lebesgue 測度空間とする．

(i) $t \in \mathbb{R}$，$r > 0$ とし，$A_r = \{t\} \times (-r, r]^{N-1}$，$B = \{t\} \times \mathbb{R}^{N-1}$ とおく．

(a) $A_r \in \mathcal{F}$ であり，$\lambda(A_r) = 0$ となることを証明せよ．

(b) $B \in \mathcal{F}$ であり，$\lambda(B) = 0$ となることを証明せよ．

(ii) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測であり，$\lambda_0^*([f \neq g]) = 0$ となるとき，g もまた Lebesgue 可測となることを証明せよ．

(iii) $N = 1$ とする．

(a) $h = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \mathcal{X}_{[n,n+1)}$ とおく．h は Lebesgue 可積分となることを証明せよ．

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $|f(x)| \leq \dfrac{1}{1+|x|^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすとする．f は Lebesgue 可積分となることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $f_n : X \to \mathbb{R}$ は可積分で，すべての $x \in X$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，$\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ を満たすとする．このとき $f = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n$ は可測かつ可積分となることを証明せよ．

(ii) $\mu(X) = 1$ とする．$f_n : X \to \mathbb{R}$ は可積分で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ a.e. を満たすとする．このとき以下の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \Big(1 + \inf_{m \geq n} \max\{f_m, 0\}\Big) d\mu$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \cos^3(\pi f_n) d\mu$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \lambda)$ を Lebesgue 測度空間とする．

(i) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は任意の閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で有界かつ Riemann 可積分であり，さらに広義 Riemann 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ が有限確定値として存在すると仮定する．このとき f は Lebesgue 可積分であり，Lebesgue 積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ は広義 Riemann 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ と一致することを証明せよ．

(ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = x^n e^{-x^4}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$，$g(y, x) = \sin(yx)e^{-x^4}$ とおく．

(a) f_n は Lebesgue 可積分であることを証明せよ．

(b) $y \in \mathbb{R}$ 毎に $g(y, \cdot)$ は Lebesgue 可積分であり，さらに関数

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto G(y) = \int_{\mathbb{R}} g(y, x)\lambda(dx)$$

は連続であることを証明せよ．

(c) 上の関数 $G(y)$ は C^∞ 級であることを示し，さらに n 階微分 $G^{(n)}$ を Lebesgue 積分を用いて表示せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $p, q, r > 1$ とする．

(a) $p, q, r > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$ を満たすとする．$f \in \mathcal{L}^p(\mu)$，$g \in \mathcal{L}^q(\mu)$，$h \in \mathcal{L}^r(\mu)$ に対し次式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_X |fgh| d\mu \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} \left(\int_X |h|^r d\mu\right)^{1/r}.$$

(b) $n \in \mathbb{N}$，$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ に対し次式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(\int_X \left|\sum_{j=1}^n f_j\right|^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{j=1}^n \left(\int_X |f_j|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

(ii) $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ $(n = 1, 2, \dots)$ は $\displaystyle\int_X f_n f_m d\mu = \delta_{mn}$ を満し，$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ は，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$ を満たすと仮定する．$S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j f_j$ とおく．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |S_n - S|^2 d\mu = 0$ となる $S \in \mathcal{L}^2(\mu)$ が存在することを証明せよ．

(b) 上の S と任意の $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ が次式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_X S_n g d\mu = \int_X S g d\mu.$$

(c) 上の S に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_X S^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X S f_n d\mu\right)^2.$$

解　答　例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(i) (a) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$ である．

(b) $\emptyset^c = X, A^c = A^c, (A^c)^c = A, X^c = \emptyset$ であるから，$B \in \mathcal{F}$ ならば $B^c \in \mathcal{F}$ となる．

(c) $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$，$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ とする．

(1) $X \in \mathcal{B}$ もしくは $A, A^c \in \mathcal{B}$ ならば，$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = X \in \mathcal{F}$ となる．

(2) $X \notin \mathcal{B}$，$A \in \mathcal{B}$，$A^c \notin \mathcal{B}$ ならば，$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A \in \mathcal{F}$ となる．

(3) $X \notin \mathcal{B}$，$A \notin \mathcal{B}$，$A^c \in \mathcal{B}$ ならば，$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A^c \in \mathcal{F}$ となる．

(4) $X \notin \mathcal{B}$，$A \notin \mathcal{B}$，$A^c \notin \mathcal{B}$ ならば，$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \emptyset \in \mathcal{F}$ となる．

以上より $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{F}$ である．

(a)，(b)，(c) より $\mathcal{F}$ は σ 加法族となる．

(ii) (a) $a \in \mathbb{R}$ とする．

$$[f^2 > a] = \begin{cases} X, & (a < 0), \\ [f > \sqrt{a}] \cup [f < -\sqrt{a}], & (a \geq 0) \end{cases}$$

が成り立つ．f が可測であるから $[f > \sqrt{a}], [f < -\sqrt{a}] \in \mathcal{F}$ $(a \geq 0)$ となる．よって $[f^2 > a] \in \mathcal{E}$ が成り立ち，f^2 は可測である．

(b) f, g は可測であるから線形結合 $f+g$，$f-g$ は可測となる．(a) より $(f+g)^2$，$(f-g)^2$ もまた可測である．よってそれらの線形結合である

$$fg = \frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$$

もまた可測となる．

(c) $a \in [-1, 1]$ に対し，$\theta(a) \in [0, \pi]$ を $\cos(\theta(a)) = a$ と定義する．このとき

$$[\cos(fg) > a] = \begin{cases} X, & (a < -1), \\ \displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [-\theta(a) + 2k\pi < fg < \theta(a) + 2k\pi], & (-1 \geq a < 1), \\ \emptyset, & (a \geq 1) \end{cases}$$

となる．(b) より fg は可測であるから $[-\theta(a) + 2k\pi < fg < \theta(a) + 2k\pi] \in \mathcal{E}$．したがって $[\cos(fg) > a] \in \mathcal{E}$ となり，$\cos(fg)$ は可測である．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(i) (a) $A_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{(t - \frac{1}{n}, t] \times (-r, r]^{N-1}\right\}$ となる．$(t - \frac{1}{n}, t] \times (-r, r]^{N-1} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ であるから，$A_r \in \mathcal{F}$ である．さらに $\lambda((t - \frac{1}{n}, t] \times (-r, r]^{N-1}) = \lambda_0((t - \frac{1}{n}, t] \times (-r, r]^{N-1}) = \frac{(2r)^{N-1}}{n}$ であるから，測度の単調性より

$$\lambda(A_r) = \lim_{n \to \infty} \lambda((t - \tfrac{1}{n}, t] \times (-r, r]^{N-1}) = 0.$$

(ii) $a > 0$ とし，$E = [f \neq g]$ とおく．$\lambda_0^*(E) = 0$ であるから，$E \in \mathcal{F}$ である．

$$[g > a] = ([f > a] \cap E^c) \cup ([g > a] \cap E)$$

と表現する．f は可測なので $[f > a] \in \mathcal{F}$ である．よって $[f > a] \cap E^c \in \mathcal{F}$ となる．

$0 \leq \lambda_0^*([g > a] \cap E) \leq \lambda_0^*(E) = 0$ より，$\lambda_0^*([g > a] \cap E) = 0$ となる．よって $[g > a] \cap E \in \mathcal{F}$ である．

以上より $[g > a] \in \mathcal{F}$ となり，g は Lebesgue 可測となる．

(iii) (a) $h_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{1+n^2}\mathcal{X}_{[n,n+1)}$ とおく．$0 \le h_k \le h_{k+1} \nearrow h$ となるから，単調収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}} hd\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_n d\lambda = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{1+n^2}\lambda([n,n+1)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} < \infty.$$

$h \ge 0$ であるから，h は可積分となる．
(b) $\frac{1}{1+x^2} \le h(|x|)$ である．$\mathcal{X}_{[n,n+1)}(|x|) = \mathcal{X}_{(-n-1,-n]}(x)\mathcal{X}_{[n,n+1)}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ となるので，

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{[n,n+1)}(|x|)\lambda(dx) = \lambda((-n-1,-n]) + \lambda([n,n+1)) = 2.$$

(a) と同様にして

$$\int_{\mathbb{R}} h(|x|)\lambda(dx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+n^2} < \infty.$$

よって $h(|x|)$ は可積分である．$|f(x)| \le \frac{1}{1+x^2} \le h(|x|)$ であるから，f も可積分となる．

3
(i) $|f_n| \ge 0$ であり，さらに $|f| = \liminf_{n\to\infty}|f_n|$ となるから，Fatou の補題より

$$\int_X |f|d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty}|f_n|d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X |f_n|d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n|d\mu < \infty.$$

したがって f は可積分である．
(ii) (a) $\Phi \equiv 1$ とする．$\mu(X) = 1$ より，$\int_X \Phi d\mu = 1$ となり，Φ は可積分である．また $\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n|}{1+|f_n|} = \frac{1}{2}$ a.e. さらに $\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \le \Phi$ であるから，Lebesgue の優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|}d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}d\mu = \int_X \frac{1}{2}\,d\mu = \frac{1}{2}\mu(X) = \frac{1}{2}.$$

(b) $g_n = 1 + \inf_{m\ge n}\max\{f_m, 0\}$ とおく．$0 \le g_n \le g_{n+1}$ であり，仮定より $\lim_{n\to\infty} g_n = 2$ a.e. となる．よって単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_X (1+\inf_{m\ge n}\max\{f_m,0\})d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty}(1+\inf_{m\ge n}\max\{f_m,0\})d\mu = \int_X 2d\mu = 2\mu(X) = 2.$$

(c) $\Phi \equiv 1$ とおく．(a) で見たように Φ は可積分であり，$|\cos^3(\pi f_n)| \le \Phi$．また $\lim_{n\to\infty}\cos^3(\pi f_n) = \cos^3\pi = -1$ a.e. Lebesgue の優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \cos^3(\pi f_n)d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty}\cos^3(\pi f_n)d\mu = \int_X (-1)d\mu = -\mu(X) = -1.$$

4 (i) $f_n = f\mathcal{X}_{[-n,n]}$ とおくと，f_n は Lebesgue 可積分でありさらに

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{-n}^{n} f(x)dx.$$

$0 \le f_n \le f_{n+1} \nearrow f$ であるから，単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} fd\lambda.$$

広義 Riemann 積分が存在するから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

これらと広義 Riemann 積分が有限確定であることより

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$$

となる．$f \geq 0$ であるから，f は可積分でありさらに $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ は $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ と一致する．

(ii) (a) $n \in \mathbb{N}$ とする．$|f_n|$ は連続であり，さらに $\lim_{|x|\to\infty}(1+x^2)|f_n(x)| = 0$ である．よって広義 Riemann 積分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)|dx$ が有限確定値として存在する．(i) より $|f_n|$ は Lebesgue 可積分となり，したがって f_n は Lebesgue 可積分である．
(b) 各 $x \in \mathbb{R}$ 毎に $y \mapsto g(y,x)$ は連続であり，$|g(y,x)| \leq |e^{-x^4}| = |f_0(x)|$ $(\forall y)$ が成り立つ．よって Lebesgue の収束定理 (連続版) により $y \mapsto G(y)$ は連続であるといえる．
(c)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2k} g(y,x) = (-1)^k \sin(yx)x^{2k}e^{-x^4}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2k+1} g(y,x) = (-1)^k \cos(yx)x^{2k+1}e^{-x^4} \quad k = 0, 1, \ldots$$

となる．したがって

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} g(y,x)\right| \leq |x^n e^{-x^4}| = |f_n(x)| \tag{$*$}$$

が成り立つ．

$n = 1$ の場合を考える．(a) より $|f_1|$ は可積分であるから，$(*)$ より，Lebesgue の収束定理 (微分版) を適用すれば，G は C^1 級で

$$G'(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} g(y,x)\lambda(dx)$$

が成り立つ．

G が C^n 級で

$$G^{(n)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} g(y,x)\lambda(dx)$$

が成り立ったとする．(a) より $|f_{n+1}|$ は可積分であるから，$(*)$ より，Lebesgue の収束定理 (微分版) を適用すれば，G は C^{n+1} 級で

$$G^{(n+1)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} g(y,x)\lambda(dx)$$

が成立する．

よって G は C^∞ であり，

$$G^{(n)}(y) = \begin{cases} (-1)^k \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sin(yx)x^{2k}e^{-x^4}\lambda(dx), & n = 2k, \\ (-1)^k \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \cos(yx)x^{2k+1}e^{-x^4}\lambda(dx), & n = 2k+1. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(i) (a) $s = \frac{p}{p-1}$ とおく．$\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$ より，$\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ である．とくに $q, r > s$，$\frac{1}{q/s} + \frac{1}{r/s} = 1$ である．仮定より

$$|g|^s \in \mathcal{L}^{q/s}(\mu), \quad |h|^s \in \mathcal{L}^{r/s}(\mu)$$

であるから，$\frac{1}{q/s}+\frac{1}{r/s}=1$ に Hölder の不等式を適用すれば

$$\int_X |gh|^s d\mu \le \left(\int_X |g|^q\right)^{s/q}\left(\int_X |h|^r\right)^{s/r}. \tag{\#}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{s}=1$ に Hölder の不等式を適用し (#) とあわせれば

$$\int_X |fgh| d\mu \le \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_X |gh|^s\right)^{1/s} \le \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q\right)^{1/q}\left(\int_X |h|^r\right)^{1/r}.$$

(b) $n=1$ のときは自明である．$n=2$ のときは Minkowski の不等式より従う．

$$\left(\int_X \left|\sum_{j=1}^n f_j\right|^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{j=1}^n \left(\int_X |f_j|^p d\mu\right)^{1/p}$$

が成り立っていたとする．このとき Minkowski の不等式より

$$\left(\int_X \left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\right|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X \left|\sum_{j=1}^{n} f_j\right|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |f_{n+1}|^p d\mu\right)^{1/p} \le \sum_{j=1}^{n+1}\left(\int_X |f_j|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

よって一般に求める不等式が成立する．

(ii) (a) $n>m$ とする．

$$\begin{aligned}\int_X (S_n-S_m)^2 d\mu &= \int_X \left(\sum_{j=m+1}^n a_j f_j\right)^2 d\mu = \int_X \sum_{j=m+1}^n \sum_{k=m+1}^n a_j a_k f_j f_k d\mu \\ &= \sum_{j=m+1}^n \sum_{k=m+1}^n a_j a_k \int_X f_j f_k d\mu = \sum_{j=m+1}^n \sum_{k=m+1}^n a_j a_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=m+1}^n a_j^2 \to 0 \quad (m,n\to\infty)\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^2(\mu)$ の完備性より $S\in\mathcal{L}^2(\mu)$ が存在し $\lim_{n\to\infty}\int_X (S-S_n)^2 d\mu = 0$ となる．
(b) Hölder の不等式より

$$\left|\int_X S_n g d\mu - \int_X S g d\mu\right| \le \int_X |S_n - S||g| d\mu \le \left(\int_X (S-S_n)^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int_X g^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

$\int_X g^2 d\mu < \infty$ であるから，(a) より

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_X S_n g d\mu - \int_X S g d\mu\right| = 0$$

となる．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int_X S_n g d\mu = \int_X S g d\mu.$$

(c) (b) と S_m の定義より

$$\int_X S f_n d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_X S_m f_n d\mu = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m a_k \int_X f_k f_n d\mu = a_n \tag{$\natural$}$$

さらに (b) より

$$\int_X S^2 d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X SS_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_X S_m S_n d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k \int_X f_k f_j d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

($\natural$) を代入して求める等式を得る.