解析学B2講義・演習

(平成19年度前期)

— Lebesgue積分—

谷 口　説 男

(九州大学大学院数理学研究院)

(平成19年7月12日)

はじめに

Riemann 積分は極限操作おいて脆弱である．たとえば，関数 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{k}{m}\ (1 \leq \exists m \leq n,\ 0 \leq \exists k \leq m) \text{ のとき}, \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおく．

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

とおけば，$f_n(x)$ は，$f(x)$ に各点収束している．f_n は Riemann 可積分であり，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ である．安直に考えれば

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

という等式が成立するように思われるが，f は Riemann 可積分でなく，最後の項 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は全く意味をなさない．これは，数学の様々な場面で現れる基本的な操作である極限操作に Riemann 積分が耐えない一例である．

しかしこれは Riemann 積分の定義に帰れば当然の脆弱さであるといえる．たとえば $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\}$ という半径 1 の半円の面積の計算を考えてみよう．このとき Riemann 積分を用いれば面積は

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

として計算される．これは定義に変えれば，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n-1} \sqrt{1-(k/n)^2} \times \frac{1}{n}$$

と一致する．すなわち，半円を縦方向 (x 軸と垂直な方向) に薄切りして，それぞれの細片の面積を長方形で近似し寄せ集めたものが Riemann 積分である．関数が収束するというのはグラフでいえば y 成分の変動 (x 軸と平行な方向の変動) を見ているわけであるから，この細片の作り方とは全く相容れない．このことが Riemann 積分が収束に耐えないことの理由である．

半円の面積を計算するのならば半円を横方向 (x 軸と水平な方向) に薄切りした細片の面積を寄せ集めることでも可能である．こうすれば関数の収束と薄切りする方向は一致し，収束に耐える面積の計算が得られるはずである．しかし，円は良いが，たとえば $y = x\sin(1/x)$ のようなグラフにおいては横軸方向に切った「細片の面積」が如何なるものなのか? この「細片の面積」に意味を付け，さらに上のような極限操作に対する脆弱さを乗り越えるものが Lebesgue 積分である．

この講義では，まず幾つかの事実の証明を先送りにして Riemann 積分の拡張となる L-積分を導入し，極限操作と積分の交換可能性について調べる．その後，この導入を支える抽象論 (現在，測度論と呼ばれているもの) を紹介し，続けてそれのユークリッド空間での具体例である Lebesuge 測度に関わる話題を紹介するという形で，抽象と具体の間の行きつ戻りつを繰り返しながら進んでゆく．

Contents

1. 収束定理 — Riemann 積分の拡張を通じて —

Riemann 積分の復習から始める．この節を通じ，$-\infty < a < b < \infty$ とする．

Def 1.1. (i) $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ なる点列 $\Delta = \{a_0, \ldots, a_n\}$ のことを $[a,b]$ の**分割**という.

$$|\Delta| = \max\{a_{j+1} - a_j \,|\, 0 \leq j \leq n-1\}$$

とおき，分割 Δ の巾という.

(ii) 分割 $\Delta = \{a_0, \ldots, a_n\}$ と有界関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\underline{S}(f;\Delta) = \sum_{j=0}^{n-1} \inf\{f(x) \,|\, x \in [a_j, a_{j+1}]\} \times (a_{j+1} - a_j),$$

$$\overline{S}(f;\Delta) = \sum_{j=0}^{n-1} \sup\{f(x) \,|\, x \in [a_j, a_{j+1}]\} \times (a_{j+1} - a_j)$$

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f;\Delta) \,|\, \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$

$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f;\Delta) \,|\, \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$

と定義する.

(iii) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ となるとき $\boldsymbol{f}$ **は** $\boldsymbol{[a,b]}$ **上 Riemann 可積分である**という．値 $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表し，f の $[a,b]$ 上の **Riemann 積分**という.

Thm 1.2 (Darboux)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界とする．分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ の巾 $|\Delta_n|$ が 0 に収束する，すなわち $|\Delta_n| \to 0$，ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Delta_n) = \underline{S}(f), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Delta_n) = \overline{S}(f).$$

とくに f が Riemann 可積分であるならば,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Delta_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Example 1.3. (1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続であるならば f は Riemann 可積分である.
(2) $n \in \mathbb{N}$ とし，$\mathbb{Q}_n = \{k/m \,|\, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$ とおく．$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}_n, \\ 0, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}_n, \end{cases}$$

とおく．このとき f は Riemann 可積分である．
(3) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

とおく．このとき任意の $\alpha < \beta$ に対し $\inf\{f(x) \,|\, x \in [\alpha,\beta]\} = 0$，$\sup\{f(x) \,|\, x \in [\alpha,\beta]\} = 1$ となる．よって任意の分割 Δ に対し

$$\underline{S}(f;\Delta) = 0, \quad \overline{S}(f;\Delta) = b - a$$

である．したがって f は Riemann 可積分ではない．

Def 1.4 (外測度)**.** (i) $A \subset \mathbb{R}$ に対し，

$$\lambda_0^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) \,\Big|\, a_j \leq b_j,\, j = 1,2,\ldots, \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j] \supset A\Big\}$$

とおき，A の**外測度**という．ただし $(a,a] = \emptyset$ と約束する．

(ii) $\lambda_0^*(A) = 0$ となる集合 $A \subset \mathbb{R}$ を**零集合**という．

Prop 1.5. (i) $A \subset B$ ならば $\lambda_0^*(A) \leq \lambda_0^*(B)$ である．

とくに，A が零集合ならばその部分集合はすべて零集合である．

(ii) $A_1, A_2, \cdots \subset \mathbb{R}$ に対し $\lambda_0^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0^*(A_j)$ が成り立つ．

とくに，A_j がすべて零集合ならば，$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ も零集合となる．

Proof. (i) $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j] \supset B$ ならば $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j] \supset A$ である．よって外測度の定義より従う．
(ii) もし $\lambda_0^*(A_j) = \infty$ となる j が存在すれば不等式は自明となる．したがって $\lambda_0^*(A_j) < \infty$ $(\forall j)$ と仮定する．$\varepsilon > 0$ とし，$a_{j,k} < b_{j,k}$ を

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{j,k},b_{j,k}] \supset A_j, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(b_{j,k} - a_{j,k}) \leq \lambda_0^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

となるように選ぶ．このとき

$$\bigcup_{j,k=1}^{\infty}(a_{j,k},b_{j,k}] \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \sum_{j,k=1}^{\infty}(b_{j,k} - a_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0^*(A_j) + \varepsilon.$$

したがって

$$\lambda_0^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0^*(A_j) + \varepsilon.$$

$\varepsilon \searrow 0$ として求める不等式を得る． □

Thm 1.6 (Lebesgue)**.** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を有界関数とする．f の $x\in[a,b]$ における振動量 $J(f;x)$ を

$$J(f;x)=\inf\Big\{\sup_{y\in I\cap[a,b]}f(y)-\inf_{y\in I\cap[a,b]}f(y)\,\Big|\,I\subset\mathbb{R}\text{ は }x\in I\cap[a,b]\text{ なる開区間}\Big\}$$

と定義する．さらに

$$N_f=\{x\in[a,b]\mid J(f;x)\neq 0\}$$

とおく．f が Riemann 可積分となるための必要十分条件は $\lambda_0^*(N_f)=0$ となることである．

Proof. 演習問題. □

Def 1.7. (i) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が階段関数であるとは $a=a_0<a_1<\cdots<a_n-1<a_n=b$ なる点列 $\{a_j\}_{j=0}^n$ と $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ が存在し,

$$f(x)=c_j,\quad x\in(a_j,a_{j+1}),\,j=0,1,\ldots,n-1$$

が成り立つことをいう.

(ii) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が **L-可測関数**であるとは，階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ と零集合 N が存在し

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\notin N$$

が成り立つことをいう．上のことを『$\boldsymbol{f_n\to f}$ **a.e.**』と表す.

Prop 1.8. f,g は L-可測関数とする.

(i) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ならば，$\alpha f+\beta g$ もまた L-可測関数である．ただし，$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$.

(ii) fg もまた L-可測関数である．ただし $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

(iii) $\max\{f,g\}$，$\min\{f,g\}$ もまた L-可測関数である．ただし

$(\max\{f,g\})(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$(\min\{f,g\})(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

Proof. 演習問題. □

Lem 1.9. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を L-可測関数とする.

(i) もし f が有界ならば，階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ で，$\sup_{n\in\mathbb{N},x\in[a,b]}|f_n(x)|<\infty$ かつ $f_n\to f$ a.e. となるものが存在する．さらに，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

が存在し，有限確定値となる．この極限値を $\displaystyle\int_{[a,b]}f\,d\lambda$ と表す.

(ii) $F_n = \max\{-n, \min\{f, n\}\}$ とおく．もし

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{[a,b]} |F_n|\, d\lambda < \infty \tag{1.1}$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} F_n\, d\lambda$$

が存在し，有限確定値となる．この極限値も $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ と表す.

Proof. ここでは証明しない．6 節の演習問題とする． □

Def 1.10. 有界もしくは (1.1) を満たす L-可測関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を **L-可積分**であるといい，Lem 1.9 の極限値 $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ を f の **L-積分**という.

Remark. L-積分を定義するために Lem 1.9 (i) は一纏めで書いているが，実際は，次のような二つの事実からなっている (これもまた 6 章の結果である);

(i) もし f が有界ならば，階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |f_n(x)| < \infty$ かつ $f_n \to f$ a.e. となるものが存在する.

(ii) もし階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，$\sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |f_n(x)| < \infty$ かつ $f_n \to f$ a.e. を満たせば，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ が存在し，有限確定値となる.

Thm 1.11. (i) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分であり，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする.

(a) $\alpha f + \beta g$ も L-可積分であり，

$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g)\, d\lambda = \alpha \int_{[a,b]} f\, d\lambda + \beta \int_{[a,b]} g\, d\lambda$$

が成り立つ.

(b) $f \geq g$ a.e. (すなわち，零集合 N が存在し $x \notin N$ ならば $f(x) \geq g(x)$ が成り立つ) ならば，
$\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda \geq \int_{[a,b]} g\, d\lambda$ が成り立つ.

(ii) 有界な $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 可積分ならば L-可積分であり，さらに $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ となる.

Proof. (i) f, g が有界な場合にのみ証明する.
(a) f, g に対し Lem 1.9 の階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．このとき，

$$\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g \text{ a.e.} \quad \text{かつ} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)| < \infty$$

である．L-積分の定義と Riemann 積分の線形性より

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g)\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha f_n + \beta g_n)(x) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \alpha \int_a^b f_n(x) dx + \beta \int_a^b g_n(x) dx \right\} \\ &= \alpha \int_{[a,b]} f\, d\lambda + \beta \int_{[a,b]} g\, d\lambda.\end{aligned}$$

(b) $H_n = \max\{f_n, g_n\}$，$h_n = \min\{f_n, g_n\}$ とおけば，

$$H_n \to f \text{ a.e.}, h_n \to g \text{ a.e.}, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |H_n(x)| < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |h_n(x)| < \infty.$$

よって L-積分の定義と Riemann 積分の正値性より

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b H_n(x) dx \geq \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x) dx = \int_{[a,b]} g\, d\lambda.$$

(ii) 演習問題 Q1.9 の f_n をとれば，f_n は階段関数であり，

$$f_n \to f \text{ a.e.}, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}, x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty.$$

よって f は L-可積分となる．L-積分の定義と Thm 1.2 により

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Thm 1.12 (Lebesgue の優収束定理)**.** $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ はすべて L-可積分であり，$f_n \to f$ a.e. とする．さらに L-可積分関数 $\Phi \geq 0$ が存在し $|f_n| \leq \Phi$ a.e. となっていると仮定する．このとき積分と極限の順序交換が可能である;

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n\, d\lambda = \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

Proof.　6 節で証明する．□

Cor 1.13. $\alpha < \beta$ とする．$f : (\alpha, \beta) \times [a,b] \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ は，各 t に対し $f(t, \cdot)$ が L-可積分となるとする．

(i) (Lebesgue の優収束定理 (連続版)) 各 $x \in [a,b]$ に対し，写像 $(\alpha, \beta) \ni t \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ は連続であり，さらに L-可積分な関数 $\Phi \geq 0$ が存在し $\sup_{t\in(\alpha,\beta)} |f(t, \cdot)| \leq \Phi$ a.e. が成り立つと仮定する．このとき写像 $t \mapsto \int_{[a,b]} f(t, \cdot)\, d\lambda$ は連続である;

$$\lim_{t\to t_0} \int_{[a,b]} f(t, \cdot)\, d\lambda = \int_{[a,b]} f(t_0, \cdot)\, d\lambda, \quad \forall t_0 \in (\alpha, \beta).$$

(ii) (Lebesgue の優収束定理 (微分版)) (a) 各 $x \in [a,b]$ に対し写像 $(\alpha,\beta) \ni t \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ は C^1 級であり，(b) 各 $t \in (\alpha,\beta)$ に対し $f(t,\cdot)$ は L-可積分であり，(c) さらに L-可積分な関数 $\Phi \geq 0$ が存在し $\sup_{t\in(\alpha,\beta)}\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right| \leq \Phi$ a.e. が成り立つと仮定する．このとき写像 $t \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f(t,\cdot)\,d\lambda$ は連続的微分可能であり，さらに次が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{[a,b]} f(t,\cdot)\,d\lambda = \int_{[a,b]} \frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\,d\lambda.$$

Proof. (i) $t_0 \in (\alpha,\beta)$ とし，$\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\alpha,\beta)$ は $t_n \to t_0$ を満たすとする．$f_n(x) = f(t_n,x)$ とおけば，$|f_n| \leq \Phi$ a.e. かつ $f_n \to f(t_0,\cdot)$．Thm 1.12 より，

$$\int_{[a,b]} f(t_n,\cdot)\,d\lambda = \int_{[a,b]} f_n\,d\lambda \to \int_{[a,b]} f(t_0,\cdot)\,d\lambda \quad (n\to\infty)$$

となる．任意の収束列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し成り立つので，主張を得る．
(ii) $t_0 \in (\alpha,\beta)$ とする．$|h| < \min\{t_0-\alpha, \beta-t_0\}$ なる $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$g(h,x) = \begin{cases} \dfrac{f(t_0+h,x)-f(t_0,x)}{h}, & (h \neq 0), \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t_0,x), & (h=0), \end{cases}$$

とおく．(i) を用いれば主張が得られる．詳細は演習問題とする．□

L-積分は複素数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に次のように自然に拡張できる; f を $f = u + iv$ $(i^2=-1)$ と実部と虚部に分解し，u, v 共に L-可積分関数となるときに，f は L-可積分関数であるといい，f の L-積分を

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} u\,d\lambda + i\int_{[a,b]} v\,d\lambda$$

と定義する．Thm 1.12 やその Cor はこのような複素数値関数に対する L-積分についても成立する．

Example 1.14. $r > 0$ に対し，$f_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ を $f_r(x) = \exp(ire^{ix})$ と定義する．Cauchy の積分公式の応用例として計算される $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ においては $\displaystyle\int_0^\pi f_r(x)dx$ という Riemann 積分の，したがって $\displaystyle\int_{[0,\pi]} f_r\,d\lambda$ という L-積分の $r\to\infty$ および $r \to 0$ での極限値を知る必要がある．

$\sin x \geq 0$ $(x \in [0,\pi])$ であるから，

$$\left|\exp(ire^{ix})\right| = \exp(-r\sin x) \leq 1 \quad x \in [0,\pi] \tag{$*$}$$

となる．これより，

$$\lim_{r\to 0} f_r(x) = 1 \ \ (x \in [0,\pi]), \quad \lim_{r\to\infty} f_r(x) = 0 \ \ (x \in (0,\pi))$$

となる．とくに後者から $f_r \to 0$ a.e. である．さらに $(*)$ から，$\Phi(x) \equiv 1$ として Thm 1.12 が使え，

$$\lim_{r\to 0}\int_{[0,\pi]} f_r\,d\lambda = \int_{[0,\pi]} 1\,d\lambda = \int_0^{\pi} 1dx = \pi,$$
$$\lim_{r\to \infty}\int_{[0,\pi]} f_r\,d\lambda = \int_{[0,\pi]} 0\,d\lambda = \int_0^{\pi} 0dx = 0$$

を得る．

演習問題

Q1.1. $a \in \mathbb{R}$ とする．$\lambda_0^*(\{a\}) = 0$ となることを証明せよ．
また A を高々可算な集合とすれば $\lambda_0^*(A) = 0$ となることを証明せよ．

Q1.2. $\lambda_0^{**}(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\,\middle|\, a_j \le b_j,\, j = 1, 2, \ldots, \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \supset A\right\}$ とおく．
$\lambda_0^*(A) = \lambda_0^{**}(A)$ $(\forall A \subset \mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．

Q1.3. $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ がコンパクトであることと Q 1.2 利用して $\lambda_0^*((a,b)) \ge b - a$ となることを証明せよ．

Q1.4. $a < b, \in \mathbb{R}$ とする．$A \in \{(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]\}$ に対し $\lambda_0^*(A) = b - a$ となることを証明せよ．

Q1.5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界とし，$J(f;x)$ を Thm 1.6 の通りとする．
(i) $x_0 \in [a,b]$ とする．$J(f;x_0) = 0$ は f が $x = x_0$ で連続となるための必要十分条件であることを示せ．
(ii) $c \ge 0$ とする．$\{x \in [a,b] \,|\, J(f;x) \ge c\}$ は閉集合であることを示せ．

Q1.6. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界であるとする．$N_f = \{x \in [a,b] \,|\, J(f;x) > 0\}$ とおく．$\lambda_0^*(N_f) = 0$ とする．
(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の性質を満たす有限個の開区間 $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ が存在することを証明せよ．『$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \varepsilon$ かつ $\{x \in [a,b] \,|\, J(f;x) \ge \varepsilon\} \subset \bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$ となる．』
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の性質を満たす点列 $a \le c_1 < d_1 \le c_2 < d_2 \le \ldots d_{n-1} \le c_m < d_m \le b$ が存在することを証明せよ．『$\sup_{x\in[c_k,d_k]} f(x) - \inf_{x\in[c_k,d_k]} f(x) < \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, m)$ かつ $I \setminus \bigcup_{k=1}^{m}[c_k,d_k] \subset \bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$ を満たす．』
(iii) f は Riemann 積分可能であることを証明せよ．

Q1.7. Thm 1.6 の通りに N_f を定義し，$n \in \mathbb{N}$ に対し $N_{f,n} = \{x \in [a,b] \,|\, J(f;x) \ge 1/n\}$ とおく．f は Riemann 積分可能であるとする．
(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，点列 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = 1$ が存在

し，$o_i = \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x)$，$\mathcal{I}_n = \{i \,|\, o_i \geq 1/n\}$ とおけば,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_n}(a_{i+1}-a_i) < \varepsilon$$

が成り立つことを証明せよ.
(ii) $N_{f,n} \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}_n}[a_i, a_{i+1}] \cup \{a_0, \ldots, a_N\}$ となることを証明せよ.
(iii) $\lambda_0^*(N_{f,n}) = 0$ を示せ.
(iv) $\lambda_0^*(N_f) = 0$ となることを証明せよ.

Q1.8. Prop 1.8 を証明せよ.

Q1.9. 有界な $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 可積分であるとする．$f_n(x) = f(a+(b-a)k2^{-n})$，$x \in [a+(b-a)k2^{-n}, a+(b-a)(k+1)2^{-n})$，$k = 0, \ldots, 2^n$ とおく．このとき Thm 1.6 を用いて $f_n \to f$ a.e. となることを証明せよ.

Q1.10. Cor 1.13(ii) の証明を完了せよ.

Q1.11. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ は，(a) $\forall t \in U$ に対し，$f(t,\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ が L-可積分であり，(b) すべての $x \in [a,b]$ に対し，$U \ni t \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ は C^1 級であり，(c) L-可積分関数 $\Phi \geq 0$ が存在し，$\sup_{t\in U}\left|\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,\cdot)\right| \leq \Phi$ a.e.$(i = 1, \ldots, n)$ となると仮定する．ただし，$t = (t_1, \ldots, t_n)$.

このとき，任意の $i = 1, \ldots, n$ と $t \in U$ に対し，$\partial f/\partial t_i(t,\cdot)$ は L-可積分であり，さらに次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\int_{[a,b]} f(t,\cdot)\,d\lambda = \int_{[a,b]}\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,\cdot)\,d\lambda.$$

Q1.12. f は L-可測関数とし，L-可積分関数 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ は，$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \nearrow f$ を満たすとする．このとき次を示せ.

(a) f が L-可積分であることと

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{[a,b]} f_n\,d\lambda < \infty$$

となることは必要かつ十分である.

(Hint: $a_{n,m} = \displaystyle\int_{[a,b]}\min\{f_n, m\}\,d\lambda$ とおけば，$\infty = \infty$ を許して

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

となることを証明し，それを利用せよ．)

(b) f が L-可積分であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda$ が成り立つ.

Q1.13. L-可測関数 $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は，$\sup\{|f_n(x)|, |f(x)| \mid x \in [a,b], n \in \mathbb{N}\} < \infty$ を満たし，さらに $f_n \to f$ a.e. とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$ となることを示せ．

Q1.14. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数で，すべての $x \in [a,b]$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ であるとする．さらに $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ とおけば，$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数であるとする．このとき無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda$ は絶対収束し，さらに

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda$$

が成り立つことを証明せよ．

Q1.15. L-可積分関数 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ は，L-可積分関数 f に一様収束すると仮定する．このとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$ となることを示せ．

Q1.16. $f_n, f : [a,b] \to [0,\infty)$，$n = 1, 2, \ldots,$ は L-可積分とし，$f_n \geq f_{n+1} \searrow f$ となると仮定する．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$ となることを示せ．

Q1.17. 以下の Riemann 積分の極限値を求め，その求め方を説明せよ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp\left(\frac{x}{n+x^2}\right)dx$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^3 n\sin\left(\frac{x^2+1}{n}\right)dx$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2\left\{1 - e^{-(x/n)^2}\right\}dx$

Q1.18. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $f \geq 0$ かつ Riemann 広義積分可能であるとする．

(i) $n > 2/(b-a)$ に対し，$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a + (1/n), b - (1/n)], \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

とおく．このとき，$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \nearrow f(x)$ $(x \in (a,b))$ となることを証明せよ．

(ii) f は L-可積分関数であり $\displaystyle\int_{[a,b]} f \, d\lambda$ は f の Riemann 広義積分と一致することを示せ．

Q1.19. L-可測関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，定数 $C > 0$，$0 < \alpha < 1$ が存在し，$|f(x)| \le C\min\{(x-a),(b-x)\}^{-\alpha}$ $(\forall x \in (a,b))$ が成り立つとする．このとき f は L-可積分関数であることを証明せよ．

Q1.20. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可測関数で，さらに $f(x) \ge \min\{x-a, b-x\}$ $(\forall x \in [a,b])$ を満たすとする．

(i) $g_n(x) = e^{-nf(x)}$ は L-可積分関数となることを証明せよ．

(ii) $\lim_{n\to\infty} g_n$ を求めよ．

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} e^{-nf}\,d\lambda = 0$ となることを証明せよ．

Q1.21. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は可測関数で，$e^{|f|}$ が L-可積分関数であるとする．

(i) f^n は L-可積分関数であることを証明せよ．

(ii) e^f は L-可積分関数であることを証明せよ．

(iii) 次の等式が成り立つことを証明せよ．$\displaystyle\int_{[a,b]} e^f\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{[a,b]} f^n\,d\lambda.$

Q1.22. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は可測関数で，$|f| < 1$ であり，さらに $\dfrac{1}{1-|f|}$ が L-可積分関数となるとする．

(i) f^n は L-可積分関数であることを証明せよ．

(ii) $\dfrac{1}{1-f}$ は L-可積分関数であることを証明せよ．

(iii) 次の等式が成り立つことを証明せよ．$\displaystyle\int_{[a,b]}\frac{1}{1-f}\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[a,b]} f^n\,d\lambda.$

Q1.23. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数とし，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$y \in \mathbb{R}$ に対し $f_y(x) = g(x-y)f(x)$ $(x \in [a,b])$ とおく．

(i) $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数となることを示せ．

(ii) $F(y) = \displaystyle\int_{[a,b]} f_y\,d\lambda$ とおく．関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であることを証明せよ．

(iii) $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在し，$\sum_{j=0}^n a_j g^{(j)} = 0$ が成り立つとする．このとき，

$$\sum_{j=0}^{n} a_j F^{(j)} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

Q1.24. (Laplace 変換) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を L-可積分関数とする．$y \in \mathbb{R}$ に対し，$f_y(x) = e^{-yx}f(x)$ $(x \in [a,b])$ とおく．

(i) $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数であることを証明せよ．

(ii) $F(y) = \displaystyle\int_{[a,b]} f_y \, d\lambda$ とおく．関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であることを証明せよ．

(iii) もし f が C^n 級で，$f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0$ $(0 \leq j \leq n-1)$ を満たし，さらに $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ と L-可積分関数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\sum_{j=0}^{n} a_j f^{(j)}(x) = g(x), \quad x \in [a,b]$$

が成り立つとする．このとき次式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^j F(y) = \int_{[a,b]} g_y \, d\lambda$$

Q1.25. (Fourier 変換) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を L-可積分関数とする．$y \in \mathbb{R}$ に対し，$f_y(x) = e^{iyx} f(x)$ $(x \in [a,b])$ とおく．

(i) $f_y : [a,b] \to \mathbb{C}$ は L-可積分関数であることを証明せよ．

(ii) $F(y) = \displaystyle\int_{[a,b]} f_y \, d\lambda$ とおく．関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であることを証明せよ．

(iii) もし f が C^n 級で，$f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0$ $(0 \leq j \leq n-1)$ を満たし，さらに $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ と L-可積分関数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\sum_{j=0}^{n} a_j f^{(j)}(x) = g(x), \quad x \in [a,b]$$

が成り立つとする．このとき次式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (-iy)^j F(y) = \int_{[a,b]} g_y \, d\lambda$$

Q1.26. (Fourier-Laplace 変換) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は L-可積分関数とする．$z \in \mathbb{C}$ に対し，$f_z(x) = e^{zx} f(x)$ $(x \in [a,b])$ とおく．

(i) $f_z : [a,b] \to \mathbb{C}$ は L-可積分関数であることを示せ．

(ii) $F(z) = \int_{[a,b]} f_z \, d\lambda$ $(z \in \mathbb{C})$ とおく．F は正則関数であることを証明せよ．

(iii) $f_n(x) = x^n f(x)$ とおく．次の等式が成り立つことを示せ．

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda.$$

Q1.27. (Cauchy の積分表示) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．$r > 0$ とし，$|z| < r$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f_z(x) = \frac{irf(re^{ix})e^{ix}}{re^{ix} - z}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

とおく．

(i) $f_z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ は L-可積分関数であることを証明せよ．

(ii) $F(z) = \int_{[0,2\pi]} f_z \, d\lambda$ は $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ において正則であることを示し，その n 階微分 $F^{(n)}$ を求めよ．

Q1.28. (Beta 関数) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ に対し

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

と Riemann 広義積分により定義する．

(i) Riemann 広義積分が定義可能であることを示せ．

(ii) $\mathbb{C}_+^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto B(\alpha, \beta)$ は正則関数であることを証明せよ．

2.　測度 (一般論)

Def 2.1 (加法族)**.** X を集合とし，$\mathcal{E} \subset 2^X$ とする．ただし 2^X は X の部分集合の全体.

(i) $\mathcal{E}$ が**有限加法族**であるとは次の 3 条件を満すことをいう.
(a) $\emptyset, X \in \mathcal{E}$,
(b) $A \in \mathcal{E}$ ならば $A^c := X \setminus A \in \mathcal{E}$,
(c) $A, B \in \mathcal{E}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{E}$.

(ii) $\mathcal{E}$ が $\boldsymbol{\sigma}$ **加法族**であるとは上の条件 (c) の代りに
(c′) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ ならば $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}$
を満すことをいう.

Def 2.2 (測度)**.**　(i) $\mathcal{E}$ を X 上の有限加法族とする．$\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ が**有限加法的測度**であるとは，$\mu \not\equiv \infty$ であり，さらに

$$A, B \in \mathcal{E},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

となることをいう．ただし $\infty = \infty$ を許す．この性質を μ の**有限加法性**と呼ぶ.

(ii) $\mathcal{E}$ を X 上の σ 加法族とする．$\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ が**測度**であるとは，$\mu \not\equiv \infty$ であり，さらに

$$A_j \in \mathcal{E},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Longrightarrow \mu\biggl(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\biggr) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

となることをいう．ただし $\infty = \infty$ を許す．この性質を μ の $\boldsymbol{\sigma}$ **加法性**と呼ぶ.

(iii) $\mathcal{E}$ が σ 加法族で，μ が測度のとき，三つ組 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を**測度空間**という.

Thm 2.3 (測度の単調性)**.** μ を σ 加法族 $\mathcal{E}$ 上の測度とする.

(i) $A_n \in \mathcal{E}$，$A_n \subset A_{n+1}$，$n = 1, 2, \dots$，とする．このとき $\mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(ii) $A_n \in \mathcal{E}$，$A_n \supset A_{n+1}$，$n = 1, 2, \dots$，とする．さらに $\mu(A_1) < \infty$ と仮定する．このとき $\mu\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Proof.　(i) $A_0 = \emptyset$，$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ とおけば，$\{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ は互いに素で，$\bigcup_{n=1}^{k} B_n = A_k$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となる．よって μ の σ 加法性より，

$$\begin{aligned}\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) &= \mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\biggr) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

(ii) $A_1 \setminus A_n \subset A_1 \setminus A_{n+1}$ より，(i) の結果を用いると

$$\mu\biggl(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) = \mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_1 \setminus A_n\}\biggr) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n).$$

これを

$$\mu\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) + \mu\Bigl(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \mu(A_1),$$
$$\mu(A_n) + \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1), \quad \mu(A_1) < \infty$$

と合わせれば

$$\begin{aligned}\mu\biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) &= \mu(A_1) - \mu\biggl(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) \\ &= \lim_{n\to\infty}\{\mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A_n)\} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

Def 2.4 (外測度)**.** $\mathcal{E}$ を有限加法族とし，μ を有限加法的測度とする．

$$\mu^*(A) = \inf\biggl\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \,\Big|\, B_j \in \mathcal{E}, \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset A\biggr\}, \quad A \subset X$$

とおき，μ^* を μ の**外測度**と呼ぶ．

Thm 2.5 (Caratheodory の拡張定理)**.** $\mathcal{E}_0$ を有限加法族とし，μ を有限加法的測度，μ^* をその外測度とする．さらに $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}_0$ が $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ および $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$ を満たせば，$\mu\bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\bigr) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ が成り立つとする．

$$\mathcal{E} = \{B \subset X \,|\, \mu^*(G) = \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B^c \cap G), \forall G \subset X\}$$

とおく．このとき

(i) $\mathcal{E}$ は σ 加法族である．

(ii) μ^* は $\mathcal{E}$ 上の測度である．

(iii) $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ であり，さらに $\mu^*(A) = \mu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{E}_0)$ である．

Proof. (1) 次式が成り立つことを示す.

$$\mu^*(A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{E}_0. \tag{2.1}$$

$\because$) $A \in \mathcal{E}_0$ とする．$A \subset A$ より，$\mu^*(A) \leq \mu(A)$ は明らか．

$\varepsilon > 0$ とし，$A_j \in \mathcal{E}_0$ を $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A$，$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ となるようにとる．

$C_j = A\cap\left\{A_j\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{j-1}A_k\right)\right\}$ とすれば，$C_j\in\mathcal{E}_0$，$\bigcup_{j=1}^{\infty}C_j = A$，$C_i\cap C_j=\emptyset$ となる．仮定より

$$\mu(A)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(C_j)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\le\mu^*(A)+\varepsilon.$$

$\varepsilon\to 0$ とすれば $\mu(A)\le\mu^*(A)$ となり，(2.1) が従う．///

(2) 次が成り立つことを見る．

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(B_j),\quad\forall B_1,B_2,\dots\in 2^X. \tag{2.2}$$

∵) $\varepsilon>0$ を任意に固定し，$A_{n,k}\in\mathcal{E}_0$ を $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n,k}\supset B_n$，$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_{n,k})<\mu^*(B_n)+\varepsilon 2^{-n}$ となるように選ぶ．このとき，$\bigcup_{n,k=1}^{\infty}A_{n,k}\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ であるから，

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\le\sum_{n,k=1}^{\infty}\mu(A_{n,k})\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mu^*(B_n)+\varepsilon 2^{-n}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(B_n)+\varepsilon.$$

$\varepsilon\to 0$ とすれば (2.2) が従う．///

(3) $\mathcal{E}$ は有限加法族であり，さらに $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{E}$ が互いに素ならば次が成り立つことを示す.

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}\big(B_k\cap G\big)\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu^*(B_k\cap G),\quad\forall G\subset X. \tag{2.3}$$

∵) $\mu^*(\emptyset)=0$ より，$\emptyset, X\in\mathcal{E}$ となる．また，$\mathcal{E}$ の定義より，$B\in\mathcal{E}$ ならば $B^c\in\mathcal{E}$ となることは明らかである．したがって，有限加法族であることを見るには，後は $B_1,B_2\in\mathcal{E}$ のときに $B_1\cap B_2\in\mathcal{E}$ を示せばよい (演習問題 Q2.1 参照)．$B_1,B_2\in\mathcal{E}$ より

$$\begin{aligned}
&\mu^*((B_1\cap B_2)^c\cap G)+\mu^*((B_1\cap B_2)\cap G)\\
&\quad=\mu^*((B_1^c\cup B_2^c)\cap G)+\mu^*((B_1\cap B_2)\cap G)\\
&\quad=\mu^*(B_2\cap\{(B_1^c\cup B_2^c)\cap G\})+\mu^*(B_2^c\cap\{(B_1^c\cup B_2^c)\cap G\})\\
&\qquad+\mu^*((B_1\cap B_2)\cap G)\\
&\quad=\mu^*(B_2\cap B_1^c\cap G)+\mu^*(B_2^c\cap G)+\mu^*((B_1\cap B_2)\cap G)\\
&\quad=\mu^*(B_2\cap G)+\mu^*(B_2^c\cap G)=\mu^*(G)
\end{aligned}$$

したがって $B_1\cap B_2\in\mathcal{E}$.

　(2.3) は，$n=2$ のときに示せば十分である．$B_1,B_2\in\mathcal{E}$，$B_1\cap B_2=\emptyset$，$G\subset X$ とする．このとき $B_1\in\mathcal{E}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mu^*((B_1\cup B_2)\cap G)&=\mu^*(B_1\cap\{(B_1\cup B_2)\cap G\})+\mu^*(B_1^c\cap\{(B_1\cup B_2)\cap G\})\\
&=\mu^*(B_1\cap G)+\mu^*(B_2\cap G).///
\end{aligned}$$

(4) $\mathcal{E}$ は σ 加法族であり，μ^* は $\mathcal{E}$ 上の測度である．
∵) $B_n \in \mathcal{E}$ は互いに素であるとし，$B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ とおく．$G \subset X$ とする．$G = (B \cap G) \cup (B^c \cap G)$ であるから，(2.2) より

$$\mu^*(G) \le \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B^c \cap G). \tag{2.4}$$

$M_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ とおく．(3) より $M_n \in \mathcal{E}$ である．(2.3) より，

$$\mu^*(G) = \mu^*(M_n \cap G) + \mu^*(M_n^c \cap G).$$

$M_n \subset B$ より，$M_n^c \supset B^c$ である．よって $\mu^*(M_n^c \cap G) \ge \mu^*(B^c \cap G)$．また，(2.3) より $\mu^*(M_n \cap G) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B_k \cap G)$．これらをあわせると

$$\mu^*(G) \ge \sum_{k=1}^n \mu^*(B_k \cap G) + \mu^*(B^c \cap G).$$

$n \to \infty$ とし，さらに (2.2) より $\sum_{k=1}^\infty \mu^*(B_k \cap G) \ge \mu^*(B \cap G)$ となることに注意すれば，

$$\mu^*(G) \ge \sum_{k=1}^\infty \mu^*(B_k \cap G) + \mu^*(B^c \cap G) \ge \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B^c \cap G)$$

となる．(2.4) とあわせて

$$\mu^*(G) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(B_k \cap G) + \mu^*(B^c \cap G) = \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B^c \cap G).$$

よって $B \in \mathcal{E}$ となる．この等式で $G = B$ とおけば σ 加法性も従う．///

(5) $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ である．
∵) $A \in \mathcal{E}_0$，$G \subset X$ とする．$A_n \in \mathcal{E}_0$ を $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \supset G$ ととる．このとき

$$A \cap G \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A \cap A_n), \quad A^c \cap G \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A^c \cap A_n)$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \{\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)\} \ge \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A^c \cap G).$$

ここで $\{A_n\}$ について下限をとれば

$$\mu^*(G) \ge \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A^c \cap G).$$

逆の不等式は μ^* の劣加法性より従うので，

$$\mu^*(G) = \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A^c \cap G).$$

すなわち，$A \in \mathcal{E}$．　□

Cor 2.6. $\mathcal{E}_0$ を有限加法族，μ を有限加法的測度とし，互いに素な $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}_0$ が $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{E}_0$ を満たせば，$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$ が成り立つとする．このとき $\sigma[\mathcal{E}_0]$ 上の測度 $\tilde{\mu}$ で，$\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{E}_0)$ を満たすものが存在する．

演習問題

Q2.1. (i) $\{\emptyset, X\}$, 2^X はともに σ 加法族であることを確かめよ．
(ii) $A \subset X$ とする．$\mathcal{J} = \{\emptyset, X, A, A^c\}$ とする．$\mathcal{J}$ は有限加法族となることを証明せよ．
(iii) $\mathcal{E}$ が，Def2.1 の (a)，(b) を満たすとする．このとき，$\mathcal{E}$ が有限加法族となるための必要十分条件は，任意の $A, B \in \mathcal{E}$ に対し，$A \cap B \in \mathcal{E}$ となることであることを確かめよ．
(iv) $\mathcal{E}$ が有限加法族でさらに有限集合であれば，σ 加法族となることを示せ．

Q2.2. (i) $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^X$ は σ 加法族とする．$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ もまた σ 加法族であることを証明せよ．
(ii) Λ を添え字集合とし，$\alpha \in \Lambda$ に対し σ 加法族 $\mathcal{F}_\alpha \subset 2^X$ が対応しているとする．このとき $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha$ もまた σ 加法族であることを証明せよ．
(iii) $\mathcal{A} \subset 2^X$ とする．$\mathcal{A}$ を含む包含関係の意味で最小となる σ 加法族が一意的に存在するを証明せよ．(この σ 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と表し，**$\mathcal{A}$ から生成される σ 加法族**と呼ぶ．)

Q2.3. $X = \mathbb{R}^2$，$\mathcal{E} = \{A \times \mathbb{R}^1 \mid A \subset \mathbb{R}^1\}$，$\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^1 \times B \mid B \subset \mathbb{R}^1\}$ とする．
(i) $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ はともに σ 加法族であることを証明せよ．
(ii) $\mathcal{E} \cup \mathcal{G}$ は σ 加法族か?

Q2.4. (i) μ が有限加法的測度もしくは測度ならば，$\mu(\emptyset) = 0$ を満たすことを示せ．
(ii) 測度は有限加法的測度であることを確かめよ．
(iii) μ が有限加法的測度で，$A, B \in \mathcal{E}$ が $A \subset B$ を満たせば，$\mu(A) \le \mu(B)$ となることを示せ．さらに $\mu(B) < \infty$ ならば，$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ となることを示せ．

Q2.5. μ が有限加法的測度ならば，$A, B \in \mathcal{E}$ に対し，$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ となることを示せ．さらに μ が測度ならば，$A_j \in \mathcal{E}$ に対し，$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ となることを示せ．(この性質を**劣加法性**という．)

Q2.6. $M \in \mathbb{N}$，$X = \{1, 2, \dots, M\}$，$\mathcal{E} = 2^X$ とする．$\mu(A) = \#A/M$ $(A \in \mathcal{E})$ とおく．μ は測度であることを証明せよ．

Q2.7. $X = \mathbb{N}$，$\mathcal{E} = 2^X$，$a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{X}_A(n), \quad A \in \mathcal{E}$$

とおく．ただし $\mathcal{X}_A(n) = 1$ $(n \in A)$，$= 0$ $(n \notin A)$．μ は測度であることを示せ．

Q2.8. Cor2.6 を証明せよ．

Q2.9. $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たせば，$\mu\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big) = 0$ となることを証明せよ．

Q2.10. (i) μ^* を有限加法的測度 μ の外測度とする．$\mu^*(B)=0$ かつ $A\subset B$ ならば，$\mu^*(A)=0$ となることを証明せよ．さらに $\mu^*(B)=0$ ならば，任意の $G\subset X$ に対し，次式が成り立つことを示せ．

$$\mu^*(G)=\mu^*(B\cap G)+\mu^*(B^c\cap G).$$

(ii) $\mu^*(A_n)=0$ ならば $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$ となることを証明せよ．

Q2.11. $n\in\mathbb{N},>3$，$X=\{1,2,\dots,n\}$，$N=\{1,2\}$，$\mathcal{E}_0=\{\emptyset,N,B,N\cup B\,|\,B\subset\{3,\dots,n\}\}$ とおく．$\mu(A)=\#(A\cap\{3,\dots,n\})$ $(A\in\mathcal{E}_0)$ とおく．
(i) $\mathcal{E}_0$ は σ 加法族であり，μ は $\mathcal{E}_0$ 上の測度となることを示せ．
(ii) Thm2.5 の通りに $\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}$ を構成する．$\mathcal{E}=2^X$ となり，$\mathcal{E}_0\neq\mathcal{E}$ であることを確かめよ．
(たとえ $\mathcal{E}_0$ が σ 加法族であっても $\mathcal{E}$ はそれよりも大きくなる)．

Q2.12. $X=\{0,1,2,\dots\}$,

$$\mathcal{E}_0=\left\{A\subset X\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{(i) } 0\in A \text{ かつ } \#A^c<\infty,\text{ もしくは}\\ \text{(ii) } 0\notin A \text{ かつ } \#A<\infty\end{array}\right\},$$

$\mu_0(E)=\#E$ ($=\infty$ を許す) とする．
(i) このとき，$\mathcal{E}_0$ は有限加法族であり，μ_0 は有限加法的であることを確かめよ．
(ii) $\mu_0^*(A)$ を求めよ．
(iii) Thm2.5 の通りに $\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}$ を構成すれば，$\mathcal{E}=2^X$ となることを示せ．
(iv) $\alpha>0$ に対し，$\mu_\alpha(A)=\alpha\mathcal{X}_A(0)+\#(A\setminus\{0\})$ とおく．このとき，$(X,\mathcal{E},\mu_\alpha)$ は測度空間であり，$\mu_\alpha(E)=\mu_0(E)$ $(\forall E\in\mathcal{E}_0)$ が成り立つことを証明せよ．

Q2.13. $\mathcal{E}_0$ を有限加法族とし，μ をその上の有限加法的測度とする．μ は Caratheodory の拡張定理 (Thm 2.5) の条件を満すとし，$(X,\mathcal{E},\mu^*)$ を μ を拡張した測度空間とする．もし $X_k\in\mathcal{E}_0$ で $\mu(X_k)<\infty$，$\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k=X$ なるものが存在すると仮定する．さらに ν を $(X,\sigma(\mathcal{E}_0))$ 上の測度で，$\nu(E)=\mu(E)$ $(\forall E\in\mathcal{E}_0)$ を満すものとする．このとき，$\nu(A)=\mu^*(A)$ $(\forall A\in\sigma(\mathcal{E}_0))$ となることを示せ．

3. Lebesgue 測度

$N \in \mathbb{N}$ を固定しておく．

Def 3.1. (i) $I \subset \mathbb{R}^N$ が**区間**であるとは，$-\infty \le \exists a_i \le b_i \le \infty$，$i = 1, \dots, N$，が存在し，$I = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i]$ と表現されることをいう．ただし $(a, a] = \emptyset$，$(-\infty, \infty] = \mathbb{R}$ とする．

(ii) $J \subset \mathbb{R}^N$ が**区間塊**であるとは，互いに素な区間 I_k，$k = 1, \dots, n$ により，$J = \bigcup_{k=1}^n I_k$ と表されることをいう．区間塊の全体を $\mathcal{F}_0$ とおく;

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ J = \bigcup_{k=1}^n I_k \,\middle|\, I_i \cap I_j = \emptyset \ (i \ne j),\ I_k \text{ は区間} \right\}.$$

(iii) 区間 I の体積を $|I| = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$ と定義し，区間塊 J の**体積**を次で定義する．

$$\lambda_0(J) = \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad (\text{共に} = \infty \text{ を許す})$$

Lem 3.2. 区間 I が互いに素な区間 I_k，$k = 1, \dots, n$，により $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$ と表されたとする．このとき，I は区間塊と見なせるが，$|I| = \lambda_0(I)$ が成り立つ．とくに区間塊 J の体積 $\lambda_0(J)$ はその区間による表現に無関係である．

Proof. 演習問題. □

Prop 3.3. (i) $\mathcal{F}_0$ は有限加法族である．

(ii) λ_0 は $\mathcal{F}_0$ 上有限加法的測度である．

Proof. 証明の粗筋を述べる．
(i) $\emptyset = \prod_{i=1}^N (0, 0]$，$\mathbb{R}^N = \prod_{i=1}^N (-\infty, \infty]$ より，$\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{F}_0$．次に，$A \in \mathcal{F}_0$ ならば $A^c \in \mathcal{F}_0$ となることは容易に分かる．最後に，$A, B \in \mathcal{F}_0$ とする．区間塊をなす区間の境界を用いて共通の細分を作れば $A \cup B \in \mathcal{F}_0$ となることも簡単に分かる．
(ii) $A_1, \dots, A_n$ に共通の細分を作れば，有限加法性は証明できる． □

Def 3.4. (i) λ_0 の外測度を λ_0^* と表す．

$$\lambda_0^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \lambda_0(J_n) \,\middle|\, J_n \in \mathcal{F}_0,\ A \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n \right\}, \quad A \subset \mathbb{R}^N.$$

(ii)
$$\mathcal{F} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^N \,\middle|\, \lambda_0^*(A \cap G) + \lambda_0^*(A^c \cap G) = \lambda_0^*(G),\ \ \forall G \subset \mathbb{R}^N \right\}$$

とおき，$\lambda = \lambda_0^*\big|_{\mathcal{F}}$ とおく．

Thm 3.5. $\mathcal{F}$ は σ 加法族であり，$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ を満たす．さらに，λ は $\mathcal{F}$ 上の測度である．また，$\lambda(J) = \lambda_0(J)$ $(\forall J \in \mathcal{F}_0)$ が成り立つ．($\mathcal{F}$ の元を **Lebesgue 可測集合** λ を $\mathbb{R}^N$ 上の **Lebesgue 測度**という．)

Proof. 互いに素な $F_n \in \mathcal{F}_0$ が，$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}_0$ を満たせば，

$$\lambda_0(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(F_n) \tag{3.1}$$

が成り立つことを示せば，Caratheodory の拡張定理より定理の主張を得る．

まず，$\lambda_0(F) < \infty$ と仮定して，(3.1) を示す．$H_n = F \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ とおく．$H_n \downarrow \emptyset$ である．λ_0 の有限加法性 (Prop.3.3) より，

$$\lambda_0(F) = \lambda_0(H_n) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_0(F_k)$$

となるから，もし $\lambda_0(H_n) \downarrow 0$ が証明できれば，(3.1) が得られる．$\lambda_0(H_n) \downarrow 0$ となることを背理法を用いて証明する．$\lambda_0(H_n) \geq \lambda_0(H_{n+1})$ であるから極限は存在するが，その極限が 0 でないと仮定しよう．すなわち，$\varepsilon > 0$ が存在し，$\lambda_0(H_n) \geq 2\varepsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ が成り立つと仮定する．Q2.7 を用いて，有界な $J_k \in \mathcal{F}_0, \subset H_k$ を $\overline{J_k} \subset H_k$，$\lambda_0(H_k \setminus J_k) < \varepsilon 2^{-k}$ となるように取る ($\overline{B}$ は B の閉包)．このとき

$$\begin{aligned}\lambda_0\left(H_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} J_k\right) &= \lambda_0\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{H_n \setminus J_k\}\right) \\ &\leq \lambda_0\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{H_k \setminus J_k\}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_0(H_k \setminus J_k) < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon 2^{-k} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって

$$\lambda_0\left(\bigcap_{k=1}^{n} J_k\right) = \lambda_0(H_n) - \lambda_0\left(H_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} J_k\right) > \varepsilon.$$

とくに $\bigcap_{k=1}^{n} J_k \neq \emptyset$．したがって $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{J_k} \neq \emptyset$．$J_1$ は有界集合であるから，$\overline{J_1}$ はコンパクト集合となる．$\overline{J_1}$ の閉部分集合族 $\left\{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{J_k} \,|\, n = 1, 2, \ldots\right\}$ は，上の考察より有限交叉性を持つから，$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{J_k} \neq \emptyset$．したがって $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$．これは矛盾である．

次に $\lambda_0(F) = \infty$ とする．このとき，Q2.7 を用いて，有界な $K_m \subset F, K_m \in \mathcal{F}_0$ を $\lambda_0(K_m) \geq m$ ととる．$\lambda_0(F \cap K_m) < \infty$ に注意して，$F \cap K_m = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \cap K_m)$ に (3.1) を適用すれば，

$$m \leq \lambda_0(K_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(F_n \cap K_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(F_n).$$

$m \to \infty$ とすれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(F_n) = \infty = \lambda_0(F)$$

となり，$\lambda_0(F) = \infty$ の場合にも (3.1) が成立する． □

Thm 3.6 (平行移動不変性)．$A \in \mathcal{F}$，$x \in \mathbb{R}^N$ とする．$A + x = \{y + x | y \in A\}$ とおく．このとき，$A + x \in \mathcal{F}$，かつ $\lambda(A + x) = \lambda(A)$．

Proof. $\lambda_0(J+x)=\lambda_0(J)$ となることは容易に分かる．したがって，$\forall G\subset\mathbb{R}^N$ に対し，$\lambda_0^*(G+x)=\lambda_0^*(G)$ が成り立つ．したがってもし $A+x\in\mathcal{F}$ といえれば，$\lambda(A+x)=\lambda(A)$ である．

$A+x\in\mathcal{F}$ となることを示す．$(A+x)^c=A^c+x$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}&\lambda_0^*((A+x)\cap G)+\lambda_0^*((A+x)^c\cap G)\\&\quad=\lambda_0^*(\{A\cap(G+(-x))\}+x)+\lambda_0^*(\{A^c\cap G+(-x)\}+x)\\&\quad=\lambda_0^*(A\cap(G+(-x)))+\lambda_0^*(A^c\cap G+(-x))=\lambda_0^*(G).\end{aligned}$$

したがって $A+x\in\mathcal{F}$. □

Thm 3.7. (i) $A\subset\mathbb{R}^N$ が $\lambda_0^*(A)=0$ を満たせば，$A\in\mathcal{F}$ かつ $\lambda(A)=0$.

(ii) $A\subset\mathbb{R}^N$ が開集合ならば $A\in\mathcal{F}$ である．また A が閉集合ならば $\mathcal{F}$ に属する．

Proof. (i) は Q2.10 から従う．
(ii) 開集合 A は可算個の $J_n\in\mathcal{F}_0$ を用いて $A=\bigcup_{n=1}^\infty J_n$ と表される．よって，Thm3.5 より $A\in\mathcal{F}$ となる．A が閉集合ならば $\mathbb{R}^N\setminus A$ は開集合である．再び，Thm3.5 より $A\in\mathcal{F}$ となる． □

Thm 3.8. (i) $\lambda_0^*(A)=\inf\{\lambda(G)|G$ は開集合，$G\supset A\}$ $(\forall A\subset\mathbb{R}^N)$.

(ii) 任意の $A\in\mathcal{F}$, $\varepsilon>0$ に対し，$\lambda(G\setminus A)<\varepsilon$ を満たす開集合 $G\supset A$ が存在する．

(iii) 任意の $A\in\mathcal{F}$, $\varepsilon>0$ に対し，$\lambda(A\setminus F)<\varepsilon$ を満たす閉集合 $F\subset A$ が存在する．

Proof. (i) $A\subset G$ ならば $\lambda_0^*(A)\le\lambda_0^*(G)$ であるから $\lambda_0^*(A)\le\inf\{\lambda(G)|\cdots\}$.

$\varepsilon>0$ とする．$\lambda_0^*(A)=\lambda_0^{**}(A)$ であった (Q3.6) から，$J_n\in\mathcal{F}_0$ が存在し，$\bigcup_{n=1}^\infty J_n^\circ\supset A$，$\sum_{n=1}^\infty\lambda_0(J_0)\le\lambda_0^*(A)+\varepsilon$ となる．$\bigcup_{n=1}^\infty J_n^\circ$ は開集合であり

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^\infty J_n^\circ\Big)\le\sum_{n=1}^\infty\lambda(J_n^\circ)\le\sum_{n=1}^\infty\lambda(J_n)=\sum_{n=1}^\infty\lambda_0(J_n)\le\lambda_0^*(A)+\varepsilon.$$

よって $\inf\{\lambda(G)|\cdots\}\le\lambda_0^*(A)+\varepsilon$. $\varepsilon\to0$ とすれば $\inf\{\lambda(G)|\cdots\}\le\lambda_0^*(A)$ である．
(ii) $B_n=\{x\in\mathbb{R}^N\,|\,|x|<n\}$，$C_n=A\cap(B_n\setminus B_{n-1})$ とおく．$C_n\in\mathcal{F}$ であり，Def3.4 より，$\lambda_0^*(C_n)=\lambda(C_n)$ である．$\lambda(C_n)<\infty$ であるから，(i) より開集合 $G_n\supset C_n$ で，$\lambda(G_n)<\lambda(C_n)+\varepsilon2^{-n}$ となるものが存在する．このとき，$G=\bigcup_{n=1}^\infty G_n$ とおけば，G は開集合であり，$G\supset A$ を満たす．さらに $G\setminus A\subset\bigcup_{n=1}^\infty(G_n\setminus C_n)$ より，

$$\lambda(G\setminus A)\le\sum_{n=1}^\infty\lambda(G_n\setminus C_n)<\sum_{n=1}^\infty\varepsilon2^{-n}=\varepsilon.$$

(iii) A^c に (ii) を適用し，$G\supset A^c$ なる開集合で $\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$ となるものをとる．$G\setminus A^c=G\cap A=A\setminus G^c$，$A\subset G^c$，であるから，$G^c$ が求める性質を持つ閉集合である． □

演習問題

Q3.1. Lem3.2 を証明せよ．

Q3.2. Prop3.3 を詳しく証明せよ．

Q3.3. (i) $a \in \mathbb{R}^N$，$A = \{a\}$ とする．$\lambda_0^*(A) = 0$ となることを証明せよ．
(ii) $a_n \in \mathbb{R}^N$，$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ とする．$\lambda_0^*(A) = 0$ となることを外測度の定義から直接証明せよ．
(iii) Λ を添え字集合とする．$\alpha \in \Lambda$ に対し $\lambda_0^*(A_\alpha) = 0$ であるが $\lambda_0^*\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big) > 0$ となる例を挙げよ．

Q3.4. (i) $A \subset \mathbb{R}^N$ が有界集合ならば，$\lambda_0^*(A) < \infty$ となることを示せ．
(ii) $0 < \lambda_0^*(A) < \infty$ となる非有界集合を例示せよ．

Q3.5. $K_0 = [0,1]$，$K_1 = [0,1] \setminus (1/3, 2/3)$，$K_2 = K_1 \setminus \{(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$，$K_3 = K_2 \setminus \{(1/27, 2/27) \cup (7/27, 8/27) \cup (19/27, 20/27) \cup (25/27, 26/27)\}$，と K_n を順次前の K_{n-1} の中央の 1/3 区間を抜き取ることで構成する．$K = \bigcap_{n=0}^\infty K_n$ とおく．このとき
(i) K は可算集合ではないことを証明せよ．
(ii) $\lambda_0^*(K) = 0$ となることを証明せよ．

Q3.6. $A \subset \mathbb{R}^N$ に対し，$\lambda_0^{**}(A) = \inf\big\{\sum_{n=1}^\infty \lambda_0(J_n) \,|\, J_n \in \mathcal{F}_0, \bigcup_{n=1}^\infty J_n^\circ \supset A\big\}$ とおく．ただし，B° は B の内核．このとき，$\lambda_0^*(A) = \lambda_0^{**}(A)$ が成り立つことを示せ．

Q3.7. $J \in \mathcal{F}_0, \lambda_0(J) < \infty$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，有界な $K \in \mathcal{F}_0$ で，$\overline{K} \subset J$，$\lambda_0(J \setminus K) < \varepsilon$ となるものが存在することを証明せよ．ただし $\overline{K}$ は K の閉包．また，$\lambda_0(J) = \infty$ ならば，任意の $m > 0$ に対し，有界な $K \in \mathcal{F}_0$ で，$\overline{K} \subset J$，$\lambda_0(K) \geq m$ となるものが存在することを証明せよ．

Q3.8. $J \in \mathcal{F}_0$ に対し，$\lambda_0^*(J) = \lambda_0(J)$ となることを証明せよ．

Q3.9. 開集合 A は可算個の $J_n \in \mathcal{F}_0$ を用いて $A = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$ と表されることを示せ．

Q3.10. $A \in \mathcal{F}$ とする．開集合の列 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$ と $E \in \mathcal{F}$ が存在し，$\lambda(E) = 0$，$E \subset \bigcap_{n=1}^\infty O_n$，$A = \bigcap_{n=1}^\infty O_n \setminus E$ となることを証明せよ．

Q3.11. $A \in \mathcal{F}$ とする．$\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) | F \subset A, F$ は閉集合 $\}$ となることを証明せよ．

さらに閉集合の列 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ と $E \in \mathcal{F}$ が存在し，$\lambda(E) = 0$，$A = E \cup \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ となることを証明せよ．

Q3.12. $A \in \mathcal{F}$ は有界集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus F) < \varepsilon$ をみたす閉集合 $F \subset \mathbb{R}^N$ が存在し，F 上 $\mathcal{X}_A$ は連続となることを証明せよ．

さらに A の有界性がなくてもこの主張が成り立つことを示せ．

Q3.13. $A \subset \mathbb{R}^N$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し開集合 O と閉集合 F が存在し，$F \subset A \subset O$，$\lambda(O \setminus F) < \varepsilon$ となるならば，$A \in \mathcal{F}$ となることを証明せよ．

Q3.14. $\alpha > 0$ に対し，$T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $Tx = \alpha x$ と定義する．$A \subset \mathbb{R}^N$ に対し，$TA = \{Tx \mid x \in A\}$ とおく．このとき $\lambda_0^*(TA) = \alpha^N \lambda_0^*(A)$ となることを証明せよ．

Q3.15. $\alpha > 0$ とし，線形変換 $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $Tx = \alpha x$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ と定義する．$A \in \mathcal{F}$ とし，$TA = \{Tx \mid x \in A\}$ とおく．このとき，$TA \in \mathcal{F}$ であり，さらに $\lambda(TA) = \alpha^N \lambda(A)$ となることを証明せよ．

Q3.16. $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ は直交変換とする (線形変換で対応する行列が直交行列となる)．$A \subset \mathbb{R}^N$ にたいし $UA = \{Ua \mid a \in A\}$ とおく．

(i) $x \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0$ に対し $I(x, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid 0 < y_i - x_i < \alpha, i = 1, \dots N\}$ とする．$\lambda(U(I(x, \alpha))) = \lambda(U(I(0,1))\lambda(I(x, \alpha))$ となることを証明せよ．

(ii) 開集合 O に対し $UO \in \mathcal{F}$ かつ $\lambda(UO) = \lambda(U(I(0,1))\lambda(O)$ となることを証明せよ．

(iii) $\lambda(U(I(0,1)) = 1$ を示せ．

(iv) $A \in \mathcal{F}$ に対し，$\lambda(UA) = \lambda(A)$ を示せ．

Q3.17. $N = 1$ とする．$A \notin \mathcal{F}$ なる $A \subset \mathbb{R}$ の存在を次の手順で証明せよ．
(i) $x - y \in \mathbb{Q}$ となるとき $x \sim y$ とおく．これは同値関係であることを証明せよ．
(ii) $\mathbb{R}/\sim = \Lambda$ とし各 $\alpha \in \Lambda$ に対し $x_\alpha \in (0,1]$ を $\alpha = \{x \in \mathbb{R} | x \sim x_\alpha\}$ となるように選び，$A = \{x_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ とおく．$r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ に対し $A_r = \{x \in (0,1] | x = a + r \text{ or } x = a + r - 1 \ (\exists a \in A)\}$ とおくと，

$$r \neq s \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \Longrightarrow A_r \cap A_s = \emptyset, \quad (0,1] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} A_r$$

となることを証明せよ．
(iii) もし $A \in \mathcal{F}$ ならば $\lambda(A_r) = \lambda(A)$ となることを示し，これと (ii) より矛盾を導け．

Q3.18. $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \dots,\}$ とおく．$a_n > 0$，$n = 1, 2, \dots$，とする．$\bigcup_{n=1}^\infty (q_n - a_n, q_n + a_n) \supset [0,1]$ が成り立たない例を挙げ，その理由を Lebesgue 測度を利用して説明せよ．

4. 可測関数

Def 4.1. (i) $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ と $a \in [-\infty, \infty]$ に対し，

$$\begin{aligned}
&[f > a] = \{x \in X \mid f(x) > a\}, \quad [f < a] = \{x \in X \mid f(x) < a\},\\
&[f \geq a] = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}, \quad [f \leq a] = \{x \in X \mid f(x) \leq a\},\\
&[f = a] = \{x \in X \mid f(x) = a\}
\end{aligned}$$

とおく．$f : X \to [-\infty, \infty]$ が **($\mathcal{E}$-) 可測**であるとは，$[f > a] \in \mathcal{E}$ $(\forall a \in [-\infty, \infty])$.

(ii) $X = \mathbb{R}^N$，$\mathcal{F}$ が Lebesgue 可測集合の全体であるとき，$\mathcal{F}$-可測関数のことを **Lebesgue 可測関数**と呼ぶ.

以下とくに断らない限り，測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を考える.

Prop 4.2. $f : X \to [-\infty, \infty]$ とする.

(i) 次の条件は同値である.

(a) f は $\mathcal{E}$-可測，(b) $[f \leq a] \in \mathcal{E}$ $(\forall a \in [-\infty, \infty])$，(c) $[f < a] \in \mathcal{E}$ $(\forall a \in [-\infty, \infty])$，(d) $[f \geq a] \in \mathcal{E}$ $(\forall a \in [-\infty, \infty])$.

(ii) f が可測ならば，$[f = a] \in \mathcal{E}$ $(\forall a \in [-\infty, \infty])$.

(iii) $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ は共に可測とする．このとき，$[f > g] := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \in \mathcal{E}$，$[f \geq g] := \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{E}$，$[f = g] := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{E}$.

Proof. (i) 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&[f \leq a] = X \setminus [f > a], \quad [f < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \leq a - (1/n)],\\
&[f \geq a] = X \setminus [f < a], \quad [f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \geq a + (1/n)].
\end{aligned}$$

したがって，(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).
(ii) $[f = a] = [f \leq a] \cap [f \geq a]$ と (i) より従う.
(iii) $[f > g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [f > q] \cap [g < q]$ となるので，(i) より，$[f > g] \in \mathcal{E}$．補集合を考えると $[f \leq g] \in \mathcal{E}$．$f, g$ を入れ替えると $[g \leq f] \in \mathcal{E}$．この二つの共通部分により，$[f = g] \in \mathcal{E}$. □

Thm 4.3. (i) $f : X \to [-\infty, \infty]$ は可測とする．$A \in \mathcal{E}$ とし，$f_A(x) = f(x)$ $(x \in A)$，$= 0$ $(x \notin A)$ とおく．このとき f_A は可測関数である.

(ii) $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n = 1, 2, \dots)$ がすべて可測ならば，$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$，$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$，$\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$，$\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ はすべて可測である.

(iii) $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n = 1, 2, \dots)$ がすべて可測関数ならば,

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & (\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \text{ なるとき}), \\ 0, & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

もまた可測関数である.

(iv) f, g は共に可測で有限値を取るとする，すなわち $[|f| = \infty] = [|g| = \infty] = \emptyset$ とする．このとき，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha f + \beta g$ も可測となる．(注: 有限値を取るという仮定は $\infty - \infty$ を避けるためのものである)

(v) fg はともに可測で有限値を取るとする．このとき fg も可測である．

Proof. (i) $a < 0$ ならば，$[f_A > a] = A^c \cup [f > a] \in \mathcal{E}$．$a > 0$ ならば，$[f_A > a] = [f > a] \setminus A \in \mathcal{E}$.
(ii) $\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n > a]$ より，$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ は可測となる．
これら以外の証明は演習問題とする．□

Def 4.4. $f : X \to \mathbb{R}$ が**柱状関数**であるとは，$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ と $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ が存在し，$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{A_k}(x)$ $(\forall x \in X)$ と表されることをいう．ただし，$\mathcal{X}_B(x) = 1$ $(x \in B)$，$= 0$ $(x \notin B)$．柱状関数の全体を $\mathbb{CF}$ と表す.

Thm 4.5. (i) $g \in \mathbb{CF}$ は可測である．

(ii) $f : X \to [0, \infty]$ を可測関数とする．このとき，柱状関数の列 $\{f_n\} \subset \mathbb{CF}$ が存在し，$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$ を満たす．

Proof. (i) 演習問題.
(ii) $E(n, k) = [k2^{-n} \le f < (k + 1)2^{-n}]$ とおき，

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} \mathcal{X}_{E(n,k)}(x) + n\mathcal{X}_{[f \ge n]}$$

とおく．$f_n \in \mathbb{CF}$，$0 \le f_n \le f_{n+1}$，かつ $f_n(x) \to f(x)$ となることは容易に分かる．□

Lebesgue 可測関数に特有の性質; 以下 Lebesgue 測度空間 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{F}, \lambda)$ 上の可測関数について考察する．

Thm 4.6 (Egorov の定理). $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測関数とする．$E \in \mathcal{F}$ は $\lambda(E) < \infty$ を満たし，さらに任意の $x \in E$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在すると仮定する．このとき $\forall \varepsilon > 0$ に対し，閉集合 $F \subset E$ が存在し次のの性質を満たす; (a) $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$，(b) 関数列 $\{f_n\}$ は F 上 f に一様収束する．

Proof. $\varepsilon > 0$ を固定する．$p, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$E_{p,n} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in E \mid |f_k(x) - f(x)| < 2^{-p}\}$$

とおく．$f_n(x) \to f(x)$ $(\forall x \in E)$ より，$E_{p,n} \subset E_{p,n+1} \nearrow E(n \to \infty)$．したがって $\lambda(E_{p,n}) \to \lambda(E)$ である．増大列 $\{n(p)\} \subset \mathbb{N}$ を

$$\lambda(E_{p,n(p)}) > \lambda(E) - \varepsilon 2^{-p-1}$$

となるように選び，

$$H_p = E \setminus E_{p,n(p)}, \quad H = E \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$$

とおく．このとき，$H, H_p \subset E$,

$$\lambda(E \setminus H) = \lambda\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p\right) \le \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(H_p) \le \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-p-1} = \varepsilon/2.$$

さらに $x \in H$ ならば $\forall p \in \mathbb{N}$ に対し $x \notin H_p$．H_p の定義より，これは $x \in E_{p,n(p)}(\forall p)$ を意味する．すなわち $|f_n(x) - f(x)| < 2^{-p}$ $(\forall n \ge n(p), p \in \mathbb{N})$．したがって

$$\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Thm.3.8(ii) より閉集合 $F \subset H$ が存在し，$\lambda(H \setminus F) < \varepsilon/2$ となる．この F が求めるものである． □

Thm 4.7 (Lusin の定理)**.** $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測とする．このとき $\forall \varepsilon > 0$ に対し，閉集合 K で $\lambda(\mathbb{R}^N \setminus K) < \varepsilon$ を満たすものが存在し，さらに K 上 f は連続となる．

Proof. $f \ge 0$ と仮定する．Thm4.5 より，$0 \le f_n \le f_{n+1} \nearrow f$ なる $f_n \in \mathbb{CF}$ が存在する．$\varepsilon > 0$ とする．Q2.12 より，$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n-1}$ となる閉集合 $F_n \subset \mathbb{R}^N$ が存在し，F_n 上 f_n は連続となる．$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ とおけば，F は閉集合で F 上すべての f_n は連続となる．さらに

$$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus F) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\mathbb{R}^N \setminus F_n) < \varepsilon/2.$$

$L_k = F \cap \{n-1 \le |x| < k\}$ とおく．Thm4.6 より，閉集合 $K_k \subset L_k$ が存在し，$\lambda(L_k \setminus K_k) < \varepsilon 2^{-k-1}$ かつ K_k 上 $\{f_n\}$ は一様収束する．$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ とおく．K は

$$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus K) = \lambda(\mathbb{R}^N \setminus F) + \lambda(F \setminus K) = \lambda(\mathbb{R}^N \setminus F) + + \sum_{k=1}^{n} \lambda(L_k \setminus K_k) < \varepsilon$$

を満たす．この K が求めるものである．(位相的な考察が残っているが，それは演習問題とする．) □

演習問題

基本的に測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ で考察する．$\mathbb{R}^N$ が現れたときは Lebesgue 測度空間 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{F}, \lambda)$ を考えているものとする．

Q4.1. (i) $f : X \to (0, \infty)$ は可測関数とする．このとき $g(x) = 1/f(x)$ も可測関数となることを示せ．
(ii) $f : X \to [-\infty, \infty)$ とする．次は同値であることを示せ．
(a) f は可測である，
(b) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対し $G_f = \{x \in X | f(x) \in G\}$ は可測集合である，
(c) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対し $F_f = \{x \in X | f(x) \in F\}$ は可測集合である．
(iii) $f : X \to \mathbb{R}$ は可測関数で，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であれば，合成関数 $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ もまた可測関数となることを証明せよ．

Q4.2. $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ がすべて可測関数ならば，$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$，$\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$，および $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ はすべて可測であることを示せ．

Q4.3. $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ はすべて可測関数とする．集合 $\{x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在する $\}$ は可測集合であることを示し，さらに

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f_n(x), & (\lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ が存在するとき}), \\ 0, & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

もまた可測関数であることを示せ．ただし $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が $\pm\infty$ となってもよい．

Q4.4. (i) f は可測関数，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，αf が可測関数となることを示せ．
(ii) f, g は共に有限値を取る可測関数とする．$\alpha f + \beta g$ も可測関数となることを示せ．
(iii) $f_n : X \to [0, \infty]$ はすべて可測とする．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ もまた可測となることを証明せよ．

Q4.5. $f, g : X \to \mathbb{R}$ は共に可測関数とする．
(i) $(f \pm g)^2$ はともに可測であることを示せ．
(ii) fg も可測であることを示せ．

Q4.6. $f \in \mathbb{CF}$ とする．$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ で，$a_i \neq a_j$，$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$，$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X$，$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}$ となるものが存在することを示し，$f \in \mathbb{CF}$ は可測関数であることを証明せよ．

Q4.7. (i) 連続関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測となることを証明せよ．
(ii) 微分可能関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ の a 方向 $(a \in \mathbb{R}^N)$ への微分 $\partial_a f(x) = \lim_{h \to 0} \{f(x + ha) - f(x)\}/h$ は可測関数であることを証明せよ．(注:微分可能は微係数の連続性を要求しない)

Q4.8. (i) $g : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ を Lebesgue 可測関数とする．$f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ は，$E_f = \{x \in \mathbb{R}^N | f(x) \neq g(x)\}$ とおけば，$\lambda_0^*(E_f) = 0$ を満たすと仮定する．このとき f もまた可測となることを証明せよ．
(ii) Q2.11 を用いて，一般の測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ では (i) の主張が成り立たないことを例を挙げて説明せよ．

Q4.9. $\mathcal{O} = \{G \subset \mathbb{R}^N \,|\, \text{開集合}\}$ とし，$\mathcal{E} = \sigma[\mathcal{O}]$ とおく (Q2.2 参照).
(i) $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ となることを証明せよ．
(ii) $\mu(A) = \lambda(A)$，$A \in \mathcal{E}$，とおけば，$(\mathbb{R}^N, \mathcal{E}, \mu)$ は測度空間となることを証明せよ．
(iii) Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{E}$-可測関数 $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が存在し，$[f \neq g] \in \mathcal{F}$ かつ $\lambda([f \neq g]) = 0$ となることを示せ．

Q4.10. $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \in \mathbb{CF}$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus F) < \varepsilon$ となる閉集合 $F \subset \mathbb{R}^N$ が存在し，F 上 f は連続となることを証明せよ．

Q4.11. $K_k \subset \mathbb{R}^N$ は閉集合で $K_k \subset \{k-1 \leq |x| < k\}$ を満たすとする．$K = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ とする．
(i) K は閉集合であることを示せ．
(ii) $f : K \to \mathbb{R}$ が各 K_k 上で連続ならば，K 上で連続となることを示せ．

Q4.12. $A \subset \mathbb{R}^N, \in \mathcal{F}$ を有界集合とする．$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus E) = 0$ となる開集合列 $G_n \supset G_{n+1} \supset A$ が存在することを証明せよ．ただし $E = \{x | \lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{G_n}(x) = \mathcal{X}_A(x)\}$.

Q4.13. $A \subset \mathbb{R}^N, \in \mathcal{F}$ を有界集合とする．$\lambda(\mathbb{R}^N \setminus E) = 0$ となる $J_n \in \mathcal{F}_0$ が存在することを証明せよ．ただし，$E = \{x | \lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{J_n}(x) = \mathcal{X}_A(x)\}$.

Q4.14. (i) $F \subset \mathbb{R}^N$ は閉集合とし，$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は F 上連続であるとする．このとき $g(x) = f(x)$ $(x \in F)$，$= 0$ $(x \notin F)$ と定義すれば g は可測関数であることを示せ．
(ii) 閉集合の増大列 $F_n \subset F_{n+1} \subset \mathbb{R}^N$ は $\lambda(F_n^c) < 1/n$ を満たすと仮定する．関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ がすべての F_n 上で連続であれば f は可測関数となることを証明せよ．(Lusin の定理の逆)

Q4.15. $F \subset \mathbb{R}^N$ は閉集合で $F^\circ = \emptyset$，$\lambda(F) > 0$ を満たすとする．
(i) 任意の $x \in F$ に対し $x_n \notin F$，$\varepsilon_n > 0$ で $x_n \to x$，$B(x_n, \varepsilon_n) \cap F = \emptyset$ となるものが存在することを証明せよ．ただし $B(y, r) = \{z \in \mathbb{R}^N | \, |y - z| < r\}$.
(ii) $E \in \mathcal{F}$ は $\lambda(E) = 0$ を満たすと仮定する．任意の $y \in \mathbb{R}^N$，$r > 0$ に対し，$B(y, r) \setminus E \neq \emptyset$ となることを証明せよ．
(iii) $E \in \mathcal{F}$ は $\lambda(E) = 0$ を満たすと仮定する．$\mathcal{X}_F$ は $\mathbb{R}^N \setminus E$ 上連続とならないことを示せ．(Lusin の定理で $\varepsilon > 0$ を考えることは不可欠)

Q4.16. $N = 1$ とする．$K_n \subset [0,1]$ を次の手順で構成する．$K_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4})$．$K_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} [a_j^n, b_j^n]$ $(b_j^n < a_{j+1}^n)$ と表すとき $K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{2^n} \{[a_j^n, b_j^n] \setminus (\frac{a_j^n + b_j^n}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n+1}}, \frac{a_j^n + b_j^n}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4^{n+1}})\}$．このとき，$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ とすれば，F は閉集合であり，$\overset{\circ}{F} = \emptyset$ となることを示せ．さらに $\lambda(F) = 1/2$ となることを示せ．

5.　積分

Def 5.1. $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $f \geq 0$ なる $f \in \mathbb{CF}$ に対し，

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}(x), \quad x \in X$$

$$(a_j \geq 0, A_j \in \mathcal{E},\ j = 1, \ldots, n,\ A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j))$$

という表示を持ちいて，その積分 $\int_X f(x)\mu(dx)$ (x を略し $\int_X f d\mu$ とも表す) を次で定義する．

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

$\int_X f d\mu < \infty$ となるとき，f は (μ-) 可積分であるという．

(ii) 可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ に対し，その積分 $\int_X f(x)\mu(dx)$ (もしくは $\int_X f d\mu$ とも表す) を次で定義する．

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sup\left\{ \int_X g(x)\mu(dx) \,\middle|\, g \in \mathbb{CF},\ 0 \leq g \leq f \right\}.$$

$\int_X f d\mu < \infty$ となるとき，f は (μ-) 可積分であるという．

(iii) 可測関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ に対し，$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$，$f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ とおく．$\int_X f^{\pm} d\mu < \infty$ となるとき，f は **(μ-) 可積分**であるといい，その積分 $\int_X f(x)\mu(dx)$ (もしくは $\int_X f d\mu$ とも表す) を次で定義する．

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx).$$

(iv) $E \in \mathcal{F}$ であり，可測関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ が，(a) $f \geq 0$，もしくは (b) 可積分であるとき，

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mathcal{X}_E(x)\mu(dx)$$

と定義する．

Def 5.2. $x \in X$ に対し，命題 $P(x)$ が与えられている．$E \in \mathcal{E}$ が存在し，$\mu(E) = 0$, $x \notin E$ ならば $P(x)$ は真となるとき，**命題 P はほとんど至るところ成り立つ**といい，P a.e. と表す．

Thm 5.3. (i) (線形性) $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ は可積分であるとし，$a, b \in \mathbb{R}$ とする．このとき $aX + bY$ は可積分で，次式が成り立つ．

$$\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu. \tag{5.1}$$

とくに $A\cap B=\emptyset$ なる $A,B\in\mathcal{E}$ に対し,

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

(ii) (正値性) $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ がともに可積分で，$f\geq g$ a.e. を満たせば，$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$. 等号成立は $f=g$ a.e. のときに限る．さらに一般の可積分関数 f,g に対し次が成り立つ.

$$\left|\int_X f d\mu - \int_X g d\mu\right| \leq \int_X |f-g| d\mu.$$

(iii) f が可積分であれば，$|f|<\infty$ a.e. である．

証明にいくつかの補題を準備する．

Lem 5.4. (i) $f\geq 0$ なる $f\in\mathbb{CF}$ の積分 $\int_X f d\mu$ は f の表示によらない.

(ii) 非負可積分関数 $f,g\in\mathbb{CF}$ と $a,b\geq 0$ に対し，$af+bg$ もまた可積分であり，(5.1) が成り立つ.

(iii) 非負可積分関数 $f,g\in\mathbb{CF}$ が $f\geq g$ a.e. を満せば，$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$ が成り立つ．さらに等号成立は $f=g$ a.e. の場合に限る.

(iv) 非負可測関数 $f=\sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{A_j}\in\mathbb{CF}$ に対し,

$$\sum_{j=1}^n a_j\mu(A_j) = \sup\left\{\int_X g d\mu \,\middle|\, g\in\mathbb{CF}, 0\leq g\leq f\right\}.$$

したがって積分の定義は無矛盾である.

Proof. (i) $f=\sum_{j=1}^n a_j\mathcal{X}_{A_j}=\sum_{k=1}^m b_k\mathcal{X}_{B_k}$ ($a_j,b_k\in\mathbb{R}$, $A_j,B_k\in\mathcal{E}$) と表示されたとする．一般性を失うことなく $\bigcup_{j=1}^n A_j=\bigcup_{k=1}^m B_k = X$ としてよい．A_j, B_k から細分を次のように構成する．$C_1,\dots,C_p\in\mathcal{E}$ を,

$$\{C_1,\dots,C_p\} = \left\{ D_1\cap\cdots\cap D_{n+m} \,\middle|\, \begin{array}{l} D_j\in\{A_j,A_j^c\}, 1\leq j\leq n, \\ D_j\in\{B_j,B_j^c\}, n+1\leq j\leq n+m \end{array}\right\}$$

となるように選ぶ．$C_i\cap C_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ がなりたつ．各 j,k に対し，$i(j,1)<\cdots<i(j,s(j))$，$\tilde{i}(k,1)<\cdots<\tilde{i}(k,r(k))$ が存在し,

$$A_j = \bigcup_{\ell=1}^{s(j)} C_{i(j,\ell)},\quad B_k=\bigcup_{\ell=1}^{r(k)} C_{\tilde{i}(k,\ell)}$$

と表現される．これより,

$$\mathcal{X}_{A_j} = \sum_{\ell=1}^{s(j)} \mathcal{X}_{C_{i(j,\ell)}},\quad \mathcal{X}_{B_k} = \sum_{\ell=1}^{r(k)} \mathcal{X}_{C_{\tilde{i}(k,\ell)}}$$

が成り立つ．これと等号 $\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j} = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathcal{X}_{B_k}$ より，

$$\sum_{j:\exists \ell \text{ s.t. } i(j,\ell)=q} a_j = \sum_{k:\exists \ell \text{ s.t. } \tilde{i}(k,\ell)=q} b_k, \quad 1 \leq q \leq p$$

となる．したがって測度 μ の加法性より

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{\ell=1}^{s(j)} \mu(C_{i(j,\ell)}) = \sum_{q=1}^{p} \Bigg(\sum_{(j,\ell):i(j,\ell)=q} a_j \Bigg) \mu(C_q) \\ &= \sum_{q=1}^{p} \Bigg(\sum_{(k,\ell):\tilde{i}(k,\ell)=q} b_k \Bigg) \mu(C_q) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{\ell=1}^{r(k)} \mu(C_{\tilde{i}(k,\ell)}) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_j).\end{aligned}$$

(ii) 上の細分の議論を用いれば，非負可測な $f, g \in \mathbb{CF}$ に対し，$A_i \cap A_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ を満す $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathcal{X}_{A_i}$$

と表すことができる．主張はこの表示から直ちに従う．
(iii) (ii) の通りに f, g を表現する．$f \geq g$ a.e. であるから，$a_i < b_i$ なる i については $\mu(A_i) = 0$ である．よって

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i;a_i \geq b_i} a_i \mu(A_i) &\geq \sum_{i;a_i \geq b_i} b_i \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(A_i) = \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

等号成立は $a_i \geq b_i$ なる i に対して，$a_i = b_i$ が成り立つときに限る．すなわち $f = g$ なるときに限る．
(iv) 上限の定義と (iii) で見た正値性より明らか．　□

Lem 5.5.　(i) $f_n, f \in \mathbb{CF}$ は $f_n, f \geq 0$，$f_n \leq f_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} f_n \geq f$ を満たすとする．このとき $\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

(ii) $f_n, g_n \in \mathbb{CF}$ は $f_n, g_n \geq 0$，$f_n \leq f_{n+1}$，$g_n \leq g_{n+1}$ を満たし，さらに $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ が成り立つとする．このとき $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$.

(iii) $f_n \in \mathbb{CF}$ は $f_n \geq 0$，$f_n \leq f_{n+1}$ を満たすとする．$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ とすれば，$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

(iv) 非負可測関数 $f, g : X \to [0, \infty]$ と $a, b \geq 0$ に対し，(5.1) が成り立つ．

(v) 非負可測関数 f, g が $f \geq g$ a.e. ならば，$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$. さらに等号成立は $f = g$ a.e. の場合に限る．

(vi) 可測関数 f が可積分となるためには $\int_X |f| d\mu < \infty$ となることが必要十分である．とくに，可測関数 f が可積分で，可測関数 g が $|g| \leq |f|$ を満せば，g もまた可積分である．

Proof. (i) $f = \sum_{k=1}^m a_k \mathcal{X}_{A_k}$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ と表す．$\varepsilon > 0$ を固定し，$A_{k,n} = \{x \in A_k \mid f_n(x) \geq (1-\varepsilon)a_k\}$ とおく．このとき，$A_{k,n} \subset A_{k,n+1} \nearrow A_k$ $(n \to \infty)$，$f_n \geq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^m a_k \mathcal{X}_{A_{k,n}}$ であるから，Lem 5.4 より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu &\geq (1-\varepsilon) \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mu(A_{k,n}) \\ &= (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^m a_k \mu(A_k) = (1-\varepsilon)\int_X f d\mu.\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon \searrow 0$ とすれば良い．
(ii) 仮定より $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g_m$ $(\forall m)$．したがって (i) より $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_m d\mu$．$m \to \infty$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu$．逆も同様．
(iii) 積分の定義より $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$．さらに，$g_n \in \mathbb{CF}$ がとれて $0 \leq g_n \leq f$，$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu$ となる．$h_n = \max\{f_n, g_1, \ldots, g_n\}$ とおけば，$h_n \in \mathbb{CF}, \geq 0$，$h_n \leq h_{n+1} \nearrow f$ である．(ii) と補題 5.4 より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(iv) $D_{n,k}(f) = \{x \in X \mid k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$，$E_n(f) = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$ とする．

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n}\mathcal{X}_{D_{n,k}(f)} + n\mathcal{X}_{E_n(f)}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n}\mathcal{X}_{D_{n,k}(g)} + n\mathcal{X}_{E_n(g)}.$$

とおく．このとき，(a) $f_n, g_n \in \mathbb{CF}, \geq 0$，(b) $f_n \leq f_{n+1} \nearrow f$，$g_n \leq g_{n+1} \nearrow g$，(c) $af_n + bg_n \in \mathbb{CF}, \geq 0$，(d) $af_n + bg_n \leq af_{n+1} + bg_{n+1} \nearrow af + bg$．よって (iii) より

$$\begin{aligned}\int_X (af+bg) d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X (af_n + bg_n) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} a\int_X f_n d\mu + b\int_X g_n d\mu = a\int_X f d\mu + b\int_X g d\mu.\end{aligned}$$

(v) (iv) と同様の f_n, g_n を用いる．$f \geq g$ a.e. ならば $f_n \geq g_n$ a.e. であるから，Lem 5.4 より，$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu$．$n \to \infty$ として，$\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$．

$A_n = \{f - g \geq 1/n\}$ とおく．このとき $f - g \geq (1/n)\mathcal{X}_{A_n}$ が成り立つ．したがって線形性と合わせると，

$$0 = \int_X (f-g) d\mu \geq \int_X \frac{1}{n}\mathcal{X}_{A_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

したがって $\mu(A_n) = 0$．測度の劣加法性より，

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = 0.$$

すなわち，$\mu\big(\{f-g>0\}\big)=0$. よって $f\le g$ a.e. $f\ge g$ a.e. と合わせれば $f=g$ a.e.
(vi) $|f|=f^++f^-$ であるから，(iv)，(v) より明らか. □

Lem 5.6. (i) 可積分関数 f,g と，$a,b\in\mathbb{R}$ に対し，$af+bg$ は可積分で，(5.1) が成り立つ.

(ii) 可積分関数 f,g が $f\ge g$ a.e. を満たせば，$\int_X fd\mu\ge\int_X gd\mu$. さらに等号成立は $f=g$ a.e. のときに限る.

(iii) f が可積分であれば，$|f|<\infty$ a.e. である.

Proof. (ii)，(iii) の証明が短いので先に述べる.
(ii) 実際，$f-g\ge 0$ a.e. であるから，非負可積分関数の積分の定義と (i) で示す線形性より

$$\int_X fd\mu-\int_X gd\mu=\int_X (f-g)d\mu\ge 0.$$

等号成立のための条件は Lem 5.5(v) と同様に証明できる.
(iii) $E_n=\{x\in X\,|\,|f(x)|\ge n\}$ とおく．$|f|\ge n\mathcal{X}_{E_n}$ $(\forall n)$ が成り立つ．よって (ii) の正値性と Lem 5.5 より，

$$0\le\mu(E_n)=\int_X\mathcal{X}_{E_n}d\mu\le\int_X(|f|/n)d\mu\to 0\ (n\to\infty).$$

測度の単調性より，

$$\mu(\{|f|=\infty\})=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0.$$

したがって $|f|<\infty$ a.e.
(i) $|af+bg|\le|a||f|+|b||g|$ より，可積分性は補題 5.5(iv,vi) より従う.
　$a>0$ では，$(af)^{\pm}=af^{\pm}$，$a\le 0$ では $(af)^{\pm}=|a|f^{\mp}$ であることに注意すれば,

$$\int_X afd\mu=a\int_X fd\mu.$$

すなわちスカラー倍についての線形性が従う.
　$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=f^+-f^-+g^+-g^-$ であるから，

$$(f+g)^+f^-+g^-=(f+g)^-+f^++g^+.$$

Lem 5.5 より

$$\begin{aligned}&\int_X(f+g)^+d\mu+\int_X f^-d\mu+\int_X g^-d\mu\\&=\int_X\{(f+g)^++f^-+g^-\}d\mu=\int_X\{(f+g)^-+f^++g^+\}d\mu\\&=\int_X(f+g)^-d\mu+\int_X f^+d\mu+\int_X g^+d\mu.\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu \\ &= \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X f^- d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

したがって加法の線形性も示された． □

Lebesgue 積分． 以下，Lebesgue 測度に関する場合 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{F}, \lambda)$ について考える．Lebesgue 測度に関する積分をとくに **Lebesgue 積分**という．

Thm 5.7. $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ は可積分であるとする．$\forall \varepsilon > 0$ に対し，連続関数 $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ で，$\sup\{|x| : g(x) \neq 0\} < \infty$ (この性質を**コンパクトな台を持つ**という) であり，次の評価式を満すものが存在する．

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} g \, d\lambda \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f-g| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Proof.　最初の不等号は既知である．

• $f = \mathcal{X}_E$，$E \in \mathcal{F}$ の場合．

$E_n = \{x \in E : |x| \leq n\}$ とおけば，仮定より $\lambda(E) < \infty$ であるから，$\lambda(E \setminus E_n) \searrow 0$．よって，十分大の $n \in \mathbb{N}$ をとれば

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - \mathcal{X}_{E_n}| \, d\lambda = \lambda(E \setminus E_n) < \varepsilon/2.$$

Theorem 3.8 より閉集合 $F \subset E_n$，開集合 $G \supset E_n$ が存在し，$\lambda(G \setminus F) < \varepsilon/4$ となる．$F \subset E_n$ ゆえ，F はコンパクト集合となり，$\alpha = \mathrm{dist}(F, \mathbb{R}^N \setminus G) > 0$ である (演習問題)．$g(x) = \max\{1 - (2\mathrm{dist}(x,F)/\alpha), 0\}$ とすれば $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ はコンパクトな台を持つ連続関数で，さらに $0 \leq g \leq 1$，$g(x) = 1$ $(x \in F)$，$= 0$ $(x \notin G)$ となる．したがって $|\mathcal{X}_{E_n} - g| \leq 2\mathcal{X}_{G \setminus F}$ である．よって

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{X}_{E_n} - g| \, d\lambda \leq 2\lambda(E \setminus E_n) < \varepsilon/2.$$

したがって

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f-g| \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f - \mathcal{X}_{E_n}| \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{X}_{E_n} - g| \, d\lambda < \varepsilon.$$

• $f \geq 0$ の場合

$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-n} \mathcal{X}_{[k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}]}$ とおく．$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \nearrow f$ である．Lemma 5.5 より

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\lambda \nearrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda.$$

よって十分大の n に対し，

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f - f_n) \, d\lambda < \varepsilon/2.$$

先の考察より，コンパクトな台を持つ連続関数 $g_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が存在し，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_k - \mathcal{X}_{[k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}]}| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{4n \max\{k, 1\}}$$

$g = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} g_k$ とおけば

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - g| \, d\lambda \leq \sum_{k=0}^{n2^n} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{4n} \leq (n2^n + 1)2^{-n} \frac{\varepsilon}{4n} < \varepsilon/2.$$

したがって

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - g| \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f - f_n| \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} |f_n - g| \, d\lambda < \varepsilon.$$

• 一般 f の場合; $f = f^+ - f^-$ という分解を用いればよい. □

Thm 5.8. 可積分関数 $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ と $y \in \mathbb{R}^N$ に対し，$f_y(x) = f(x + y)$ とおく．このとき，f_y は可積分であり，次が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_y \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\lambda.$$

Proof. $\left(f_y\right)^{\pm} = f^{\pm}(\cdot + y)$ であるから，Lebesgue 積分の線形性より $f \geq 0$ と仮定してよい.

$E(n, k) = [k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}]$，$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} k2^{-n} \mathcal{X}_{E(n,k)}$ とおく．このとき，$0 \leq (f_n)_y \leq (f_{n+1})_y \nearrow f(\cdot + y)$ である．さらに $(f_n)_y = \sum_{k=0}^{\infty} k2^{-n} \mathcal{X}_{E(n,k)+y}$ であるから，$(f_n)_y \in \mathbb{CF}$．Lem 5.5，Theorem 3.6 より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f_y d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f_n)_y d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} \lambda(E(n, k) + y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n} \lambda(E(n, k)) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda.
\end{aligned}$$

□

演習問題

基本的に測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ で考察する．$\mathbb{R}^N$ が現れたときは Lebesgue 測度空間を考えているものとする.

Q5.1. $X = \mathbb{N}$，$\mathcal{E} = 2^{\mathbb{N}}$，$a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ と定義する.

(i) $(X, \mathcal{E}, \mu)$ は測度空間となることを証明せよ.

(ii) $f : X \to \mathbb{R}$ とする．f が可積分となるための必用十分条件は級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)a_n$ が絶対収束することであることを証明せよ.

(iii) 可積分関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し，$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)a_n$ となることを示せ.

Q5.2. $a_n > 0$，$A_n \in \mathcal{E}$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{X}_{A_n}(x)$ とおく．

(i) $0 \leq f(x)$ $(\forall x \in X)$ を確かめよ．

(ii) $f_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}$ とするとき $\int_X f_n d\mu$ を求めよ．

(iii) $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n)$ が成り立つことを示せ．

Q5.3. 可測関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ は，ある $a > 2$ に対し $\mu([|f| \geq n]) \leq n^{-a}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たし，さらに $\mu([|f| \leq 1]) < \infty$ を満たすと仮定する．

(i) $g = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{X}_{[n-1 \leq |f| < n]}$ とおく．g は可積分であることを証明せよ．

(ii) $|f| \leq g$ a.e. となることを示し，f は可積分であることを証明せよ．

Q5.4. 非負可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ は，ある $k \in \mathbb{N}$ に対し，$\mu([f \leq n]) \leq n^k$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすとする．このとき任意の $a > 0$ に対し $\exp[-af]$ は可積分であることを証明せよ．

Q5.5. 非負可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ は，ある $\alpha > 0$ に対し，$\mu([|f| \leq n]) \leq e^{\alpha n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすとする．このとき任意の $a > 0$ に対し $\exp[-a|f|^2]$ は可積分であることを証明せよ．

Q5.6. コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ と閉集合 $F \subset \mathbb{R}^N$ は $K \cap F = \emptyset$ を満すとする．このとき $\mathrm{dist}(K, F) > 0$ となることを示せ．

また，K, F ともに単に閉集合ならば，$K \cap F = \emptyset$ でも $\mathrm{dist}(K, F) = 0$ となることがあることを例を挙げて示せ．

Q5.7. 可測関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は，$\sup_{x \in \mathbb{R}^N}(1 + |x|)^{N+1}|f(x)| < \infty$ を満たすとする．このとき f は Lebesgue 可積分となることを証明せよ．

Q5.8. $N = 1$ とする．可測関数 $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ を，$f = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{X}_{[n, n+(1/n^3))}$ とおく．

(i) f は Lebesgue 可積分であることを証明せよ．

(ii) $\limsup_{x \to \infty} f(x) = \infty$ となることを証明せよ．

Q5.9. $\alpha > 0$ とする．線形変換 $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $Tx = \alpha x$ と定義する．$f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ を非負可測関数とする．

(i) $g(x) = f(T(x))$ とおけば g もまた可測関数であることを示せ．

(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} g d\lambda = \alpha^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda$ となることを証明せよ．

Q5.10. $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ は可積分であるとする．

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，コンパクトな台を持つ $g \in C(\mathbb{R}^N)$ が取れて次式が成立することを示せ．

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - g(x+y)| \lambda(dx) < \varepsilon.$$

(ii) 次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{|y| \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \big| f(x+y) - f(x) \big| \lambda(dx) = 0.$$

Q5.11. $U:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ を直交変換，$f:\mathbb{R}^N\to[-\infty,\infty]$ を可積分関数とする．$f_U(x)=f(Ux)$ とおく．次が成り立つことを示せ.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_U d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda.$$

Q5.12. $N=1$ における Lebesgue 測度に関する積分を考える．$f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は非増加関数とする $(x\le y \Rightarrow f(x)\ge f(y))$．$g(x)=f(x)$ $(x\ge 0)$，$=0$ $(x<0)$，$h=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\mathcal{X}_{[k,k+1)}$ とおく.

(i) もし $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)<\infty$ ならば，h,g ともに可積分であることを証明せよ.

(ii) もし $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\infty$ ならば，$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda=\infty$ となることを示せ.

(iii) $\alpha>0$ とし，$f(x)=(1+x^2)^{-\alpha/2}$ $(x\ge 0)$，$=0$ $(x<0)$ とおく．$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x)<\infty$ となるための必要十分条件は $\alpha>1$ であることを示せ.

Q5.13. $N=1$ とする．$g(x)=\{(3\pi/4)+2n\pi\}^{-1}\sqrt{2}^{-1}$ $(x\in[(\pi/4)+2n\pi,(3\pi/4)+2n\pi),\ n=0,1,\ldots)$，$=0$ (それ以外) とおく.

(i) $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda=\infty$ を証明せよ.

(ii) $f(x)=(\sin x)/x$ $(x>0)$，$=0$ $(x\le 0)$ は可積分か？

6. 収束定理 — 厳密に —

Thm 6.1 (単調収束定理)**.** $(X,\mathcal{E},\mu)$ を測度空間とする．可測関数 $f, f_n : X \to [-\infty,\infty]$ が，$0 \le f_n \le f_{n+1} \nearrow f$ a.e. を満せば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

ただし $\infty = \infty$ を許す．

Proof. (i) $E \in \mathcal{E}$ を，$\mu(X \setminus E) = 0$ かつ $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \nearrow f(x)$ $(\forall x \in E)$ となるようにとる．$f_0 = 0$ とおく．$(f_m - f_{m-1})\mathcal{X}_E \ge 0$ に注意し，$0 \le g_{m,n} \le g_{m,n+1} \nearrow (f_m - f_{m-1})\mathcal{X}_E$ $(n \to \infty)$ なる $g_{m,n} \in \mathbb{CF}, \ge 0$ をとる．$h_n = \sum_{m=1}^n g_{m,n}$ とおく．$h_n \in \mathbb{CF}, \ge 0$，$h_n \le h_{n+1}$ である．さらに

$$\sum_{m=1}^k g_{m,n} \le h_n \le \sum_{m=1}^n (f_m - f_{m-1})\mathcal{X}_E \le f_n\mathcal{X}_E \quad (k \le n).$$

よって，$h_n \nearrow f\mathcal{X}_E$．したがって Lemma 5.5(iii) より

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu = \int_X f\mathcal{X}_E d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathcal{X}_E d\mu \\ \le \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\mathcal{X}_E d\mu \le \int_X f\mathcal{X}_E d\mu = \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

□

Thm 6.2 (Fatou の補題)**.** 可測関数 $f_n : X \to [-\infty,\infty]$ が，$f_n \ge 0$ a.e. であれば，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

ただし $\infty \le \infty$ を許す．

Proof. $g_n = \inf\{f_m \,|\, m \ge n\}$ とおけば，$0 \le g_n \le g_{n+1} \nearrow \liminf_{k\to\infty} f_k$ a.e. となる．単調収束定理を用いれば，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu.$$

$g_n \le f_n$ より $\int_X g_n d\mu \le \int_X f_n d\mu$．したがって

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

□

Thm 6.3 (Lebesgue の優収束定理)**.** $f_n, \Phi \ge 0$ は可積分で $|f_n| \le \Phi$ が a.s. に成り立つと仮定する．さらに $f_n \to f$ a.s. ならば，f は可積分で，次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Proof. $|f| \le \Phi$ a.e. であるから，f は可積分である．
$0 \le (\pm f_n) + \Phi \to \pm f + \Phi$ a.e. であるから，Fatou の補題と線形性より

$$\begin{aligned}\pm \int_X f d\mu &= \int_X (\pm f + \Phi) d\mu - \int_X \Phi d\mu \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_X (\pm f_n + \Phi) d\mu - \int_X \Phi d\mu = \liminf_{n\to\infty} \pm \int_X f_n d\mu.\end{aligned}$$

これより望む等式を得る． □

Cor 6.4 (無限級数)**.** 可測関数 $f_n : X \to [-\infty, \infty]$，$n = 1, 2, \ldots$，は次のいずれかを満たすと仮定する．

$$(a)\ f_n \ge 0 \ \text{ a.e.}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty.$$

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ がほとんど至るところ存在し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

Proof. (a) 非負項からなる無限級数であるから $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ がほとんど至るところ単調非減少極限として存在する ($= \infty$ を許す)．等式は単調収束定理の帰結である．
(b) (a) と仮定より

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Thm 5.3(iii) より $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ a.e. である．したがって無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ はほとんど至るところ絶対収束極限として存在する．$\left|\sum_{n=1}^{m} f_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ より，Lebesgue の優収束定理を用いて等式を得る． □

Cor 6.5 (Lebesgue の収束定理 (連続版))**.** $d \in \mathbb{N}$，$U \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とする．$f : U \times X \to \mathbb{R}$ は

(a) $\forall t \in U$ に対し，$f(t, \cdot)$ は可積分であり，
(b) ほとんどすべての $x \in X$ に対し，$U \ni t \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^N$ は連続であり，
(c) 非負可積分関数 Φ が存在し，任意の $t \in U$ に対し，$|f(t, \cdot)| \le \Phi$ a.e. である

と仮定する．このとき関数 $U \ni t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x)\, d\lambda(x)$ は連続である．

Proof. $t_0 \in U$ とする．$t_n, s_n \to t_0$ が存在し，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X f(s_n, x)\mu(dx) &= \liminf_{t\to t_0} \int_X f(t, x)\mu(dx), \\ \lim_{n\to\infty} \int_X f(t_n, x)\mu(dx) &= \limsup_{t\to t_0} \int_X f(t, x)\mu(dx)\end{aligned}$$

となる．Lebesgue の優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(s_n,x)\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}^N} f(t_0,x)\mu(dx)=\lim_{n\to\infty}\int_X f(t_n,x)\mu(dx)$$

となるから，

$$\liminf_{t\to t_0}\int_X f(t,x)\mu(dx)=\limsup_{t\to t_0}\int_X f(t,x)\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}^N} f(t_0,x)\mu(dx).$$

よって連続性が従う． □

Cor 6.6 (Lebesgue の収束定理 (微分版))**.** $-\infty\le a<b\le\infty$ とし，$f:(a,b)\times X\to\mathbb{R}$ は

(a) $\forall t\in(a,b)$ に対し，$f(t,\cdot):X\to\mathbb{R}$ が可積分であり，

(b) ほとんどすべての $x\in X$ に対し，$(a,b)\ni t\mapsto f(t,x)\in\mathbb{R}$ は連続的微分可能であり，

(c) 非負可積分関数 $\Phi:X\to[0,\infty]$ が存在し，$\sup_{t\in(a,b)}\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right|\le\Phi$ a.e. となる

と仮定する．このとき各 $t\in(a,b)$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)$ は可積分であり，関数 $(a,b)\ni t\mapsto\int_X f(t,x)\mu(dx)$ は微分可能であり，さらに次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(t,x)\mu(dx)=\int_X\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mu(dx). \tag{6.1}$$

Proof. $t\mapsto f(t,x)$ は微分可能であるから，

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)=\lim_{n\to\infty}n\{f(t+(1/n),x)-f(t,x)\}.$$

したがって $\dfrac{\partial}{\partial t}f(t,\cdot)$ は可測となる．可積分性は仮定 (c) より従う．

$t_0\in(a,b)$ を任意に固定する．

$$h(t,x)=\begin{cases}\dfrac{f(t+t_0,x)-f(t_0,x)}{t}, & t\in(a-t_0,b-t_0),t\neq0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}f(t_0,x), & t=0,\end{cases}$$

とおく．$(a-t_0,b-t_0)\ni t\mapsto h(t,x)$ は連続である．Taylor 展開より，$t\neq0$ ならば

$$|h(t,x)|=\frac{1}{|t|}\left|\int_{t_0}^{t+t_0}\frac{\partial f}{\partial t}(s,x)ds\right|\le\Phi(x),\quad \text{a.e. } x\in X.$$

よって，$|h(t,\cdot)|\le\Phi$ a.e. である．Corollary 6.5 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\left\{\int_X f(t+t_0,x)\mu(dx)-\int_X f(t_0,x)\mu(dx)\right\}&=\int_X h(t,x)\mu(dx)\\ \longrightarrow\int_X h(t_0,x)\mu(dx)&=\int_X\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\mu(dx)\quad(t\to0).\end{aligned}$$

したがって $t \mapsto \int_X f(t,x)\mu(dx)$ は微分可能であり，(6.1) が成立する．　$\square$

Lebesgue 積分．

Thm 6.7 (Riemann 積分)**．** $-\infty < a_i < b_i < \infty$，$i = 1, \ldots, N$，とし，$D = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ とおく．$f : D \to \mathbb{R}$ は有界かつ Riemann 積分可能であると仮定する．このとき $f\mathcal{X}_D$ は Lebesgue か積分でありさらに

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N)dx_1 \ldots dx_N = \int_D f d\lambda \left(= \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{X}_D d\lambda\right).$$

ただし左辺は Riemann 積分.

Proof.　$|f\mathcal{X}_D| \le \sup_{x \in D} |f(x)|\mathcal{X}_D$ であるから，$f\mathcal{X}_D$ は Lebesgue 可積分となる．
$n \in \mathbb{N}$，$k = (k_1, \ldots, k_N) \in \{0, 1, \ldots, \}^N$ に対し，

$$\begin{aligned}
I(n,k) &= \prod_{i=1}^N \bigl[a_i + k_i(b_i - a_i)2^{-n}, a_i + (k_i + 1)(b_i - a_i)2^{-n}\bigr), \\
m_{n,k} &= \inf\{f(x) : x \in I(n,k)\}, \quad M_{n,k} = \sup\{f(x) : x \in I(n,k)\}, \\
h_n(x) &= \sum_{k=0}^{2^n - 1} m_{n,k}\mathcal{X}_{I(n,k)}, \quad H_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} M_{n,k}\mathcal{X}_{I(n,k)},
\end{aligned}$$

とおく．$h_n, H_n \in \mathbb{CF}$ は明らかである．f が Riemann 積分可能であるから，Darboux の定理より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h_n \, d\lambda &= \sum_{k=0}^{2^n-1} m_{n,k} 2^{-nN} \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \\
&\longrightarrow \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N)dx_1 \ldots dx_N, \\
\int_{\mathbb{R}^N} H_n \, d\lambda &= \sum_{k=0}^{2^n-1} M_{n,k} 2^{-nN} \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \\
&\longrightarrow \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N)dx_1 \ldots dx_N.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

容易に分かるように $h_n \le h_{n+1}$，$H_n \ge H_{n+1}$ である．$h = \lim_{n\to\infty} h_n$，$H = \lim_{n\to\infty} H_n$ とおく．h, H はともに Lebesgue 可積分であり，さらに $|h_n|, |H_n| \le \sup_{x\in D} |f(x)|\mathcal{X}_D$ であるから，Lebesgue の優収束定理と (6.2) により

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h \, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h_n \, d\lambda = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N)dx_1 \ldots dx_N \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} H \, d\lambda.
\end{aligned}$$

$h_n \le f\mathcal{X}_D \le H_n$ であるから $h \le f\mathcal{X}_D \le H$ となる．したがって上の等式と合わせて $h = f\mathcal{X}_D = H$ a.e. である (Thm 5.3)．上の等式に代入すれば

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_N)dx_1 \ldots dx_N = \int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{X}_D d\lambda.$$

□

Thm 6.8. $N=1$ とする．$-\infty<a<b<\infty$ とし，関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し，$\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，$\overline{f}(x)=f(x)\ (x\in[a,b])$，$=0\ (x\notin[a,b])$ と定義する．

(i) f が L-可測であるための必要十分条件は $\overline{f}$ が Lebesgue 可測であることである．

(ii) f が L-可積分であるための必要十分条件は $\overline{f}$ が Lebesgue 可積分であることである．

さらにこのとき $\displaystyle\int_{[a,b]} f\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}}\overline{f}\,d\lambda$ が成り立つ．

Proof. **(1)** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は L-可測であるとする．

このとき，階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と，$E\subset[a,b]$ が存在し，$\lambda_0^*(E)=0$ かつ $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ (x\notin E)$ となる．よって，$\overline{f_n}\to\overline{f}$ a.e. である．とくに，$\limsup_{n\to\infty}\overline{f_n}=\overline{f}$ a.e. かつ $\overline{f_n}\in\mathbb{CF}$ であるから，$\overline{f}$ は Lebesgue 可測である．

(2) f は L-可積分であるとする．

まず，f が有界な場合を考える．このとき，$|\overline{f}|\le\left\{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\right\}\mathcal{X}_{[a,b]}$ であり，$\mathcal{X}_{[a,b]}$ は Lebesgue 可積分であるから，$\overline{f}$ も Lebesgue 可積分となる．

さらに，$M=\sup_{n\in\mathbb{N},x\in[a,b]}|f_n(x)|<\infty$ なる階段関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$f_n\to f$ a.e. かつ $\int_a^b f_n(x)dx\to\int_{[a,b]}f d\lambda$ となる．階段関数に対しては，$\int_a^b f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\overline{f_n}d\lambda$ が成り立つ．$|\overline{f_n}|\le M\mathcal{X}_{[a,b]}$ であるから，Lebesgue の優収束定理を用いれば，

$$\int_{[a,b]}f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\overline{f_n}d\lambda=\int_{\mathbb{R}}\overline{f}\,d\lambda.$$

つぎに，f は有界でないとする．このとき，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{[a,b]}\min\{n,|f|\}d\lambda<\infty,\quad \int_{[a,b]}fd\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\max\{-n,\min\{f,n\}\}\,d\lambda.$$

上の考察と，単調収束定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\overline{f}|d\lambda&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\min\{n,|\overline{f}|\}d\lambda\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\overline{\min\{n,|f|\}}d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\min\{n,|f|\}d\lambda<\infty.\end{aligned}$$

したがって $\overline{f}$ は Lebesgue 可積分である．

さらに，$|\max\{-n,\min\{\overline{f},n\}\}|\le|\overline{f}|$，$\max\{-n,\min\{\overline{f},n\}\}\to\overline{f}$ であるか

ら，上の考察と Lebesgue の優収束定理を用いれば，

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f\,d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \max\{-n,\min\{f,n\}\}\,d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \overline{\max\{-n,\min\{f,n\}\}}\,d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \max\{-n,\min\{\overline{f},n\}\}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} d\lambda.\end{aligned}$$

(3) $\overline{f}$ が Lebesgue 可測とする．

(3-1) Lebesgue 可測関数 h, g に対し，

$$d(h,g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|h-g|}{1+|h-g|}\mathcal{X}_{[a,b]} d\lambda$$

とおく．

$$0 \le d(h,g) < \infty, \quad d(h,g) = d(g,h), \quad d(h,g) \le d(h,k) + d(k,g)$$

が成り立つ．実際，前二つは容易に証明でき，最後は実数に対する次の簡単な不等式からしたがう．

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(3-2) Lebesgue 可測関数 h_n, h に対し，$d(h_n, h) \to 0$ が成り立てば，部分列 $\{h_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ に対し，$\lim_{j\to\infty} h_{n_j}\mathcal{X}_{[a,b]} = h\mathcal{X}_{[a,b]}$ a.e. となることを示そう．

$n_j < n_{j+1}$ を $d(h_{n_j}, h) < 4^{-j}$ となるようにとる．$A_j = \{x \in [a,b] \,|\, |h(x) - h_{n_j}(x)| \ge 2^{-j}\}$ とおく．$[0,\infty) \ni y \mapsto \frac{y}{1+y}$ は単調増加関数であるから，

$$\frac{2^{-j}}{1+2^{-j}}\mathcal{X}_{A_j} \le \frac{|h-h_{n_j}|}{1+|h-h_{n_j}|}\mathcal{X}_{[a,b]}.$$

これより，

$$\lambda(A_j) \le \frac{1+2^{-j}}{2^{-j}} d(h_{n_j}, h) \le 2^{-(j-1)}.$$

$A = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j$ とおけば，

$$0 \le \lambda(A) \le \lambda\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=m}^{\infty} \lambda(A_j) \to 0 \ \ (m \to \infty)$$

となる．すなわち，$\lambda(A) = 0$．また，$x \in [a,b]\backslash A$ ならば，$m \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $j \ge m$ に対し，$|h_{n_j}(x) - h(x)| < 2^{-j}$ となる．すなわち，$\lim_{j\to\infty} h_{n_j}(x) = h(x)$ である．よって，$\lim_{j\to\infty} h_{n_j}\mathcal{X}_{[a,b]} = h\mathcal{X}_{[a,b]}$ a.e. となる．

(3-3) $\dfrac{|y|}{1+|y|} \le 1$ であるから，Lebesgue の優収束定理を用いれば，

$$\lim_{n\to\infty} d(\max\{-n,\min\{\overline{f},n\}\}, \overline{f}) = 0$$

となる．

$\min\{\overline{f}, n\}$ は Lebesgue 可積分であるから，Thm 5.7 より，コンパクトな台を持つ連続関数 $g_{n,m}$ が存在し，

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |\max\{-n, \min\{\overline{f}, n\}\} - g_{n,m}| d\lambda = 0$$

となる．$\dfrac{|y|}{1+|y|} \leq |y|$ であるから，これより，

$$\lim_{m\to\infty} d(\max\{-n, \min\{\overline{f}, n\}\}, g_{n,m}) = 0.$$

$g_{n,m,i}(x) = g_{n,m}([2^i x]2^{-i})$ とおけば，$\lim_{i\to\infty} g_{n,m,i} = g_{n,m}$ であるから，$\dfrac{|y|}{1+|y|} \leq 1$ に注意して Lebesgue の優収束定理を用いれば,

$$\lim_{i\to\infty} d(g_{n,m,i}, g_{n,m}) = 0.$$

以上をまとめれば，$\{g_{n,m,i} \,|\, n, m, i = 1, 2, \dots\}$ の適当な部分列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれ,

$$\lim_{n\to\infty} d(g_n, \overline{f}) = 0$$

となる．

(3-4) (3-3) の g_j に対し，(3-2) を適用すれば，部分列 $\{g_{n_j}\}$ に対し，$g_{n_j}\mathcal{X}_{[a,b]} \to \overline{f}\mathcal{X}_{[a,b]}$ a.e. となる．$g_{n_j}\mathcal{X}_{[a,b]}$ は $[a,b]$ 上で階段関数となるから，f は L-可測となる．

(4) $\overline{f}$ は Lebesgue 可積分であるとする．

もし，(3) の結果より，f が有界であれば L-可積分である．

f は有界でないとする．上のことより $\max\{n, |f|\}$ は L-可積分となり，(2) の考察に注意すれば,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{[a,b]} \max\{n, |f|\} d\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}} \max\{n, |\overline{f}|\} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |\overline{f}| d\lambda < \infty.$$

したがって f は L-可積分である．　□

演習問題

基本的に測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ で考察する．$\mathbb{R}^N$ が現れたときは Lebesgue 測度空間を考えているものとする．

Q6.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f : U \times X \to \mathbb{R}$ は，(a) $\forall t \in U$ に対し，$f(t, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ が可積分であり，(b) ほとんどすべての $x \in X$ に対し，$U \ni t \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ は C^1 級であり，(c) 非負可積分関数 $\Phi : X \to [0, \infty]$ が存在し，任意の $t \in U$ に対し，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(t, \cdot)\right| \leq \Phi$ a.e. となると仮定する．$t = (t_1, \dots, t_n)$ と表す．こ

のとき，任意の $i = 1, \ldots, n$ と $t \in U$ に対し，$\partial f/\partial t_i(t, \cdot)$ は可積分であり，さらに次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \int_X f(t,x)\mu(dx) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)\mu(dx).$$

Q6.2. $a_1, a_2, \ldots$ は非負で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ を満たすとする．$X = \mathbb{N}$，$\mathcal{E} = 2^{\mathbb{N}}$，$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{X}_A(n)$ とおく.

測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ 上で関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ の積分は

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(n)$$

となることを確かめよ．さらに Lebesgue の優収束定理を用いて，関数

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$$

が微分可能であり，さらに次式が成り立つことを示せ.

$$h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad z \in D.$$

Q6.3. $a_n \geq 0$ は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ を満すとする．$b_n \in \mathbb{R}$ が $|b_n| \leq a_n$ $(\forall n)$ を満せば，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束することを Lebesgue の優収束定理を用いて証明せよ.

Q6.4. $E \in \mathcal{E}$ は $\mu(E) < \infty$ を満たし，可積分関数 $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ は $f_n \leq f_{n+1} \nearrow f$，$\inf\{f_1(x) \,|\, x \in E\} > -\infty$ を満たすと仮定する．このとき $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ となることを示せ.

Q6.5. $E \in \mathcal{E}$ は $\mu(E) < \infty$ を満たし，可測関数 $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ は，$\sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in E, n \in \mathbb{N}\} < \infty$ を満たし，さらに $f_n \to f$ a.e. とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

となることを示せ.

Q6.6. $E \in \mathcal{E}$ は $\mu(E) < \infty$ を満たし，可積分関数 $f_n : X \to \mathbb{R}$ は，E 上 f に一様収束すると仮定する．このとき，$f\mathcal{X}_E$ は可積分で，$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ となることを示せ.

Q6.7. (i) $f_n : X \to [0, \infty]$，$n = 1, 2, \ldots$，は可積分とし，$f_n \geq f_{n+1} \searrow f$ となると仮定する．このとき $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ となることを示せ.

(ii) f_n がいずれも可積分でない場合は，上の等式が一般には成り立たないことを例を挙げて説明せよ.

Q6.8. 可測関数 $f_n, f : X \to [-\infty, \infty]$ は，$\sup\left\{\int_X |f_n| d\mu \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$ を満たし，さらに $f_n \to f$ a.e. とする．このとき f は可積分であることを証明せよ．

Q6.9. 可測関数 $f_n, f : X \to [-\infty, \infty]$ は，$\sup\left\{|f_n(x)| \,|\, x \in X,\, n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$ を満たし，$f_n \to f$ a.e. とする．任意の可積分関数 $g : X \to [-\infty, \infty]$ に対し，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu$ となることを証明せよ．

Q6.10. $g : X \to [-\infty, \infty]$ を，非負可積分関数とする．可測関数 f_n, f は $f_n(x) \to f(x)$ $(\forall x \in X)$ を満たし，さらに

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \mathcal{X}_{[|f_n|>M]} g d\mu \to 0 \quad (M \to \infty)$$

が成り立つと仮定する．

(i) 任意の $M > 0$ に対し，$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n^{(M)} - f^{(M)}| g d\lambda = 0$ が成り立つことを示せ．

ただし $g^{(M)}(x) = \begin{cases} -M, & g(x) \leq -M, \\ g(x), & |g(x)| < M, \\ M, & g(x) \geq M \end{cases}$ とする．

(ii) $[|f| > M] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} [|f_m| > M]$ となることを示し，$|f|\mathcal{X}_{[|f|>M]} \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n| \mathcal{X}_{[|f_n|>M]}$ が成り立つことを証明せよ．

(iii) $\lim_{M\to\infty} \int_X |f| \mathcal{X}_{[|f|>M]} g d\mu = 0$ を示せ．

(iv) fg は可積分であることを示せ．

(v) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| g d\mu = 0$ となることを証明せよ．

(vi) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu$ となることを証明せよ．

Q6.11. $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測で，さらに $f(x) \geq |x|^2$ を満たすと仮定する．

(i) $g(x) = e^{-|x|^2}$ とおけば g は可積分となることを証明せよ．

(ii) $\lim_{n\to\infty} e^{-nf(x)}$ を求めよ．

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-nf(x)} \lambda(dx) = 0$ となることを証明せよ．

Q6.12. (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は区分的に連続であり，かつ有界であるとする．さらに $f \geq 0$ であると仮定する．Riemann 特異積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ が有限確定ならば，$f\mathcal{X}_{(0,\infty)}$ は Lebesgue 可積分であり，

$$\int_{(0,\infty)} f d\lambda = \int_0^\infty f(x) dx$$

となることを証明せよ．

(ii) 上の主張は $f \geq 0$ という仮定を除けば成立しないことを例を挙げて説明せよ．

Q6.13. $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は連続関数で，ある $k \in \mathbb{N}$ に対し，$\sup\{|f(x)|/(1+|x|)^k \mid x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ を満たすとする．$I(y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)e^{-|x|}\lambda(dx)$ とおく．

(i) $(1+|x+y|)^k \leq 2^k(1+|x|)^k + 2^k|y|^k$ となることを証明せよ．

(ii) $\sup\{|f(x+y)|/(1+|x|)^k \mid x \in \mathbb{R}^N, |y| \leq n\} < \infty$ となることを示せ．

(iii) $g(x) = (1+|x|)^k e^{-|x|}$ とすれば g は可積分であることを証明せよ．

(iv) $I:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は連続関数であることを証明せよ．

Q6.14. $N = 1$ とする．関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可積分で，さらに任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $\phi_n(x) = x^n f(x)$ も Lebesgue 可積分であるとする．

(i) $y \geq 0$ ならば，関数 $x \mapsto e^{-yx}f(x)\mathcal{X}_{[0,\infty)}(x)$ は Lebesgue 可積分であることを証明せよ．

(ii) $y \geq 0$ に対し，$L(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-yx}f(x)\mathcal{X}_{[0,\infty)}(x)\lambda(dx)$ とおく．L は $[0,\infty)$ 上 C^∞ となることを証明せよ．

Q6.15. $N = 1$ とする．複素数値関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の実部 $u:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，虚部 $v:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がともに可積分となるとき，f の Lebesgue 積分を $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} u d\lambda + i \int_{\mathbb{R}} v d\lambda$ と定義する ($i^2 = -1$)．$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は可測関数で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$x \mapsto e^{ax}g(x)$ は可積分であるとする．

(i) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，関数 $x \mapsto e^{zx}g(x)$ は可積分であることを示せ．

(ii) $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx}g(x)\lambda(dx)$ $(z \in \mathbb{C})$ とおけば，F は正則関数であることを証明せよ．

(iii) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n g(x)\lambda(dx).$$

Q6.16. (Gamma 関数) $z \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ に対し

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$$

と Riemann 広義積分により定義する．

(i) Riemann 広義積分が定義可能であることを示せ．

(ii) $\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto \Gamma(z)$ は正則関数となることを証明せよ．

(iii) $z \neq 0, -1, -2, \dots$ ならば，$\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$ が成り立つことを証明せよ．

(iv) $\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が成り立つことを示せ．

Q6.17. $N = 1$ とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は可積分で，さらにすべての $n = 0, 1, \dots$ に対し $\phi_n(x) = x^n f(x)$ もまた可積分であると仮定する．

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) \lambda(dx)$$

とおく ($i^2 = -1$).

(i) $\check{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ となることを証明せよ．

(ii) $\check{f}^{(n)}(\xi)$ ($\check{f}$ の n 階微分) を $\check{\phi}_n$ を用いて表せ．

(iii) $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{n} \xi^j a_j \check{\phi}_j(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

が成り立つとき，$\check{f}^{(n)}$ の満たす常微分方程式を求めよ．

Q6.18. $t \in \mathbb{R}$ に対し $I(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} \lambda(dx)$ とおく ($i^2 = -1$).

(i) $I(t)$ は有限確定であることを証明せよ．

(ii) I は C^∞ 級であることを示せ．

(iii) I の満たす微分方程式を求め，I を求めよ．

Q6.19. $N = 1$ とする．関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^n 級であり，さらにすべての $0 \le k \le n$ に対し，$\delta > 0$ が存在し，$\sup_{|y| \le \delta} |g^{(k)}(\cdot + y)| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可積分関数であるとする．ただし，$g^{(k)}$ は k 次導関数．有界可測関数 f に対し，$I(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) g(x) \lambda(dx)$ とおく．

(i) $I(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-y) \lambda(dx)$ となることを証明せよ．

(ii) $I(y)$ は C^n 級であることを証明せよ．

Q6.20. $N = 1$ とする．$x \in \mathbb{R}$，$t > 0$ に対し $g(x,t) = (2\pi t)^{-1/2} \exp[-x^2/(2t)]$ とおく．

(i) $\dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) 任意の $t, R > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ に対し，$C > 0$ が存在し，$|y| \le C$ ならば $\partial_x^n g(x-y,t) \le g(x-y,2t)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) が成り立つことを示せ．

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界連続関数とし，$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y,t) \lambda(dy)$ とおく．$u(x,t)$ は $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上 C^∞ となり，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が成り立つことを証明せよ．

Q6.21. 上と同じ u に対し，

(i) $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t^{1/2} y) g(y,1) \lambda(dy)$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = f(x)$ となることを示せ．

7. Hölder，Minkowski の不等式，L^p 空間

Def 7.1. $(X, \mathcal{E}, \mu)$ を測度空間とする．$p > 0$ に対し，

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : X \to [-\infty, \infty] \,\middle|\, f \text{ は可測かつ } \int_X |f(x)|^p \mu(dx) < \infty \right\}$$

と定義する．

Thm 7.2 (Hölder の不等式)**.** $p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．任意の $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$，$g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ に対し，次式が成り立つ．

$$\left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int_X |g|^q d\mu \right\}^{1/q}.$$

証明のために次の補題を準備する．

Lem 7.3 (Young の不等式)**.** $a, b \geq 0$ とし，$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすと仮定する．このとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proof. $ab = 0$ のときは明らか故，$ab \neq 0$ と仮定する．$\varphi(t) = \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{1}{q} - t$ $(t \geq 0)$ とおく．$\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$ より，φ は $t = 1$ で最小値 0 をとる．すなわち，$t \leq \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{1}{q}$．これに $t = ab^{-q/p}$ を代入し，両辺に b^q をかけると，$q - (q/p) = 1$ であるから，望む不等式を得る． □

Proof (Thm 7.2). はじめの不等号は，Thm 5.3 で既に見た．

$$n_f = \int_X |f|^p d\mu \quad n_g = \int_X |g|^p d\mu$$

とおく．$n_f = 0$ ならば $f = 0$ a.e.，$n_g = 0$ ならば $g = 0$ a.e. となるから，このとき不等式は自明である．したがって $n_f n_g \neq 0$ と仮定してよい．

$a = |f(x)|/n_f^{1/p}$，$b = |g(x)|/n_g^{1/q}$ として Young の不等式を用いれば

$$\frac{|f(x)g(x)|}{n_f^{1/p} n_g^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{n_f} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{n_g}.$$

積分すれば

$$\frac{1}{n_f^{1/p} n_g^{1/q}} \int_X |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int_X |f|^p d\mu}{n_f} + \frac{1}{q} \frac{\int_X |g|^q d\mu}{n_g} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

両辺を $n_f^{1/p} n_g^{1/q}$ 倍して，望む不等式を得る． □

Thm 7.4 (Minkowski の不等式)**.** $p \geq 1$ とする．次の不等式が成り立つ．

$$\left\{\int_X |f+g|^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |g|^p d\mu\right\}^{1/p} \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Proof.　$p=1$ のときは三角不等式 $|f+g| \leq |f|+|g|$ と積分の正値性より明らか．
　$p>1$ とする．$\int_X |f+g|^p d\mu = 0$ のとき不等式は自明であるから，$\int_X |f+g|^p d\mu > 0$ と仮定する．さらに $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ $(a, b \geq 0)$ という不等式に注意すれば，

$$0 < \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)^p d\mu < \infty.$$

$q = p/(p-1)$ とすれば，Hölder の不等式より，

$$\begin{aligned}\int_X (|f|+|g|)^p d\mu &= \int_X |f|(|f|+|g|)^{p-1} d\mu + \int_X |g|(|f|+|g|)^{p-1} d\mu \\ &\leq \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int_X (|f|+|g|)^{(p-1)q} d\mu\right\}^{1/q} \\ &\quad + \left\{\int_X |g|^p d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int_X (|f|+|g|)^{(p-1)q} d\mu\right\}^{1/q}.\end{aligned}$$

$(p-1)q = p$ であり，$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p$ であるから，両辺を $\left\{\int_X (|f|+|g|)^p d\mu\right\}^{1/p} \neq 0$ で割れば

$$\begin{aligned}\left\{\int_X |f+g|^p d\mu\right\}^{1/p} &\leq \left\{\int_X (|f|+|g|)^p d\mu\right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |g|^p d\mu\right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

□

Thm 7.5 (完備性)**.** $p \geq 1$，$f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_X |f_n - f_m|^p d\mu = 0 \tag{7.1}$$

となることが，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0 \tag{7.2}$$

となる $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ が存在するための必要十分条件である．

Proof.　$f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ が存在し，(7.2) が成り立つとする．Minkowski の不等式より，

$$\left\{\int_X |f_n - f_m|^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_X |f_n - f|^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |f_m - f|^p d\mu\right\}^{1/p} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

となり，(7.1) が従う．

逆に (7.1) が成り立つとする．まず f を構成する．自然数列 $n(1) < \cdots < n(k) < n(k+1) < \ldots$ を

$$\int_X |f_n - f_{n(k)}|^p d\mu < 2^{-pk}, \quad \forall n \geq n(k) \tag{7.3}$$

となるように選ぶ．Minkowski の不等式を繰り返し応用すれば

$$\left\{\int_X \left(\sum_{k=1}^m |f_{n(k+1)} - f_{n(k)}|\right)^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \sum_{k=1}^m \left\{\int_X |f_{n(k+1)} - f_{n(k)}|^p d\mu\right\}^{1/p}$$

となる (帰納法)．$m \to \infty$ とすれば単調収束定理と (7.3) より

$$\begin{aligned}\left\{\int_X \left(\sum_{k=1}^\infty |f_{n(k+1)} - f_{n(k)}|\right)^p d\mu\right\}^{1/p} \\ \leq \sum_{k=1}^\infty \left\{\int_X |f_{n(k+1)} - f_{n(k)}|^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} < \infty\end{aligned}$$

となる．したがって $A \in \mathcal{E}$ で，$\mu(A) = 0$ かつ $\sum_{k=1}^\infty |f_{n(k+1)}(x) - f_{n(k)}(x)| < \infty$ $(\forall x \notin A)$ となるものが存在する．

$$f(x) = \begin{cases} f_{n(1)}(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^\infty (f_{n(k+1)}(x) - f_{n(k)}(x)), & x \notin A, \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

とおく．

次に，(7.2) が成り立つことを示す．$f_{n(k)}(x) \to f(x)$ $(\forall x \notin A)$ かつ

$$\begin{aligned}|f - f_{n(k)}|^p &\leq \left(\sum_{j=k+1}^\infty |f_{n(j+1)} - f_{n(j)}|\right)^p \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |f_{n(j+1)} - f_{n(j)}|\right)^p \leq 2^p\{|f_{n(1)}|^p + |f|^p\}\end{aligned}$$

であるから，Lebesgue の優収束定理より

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_{n(k)} - f|^p d\mu = 0. \tag{7.4}$$

Minkowski の不等式と (7.3) より，$n \geq n(k)$ ならば，

$$\begin{aligned}\left\{\int_X |f_n - f|^p d\mu\right\}^{1/p} &\leq \left\{\int_X |f_n - f_{n(k)}|^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |f_{n(k)} - f|^p d\mu\right\}^{1/p} \\ &\leq 2^{-k} + \left\{\int_X |f_{n(k)} - f|^p d\mu\right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

したがって

$$0 \le \limsup_{n\to\infty}\left\{\int_X |f_n - f|^p d\mu\right\}^{1/p} \le 2^{-k} + \left\{\int_X |f_{n(k)} - f|^p d\mu\right\}^{1/p}.$$

$k \to \infty$ とすれば，(7.4) より

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\int_X |f_n - f|^p d\mu\right\}^{1/p} = 0.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

□

演習問題

基本的に測度空間 $(X, \mathcal{E}, \mu)$ で考察する．$\mathbb{R}^N$ が現れたときは Lebesgue 測度空間を考えているものとする．

Q7.1. (i) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ とする．積 fg は可積分であることを示せ．

(ii) $\mu(X) < \infty$ とし，$f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ とする．このとき f は可積分であることを示せ．

(iii) $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ が必ずしも可積分とはならない測度 μ およびそのような f の例を挙げよ．

Q7.2. $p_1, \dots, p_n > 1$ は $\sum_{i=1}^n (1/p_i) = 1$ を満たすとする．非負可測関数 $f_1, \dots, f_n : X \to [-\infty, \infty]$ に対し，$\infty \le \infty$ を許して

$$\int_X |f_1 \dots f_n| d\mu \le \prod_{i=1}^n \left(\int_X |f_i|^{p_i} d\mu\right)^{1/p_i}$$

が成り立つことを証明せよ．

Q7.3. $p \ge 1$，$f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ とする．$S_n = \sum_{i=1}^n f_i$ とおく．

(i) $S_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ となることを示せ．

(ii) $\sum_{i=1}^\infty \left(\int_X |f_i|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$ とする．このとき $S \in \mathcal{L}^p(\mu)$ が存在し，$\int_X |S_n - S|^p d\mu \to 0$ となることを証明せよ．

Q7.4. $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ を

$$\mu(A) = \#A = A \text{ の元の個数}$$

で与えられる測度空間とする．この空間上の Hölder，Minkowski の不等式を援用して，$a_n, b_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \dots$，に対し，次の不等式が成り立つこ

とを示せ．

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{1/q}$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^r\right)^{1/r}.$$

ただし，$p, q > 1$，$(1/p) + (1/q) = 1$，$r \ge 1$.

Q7.5. $C_0(\mathbb{R}^N)$ で連続関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ で $A > 0$ が存在し $|x| > A$ ならば $f(x) = 0$ となるものの全体を表す．$C_0(\mathbb{R}^N)$ が $\mathcal{L}^p(\lambda)$ で稠密であること，すなわち，任意の $f \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ と $\varepsilon > 0$ に対し $\int_{\mathbb{R}^N} |f - g|^p d\lambda < \varepsilon$ を満たす $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ が存在することを証明せよ．

Q7.6. $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとし，$f \in \mathcal{L}^p(\lambda)$，$g \in \mathcal{L}^q(\lambda)$ とする．このとき

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)g(x)\lambda(dx)$$

は連続写像であることを証明せよ．

Q7.7. $H \subset \mathcal{L}^2(\mu)$ は

(a) $a, b \in \mathbb{R}$，$f, g \in H$ ならば $af + bg \in H$，

(b) $f_n \in H$，$\int_X |f_n - f|^2 d\mu \to 0$ ならば $f \in H$

という性質を満たすとする．$f \in \mathcal{L}^2$ とし，$c > 0$ を

$$c^2 = \inf\left\{ \int_X |f - g|^2 d\mu \,\middle|\, g \in H \right\}$$

と定義する．

(i) $f_n \in H$ で $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^2 d\mu = c^2$ となるものが存在することを確かめよ．

(ii) (i) の f_n に対し

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\int_X \left| f - \frac{f_n + f_m}{2} \right|^2 d\mu \right)^{1/2} = c,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \int_X (f - f_n)(f - f_m) d\mu = c^2,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \int_X (f_n - f_m)^2 d\mu = 0$$

となることを示せ．

(iii) $\overline{f} \in H$ が存在し，$\int_X |f - \overline{f}|^2 d\mu = c^2$ となることを示せ．

(iv) $\int_X (f - \overline{f}) g d\mu = 0$ $(\forall g \in H)$ となることを示せ．

Q7.8. $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ に対し次の等式を証明せよ．

$$\left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2} = \sup\left\{\int_X fg d\mu \,\middle|\, g \in \mathcal{L}^2(\mu), \int_X |g|^2 d\mu \le 1\right\}.$$

Q7.9. $-\infty < a < b < \infty$ とする．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測で，$[a,b]$ 上では $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界かつ連続であるとする．$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とおく．

(i) $f\mathcal{X}_{[a,b]} \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ $(\forall p \ge 1)$ となることを証明せよ．

(ii) $\varepsilon > 0$ に対し，$A_\varepsilon = \{x \in [a,b] \,|\, |f(x)| \ge M - \varepsilon\}$ とおく．$A_\varepsilon \in \mathcal{F}$, $\lambda(A_\varepsilon) > 0$ であり，$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \mathcal{X}_{[a,b]} d\lambda \ge (M-\varepsilon)^p \lambda(A_\varepsilon)$ となることを証明せよ．

(iii) $\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \mathcal{X}_{[a,b]} d\lambda\right)^{1/p} \to M$ $(p \to \infty)$ となることを証明せよ．

Q7.10. $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ は $\int_X f_n f_m d\mu = \delta_{nm}$ を満たすと仮定する (このような $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を**正規直交系**という)．$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$ なる任意の実数数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対し $S_N = \sum_{n=1}^N a_n f_n$ とおけば，$S \in \mathcal{L}^2(\mu)$ が存在し $\int_X |S_N - S|^2 d\mu \to 0$ $(N \to \infty)$，$\int_X S f_n d\mu = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ となることを証明せよ．

(この S を $\boldsymbol{\sum_{n=1}^\infty a_n f_n}$ と表す)．

Q7.11. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を正規直交系とする．$f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ならば，Bessel の不等式

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_X f f_n d\mu\right)^2 \le \int_X f^2 d\mu$$

が成り立つことを証明せよ．

Q7.12. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を正規直交系とする．次の条件は同値であることを証明せよ．

(a) $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ が $\int_X f f_n d\mu = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ を満たせば，$f = 0$ a.e.

(b) 任意の $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ に対し，

$$f = \sum_{k=1}^\infty \left(\int_X f f_n d\mu\right) f_n.$$

(右辺は Q7.10 を参照)

(c) 任意の $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ に対し，Parseval の等式

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_X f f_n d\mu\right)^2 = \int_X f^2 d\mu$$

が成り立つ．

(d) 任意の $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$，$\varepsilon > 0$ に対し，$N \in \mathbb{N}$，$a_n \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$\int_X \left| f - \sum_{n=1}^N a_n f_n \right|^2 d\mu < \varepsilon$$

となる．

Q7.13. (Legendre 多項式) $n=0,1,2,\dots$，$x\in[-1,1]$ に対し

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

とおく.

(i) $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$ となることを証明せよ.

(ii) $(\mathbb{R}^1,\mathcal{F})$ 上の測度 μ を $\mu(A)=\lambda(A\cap[-1,1])$ と定義する. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}P_nP_m d\mu=0$ $(n\neq m)$ となることを示せ.

Q7.14. (Hermite 多項式) $n=0,1,2,\dots$，$x\in\mathbb{R}$ に対し

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

とおく.

(i) $H_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$ となることを示せ.

(ii) $(\mathbb{R}^1,\mathcal{F})$ 上の測度 μ を $\mu(A)=\displaystyle\int_A e^{-x^2}\lambda(dx)$ と定義する.

$$\int_{\mathbb{R}}H_nH_m d\mu(dx)=0\quad(n\neq m)$$

となることを示せ.

Q7.15. (Laguerre 多項式) $\alpha>-1$ とする. $n=0,1,2,\dots$，$x>0$ に対し

$$L_n^\alpha(x)=e^x\frac{x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right)$$

とおく.

(i) $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}$ となることを証明せよ.

(ii) $(\mathbb{R}^1,\mathcal{F})$ 上の測度 μ を $\mu(A)=\int_{A\cap(0,\infty)}x^\alpha e^{-x}\lambda(dx)$ と定義する.

$$\int_{\mathbb{R}}L_n^\alpha L_m^\alpha d\mu(dx)=0\quad(n\neq m)$$

となることを示せ.

8. 直積測度と Fubini の定理

Def 8.1. $(X, \mathcal{E}_X, \mu_X)$，$(Y, \mathcal{E}_Y, \mu_Y)$ を測度空間とする．

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} E_k \times F_k \,|\, E_k \in \mathcal{E}_X, F_k \in \mathcal{E}_Y,\, k = 1, \ldots, n,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

とし，$\sigma(\mathcal{E}_0)$ を $\mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y$ と表し，**直積 $\boldsymbol{\sigma}$ 加法族**という．

Thm 8.2 (直積測度)**.** $X_k \in \mathcal{E}_X, Y_k \in \mathcal{E}_Y$ で，$\mu_X(X_k) < \infty$，$\mu_Y(Y_k) < \infty$ $(\forall k)$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$ を満すものが存在すると仮定する．$\mathcal{E}_0$ 上の有限測度 μ_0 を

$$\mu_0(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F), \quad E \in \mathcal{E}_X,\, F \in \mathcal{E}_Y$$

となるように定義する．$(X \times Y, \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y)$ 上の測度 μ で，$\mu(E) = \mu_0(E)$ $(\forall E \in \mathcal{E}_0)$ を満すものが唯一存在する．この μ を $\mu_X \times \mu_Y$ と表し，**直積測度**という．

Lem 8.3. $B \in \mathcal{E}_0$ とする．

$$B_x^{(Y)} = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in B\}, \quad B_y^{(X)} = \{x \in X \,|\, (x, y) \in B\}, \quad x \in X,\, y \in Y$$

とおく．このとき，

(i) $B_x^{(Y)} \in \mathcal{E}_Y$，$B_y^{(X)} \in \mathcal{E}_X$，

(ii) $x \mapsto \mu_Y(B_x^{(Y)})$，$y \mapsto \mu_X(B_y^{(X)})$ は可測，

(iii) $\mu_0(B) = \int_X \mu_Y(B_x^{(Y)})\mu_X(dx) = \int_Y \mu_X(B_y^{(X)})\mu_Y(dy)$.

Proof. $E_i \cap E_i = \emptyset$，$F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ なる $E_i \in \mathcal{E}_X, F_i \in \mathcal{E}_Y$ と，$I \subset \{(i, j) \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ を用いて

$$B = \bigcup_{(i,j) \in I} E_i \times F_j$$

と表すことができる．$1 \leq i \leq n$ に対し，$I(i) = \{j \,|\, (i, j) \in I\}$ とおけば，

$$B_x^{(Y)} = \begin{cases} \bigcup_{j \in I(i)} F_j, & x \in E_i, \\ \emptyset, & x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \end{cases}$$

となる．したがって $B_x^{(Y)} \in \mathcal{E}_Y$ $(\forall x)$．また

$$\mu_Y(B_x^{(Y)}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{E_i}(x) \sum_{j \in I(i)} \mu_Y(F_j).$$

よって $x \mapsto \mu_Y(B_x^{(Y)})$ は可測となる．さらに

$$\int_X \mu_Y(B_x^{(Y)})\mu_X(dx) = \sum_{i=1}^{n} \mu_X(E_i) \sum_{j \in I(i)} \mu_Y(F_j) = \mu(B).$$

$B_y^{(X)}$ についても同様の議論が成り立つ．　□

Proof(Thm 8.2).　Caratheodory の拡張定理 (Thm 2.5) より，$A_j \in \mathcal{E}_0$，$A_i \cap A_j = \emptyset$，$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_0$ ならば,

$$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \tag{8.1}$$

となることを示せば良い．

$\mu_0(A) < \infty$ とする．$B_n = A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ とおけば，有限加法性より,

$$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu(A_j) + \mu(B_n).$$

したがって，$\mu_0(B_n) \to 0$ を示せば良い．

各 B_n を Lem 8.3 の証明で用いたように

$$B_n = \bigcup_{(i,j)\in I(n)} E_i^n \times F_j^n$$

と表す．このとき $\mu_X(E_j^n) > 0, \mu_Y(F_j^n) > 0$ $(\forall j, n)$ と仮定して良い．

$\because)$ $J_X = \{E_j^n \,|\, \mu_X(E_j^n) = 0\}$，$J_Y = \{F_j^n \,|\, \mu_Y(F_j^n) = 0\}$,

$$B_0 = \left(\bigcup_{E\in J_X} E \times Y\right) \cup \left(X \times \bigcup_{E\in J_Y} E\right)$$

とおけば，$B_0 \in \mathcal{E}_0$，$\mu_0(B_0) = 0$ となり，$B_n \setminus B_0$ を B_n と思えば良い．///

このとき

$$\mu_0(B_1) = \sum_{(i,j)\in I} \mu_X(E_i)\mu_Y(F_j)$$

とあわせれば,

$$\mu(E_i) < \infty, \mu(F_j) < \infty \quad (i,j) \in I(1). \tag{8.2}$$

Lem 8.3 で見たように

$$\mu_0(B_n) = \int_X \mu_Y([B_n]_x^{(Y)})\mu_X(dx).$$

任意の $x \in X$ に対し，$[B_n]_x^{(Y)} \supset [B_{n+1}]_x^{(Y)} \searrow \emptyset$ $(n \to \infty)$ となる．また，Lem 8.3 の証明で見たように

$$\mu_Y([B_n]_x) \le \mu_Y([B_1]_x) = \sum_{(i,j)\in I(1)} \mathcal{X}_{E_i^1}(x)\mu_Y(F_j^1). \tag{8.3}$$

これと (8.2) から，$\mu_Y([B_1]_x^{(Y)}) < \infty$ となる．よって，$\mu_Y([B_n]_x) \to 0$ $(\forall x)$．(8.2), (8.3) と合わせて，Lebesgue の優収束定理を用いれば,

$$\mu_0(B_n) = \int_X \mu_Y([B_n]_x^{(Y)})\mu_X(dx) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって $\mu_0(A) < \infty$ ならば，(8.1) が証明できた．

$\mu_0(A) = \infty$ とする．$Z_k = X_k \times Y_k$ とおく．$\mu_0(A \cap Z_k) < \infty$ より，上の考察から

$$\mu_0(A \cap Z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_0(A_j \cap Z_k) \le \sum_{j=0}^{\infty} \mu_0(A_j).$$

したがって $\mu_0(A \cap Z_k) \to \infty$ を示せば良い．

$A = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \times F_j$ $((E_i \times F_i) \cap (E_j \times F_j) = \emptyset)$ と表す．

$$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_X(E_j)\mu_Y(F_j)$$

より，ある j に対し，$\mu_X(E_j)\mu_Y(F_j) = \infty$ となる．

$$\begin{aligned}\mu_0(A \cap Z_k) \ge \mu_0((E_j \times F_j) \cap Z_k) &\ge \mu_X(E_j \cap X_k)\mu_Y(F_j \cap Y_k) \\ &\to \mu_X(E_j)\mu_Y(F_j) = \infty \quad (k \to \infty).\end{aligned}$$

□

Thm 8.4 (Fubini の定理 (一般形))**.** $(X, \mathcal{E}_X, \mu_X)$，$(Y, \mathcal{E}_Y, \mu_Y)$ を測度空間とする．$X_k \in \mathcal{E}_X, Y_k \in \mathcal{E}_Y$ で，$\mu_X(X_k) < \infty$，$\mu_Y(Y_k) < \infty$ $(\forall k)$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$ を満すものが存在すると仮定する．

$\mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y$-可測関数 $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ は，(a) 可積分であるか，(b) 非負であるかのいずれかとする．このとき次が成り立つ．

(F1) $f_x^{(Y)} : Y \ni y \mapsto f(x, y) \in [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{E}_Y$-可測であり，さらに関数 $x \mapsto \int_Y f_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy)$ が定義でき，$\mathcal{E}_X$-可測である．

(F2) $f_y^{(X)} : X \ni x \mapsto f(x, y) \in [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{E}_X$-可測であり，さらに関数 $y \mapsto \int_X f_y^{(X)}(x)\mu_X(dx)$ が定義でき，$\mathcal{E}_Y$-可測である．

(F3) 次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) &= \int_X \left(\int_Y f_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx) \\ &= \int_Y \left(\int_X f_y^{(X)}(x)\mu_X(dx) \right) \mu_Y(dy).\end{aligned} \tag{8.4}$$

幾つかの補題に分けて証明する．

Lem 8.5. 可測関数 $f_n : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ は (F1)–(F3) を満たすと仮定する．さらに次のいずれかが成り立つと仮定する．

(a) $0 \le f_n(x, y) \le f_{n+1}(x, y) \nearrow f(x, y)$ $(\forall (x, y) \in X \times Y)$.

(b) 非負可積分関数 $\Phi_X : X \to \mathbb{R}, \in \mathcal{L}^1(\mu_X)$，$\Phi_Y : Y \to \mathbb{R}, \in \mathcal{L}^1(\mu_Y)$ が存在し，$|f_n(x, y)| \le \Phi_X(x)\Phi_Y(y)$ が成り立ち，さらに $\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ $(\forall (x, y) \in X \times Y)$.

このとき f もまた (F1)–(F3) を満たす.

Proof. (a) 仮定より,

$$0 \le [f_n]_x^{(Y)} \le [f_{n+1}]_x^{(Y)} \nearrow f_x^{(Y)}.$$

これより，$f_x^{(Y)} \ge 0$ は $\mathcal{E}_Y$-可測である．単調収束定理より,

$$0 \le \int_Y [f_n]_x^{(Y)} d\mu_Y \le \int_Y [f_{n+1}]_x^{(Y)} d\mu_Y \nearrow \int_Y f_x^{(Y)} d\mu_Y.$$

したがって $\int_Y f_x^{(Y)} d\mu_Y$ は $\mathcal{E}_X$-可測であり，再び単調収束定理より,

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu_X \times \mu_Y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y [f_n]_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y f_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx).
\end{aligned}$$

$f_y^{(X)}$ についても同様に証明できる.

(b) 仮定より,

$$\lim_{n\to\infty} [f_n]_x^{(Y)}(y) = f_x^{(Y)}(y), \quad \forall y \in Y, \quad |[f_n]_x^{(Y)}(y)| \le \Phi_X(x)\Phi_Y(y).$$

よって $f_x^{(Y)} \ge 0$ は $\mathcal{E}_Y$-可測である．Lebesgue の優収束定理より

$$\int_Y [f_n]_x^{(Y)} d\mu_Y \to \int_Y f_x^{(Y)} d\mu_Y.$$

したがって $\int_Y f_x^{(Y)} d\mu_Y$ は $\mathcal{E}_X$-可測である.

$$\left| \int_Y [f_n]_x^{(Y)} d\mu_Y \right| \le \Phi_X(x) \int_Y \Phi_Y d\mu_Y$$

という評価式が成り立つので，再び Lebesgue の優収束定理理より,

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu_X \times \mu_Y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y [f_n]_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y f_x^{(Y)}(y)\mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx).
\end{aligned}$$

$f_y^{(X)}$ についても同様に証明できる. □

Lem 8.6. $\mathcal{M} \subset 2^{X\times Y}$ は，$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{M}$ であり，さらに次の 2 条件を満たすとする.

(a) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ を満たせば，$\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$,

(b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ を満たせば，$\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.

このとき $\mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \subset \mathcal{M}$.

Proof. $\Lambda = \{\mathcal{N} \subset 2^{X\times Y} \,|\, \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{N}, \mathcal{N}$ は (a)，(b) を満たす $\}$ とし，

$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_{\mathcal{N}\in\Lambda} \mathcal{N}$$

とおく．

$\mathcal{M}_0 \in \Lambda$，$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ は容易にわかる．$\mathcal{M}_0$ が有限加法族であることを証明できれば，性質 (a) より $\mathcal{M}_0$ は σ 加法族となり，したがって $\mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ となり，主張が得られる．

$\widehat{\mathcal{M}} = \{A \in \mathcal{M}_0 \,|\, A^c \in \mathcal{M}_0\}$ とおく．このとき $\mathcal{E}_0 \subset \widehat{\mathcal{M}}$ であり，さらに $C \subset D \Leftrightarrow C^c \supset D^c$ に注意すれば $\widehat{\mathcal{M}}$ は (a)，(b) を満たす．よって $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_0$ となる．すなわち，$A \in \mathcal{M}_0$ ならば $A^c \in \mathcal{M}_0$ である．

$A, B \in \mathcal{M}_0$ ならば，$A \cup B \in \mathcal{M}_0$ を示す．$\mathcal{M}_A = \{E \in \mathcal{M}_0 \,|\, A \cup E \in \mathcal{M}_0\}$ とおく．

まず，$A \in \mathcal{E}_0$ とする．このとき，定義より，$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{M}_A$．また

$$\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) \cup A = \bigcup_{j=1}^\infty (E_j \cup A), \qquad \left(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\right) \cup A = \bigcap_{j=1}^\infty (E_j \cup A)$$

という関係式より，$\mathcal{M}_A \in \Lambda$．したがって $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_A$ となる．よって $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_A$ であり，これより，$A \in \mathcal{E}_0$，$B \in \mathcal{M}_0$ ならば，$A \cup B \in \mathcal{M}_0$ である．

つぎに $A \in \mathcal{M}_0$ とする．上の考察より，$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{M}_A$．後は上と同様にして，$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_A$ を得る．よって $\mathcal{M}_0$ は有限加法族となる． □

Lem 8.7. $A \in \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y$ とする．$f = \mathcal{X}_A$ は (F1)–(F3) を満たす．

Proof. $Z_k = X_k \times Y_k$ とする．$0 \le \mathcal{X}_{A\cap Z_k} \le \mathcal{X}_{A\cap Z_{k+1}} \nearrow \mathcal{X}_A$ であるから，Lem 8.5 より，$f = \mathcal{X}_{A\cap Z_k}$ が (F1)–(F3) を満たすことを示せばよい．

k を固定し，$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \,|\, \mathcal{X}_{A\cap Z_k}$ が (F1)–(F3) を満たす $\}$ とおく．

$$0 \le \mathcal{X}_{A\cap Z_k}(x,y) \le \mathcal{X}_{X_k}(x)\mathcal{X}_{Y_k}(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

であるから，Lem 8.5 より，$\mathcal{M}$ が Lem 8.6 の条件 (a)，(b) を満たすことは容易にわかる．$\mathcal{E}_0$ の定義より，$A \in \mathcal{E}_0$ ならば，$A \cap Z_k \in \mathcal{E}_0$ は明らかである．Lem 8.3 で見たように，$\mathcal{E}_0$ の定義関数は (F1)–(F3) を満たす．よって $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{M}$．Lem 8.6 より，$\mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \subset \mathcal{M}$． □

Lem 8.8. Thm 8.4 の主張が成り立つ．

Proof. $f \ge 0$ とする．このとき $f_n = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n}\mathcal{X}_{[k2^{-n} \le f < (k+1)2^{-n}]}$ とおけば，$0 \le f_n \le f_{n+1} \nearrow f$ であるから，Lem 8.5 より主張を得る．

f が可積分関数のときは，$f = f^+ - f^-$ という分解と線形性を用いればよい． □

Lebesgue 測度の場合

以下，$N = d + e$ とし，$\mathcal{F}^N, \mathcal{F}^d, \mathcal{F}^e$，$\lambda^N, \lambda^d, \lambda^e$ でそれぞれ $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e$ 上の

Lebesgue 可測集合の全体と Lebesgue 測度を表す．次のような Fubini の定理の変形が成り立つ．

Thm 8.9 (Fubini の定理 (Lebesgue 測度))**.** $\mathcal{F}^N$-可測関数 $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty]$ は，(a) 可積分であるか，(b) 非負であるかのいずれかとする．このとき次が成り立つ．

(FL1) $f_x^{(e)} : \mathbb{R}^e \ni y \mapsto f(x,y) \in [-\infty,\infty]$ は $\mathcal{F}^d$-可測であり，さらに λ^d-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^e} f_x^{(e)}(y)\lambda^e(dy)$ が定義でき，$\mathcal{F}^d$-可測である．

(FL2) $f_y^{(d)} : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto f(x,y) \in [-\infty,\infty]$ は $\mathcal{F}^d$-可測であり，さらに λ^e-a.e. $y \in \mathbb{R}^d$ に対し，$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f_y^{(e)}(x)\lambda^d(dx)$ が定義でき，$\mathcal{F}^e$-可測である．

(FL3) 次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda^N &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^e} f_x^{(e)}(y)\lambda^e(dy)\right)\lambda^d(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^e}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_y^{(d)}(x)\lambda^d(dx)\right)\lambda^e(dy).\end{aligned} \tag{8.5}$$

　幾つかの補題に分けて証明する．

Lem 8.10. $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e \subset \mathcal{F}^N$ かつ $\lambda^d \times \lambda^e(A) = \lambda^N(A)$ $(\forall A \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e)$ が成り立つ．

Proof.

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^n E_j \times F_j \,\middle|\, E_j \in \mathcal{F}^d, F_j \in \mathcal{F}^e, n \in \mathbb{N} \right\}$$

とおく．まず

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}^N, \quad \lambda^d \times \lambda^e(A) = \lambda^N(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_0 \tag{8.6}$$

を示す．

　$G \subset \mathbb{R}^d$，$G' \subset \mathbb{R}^e$ をともに開集合とする．このとき互いに素な区間の列 $I_n^d \subset \mathcal{R}^d$，$I_n^e \subset \mathcal{R}^e$ により $G = \bigcup_{i=1}^\infty I_i^d$，$G' = \bigcup_{j=1}^\infty I_j^e$ と表現される．したがって

$$G \times G' = \bigcup_{i,j=1}^\infty I_i^d \times I_j^e \in \mathcal{F}^N, \quad \lambda^N(G \times G') = \sum_{i,j=1}^\infty \lambda^d(I_i^d)\lambda^e(I_j^e) = \times\lambda^e(G \times G').$$

　$G_i \subset \mathbb{R}^d$，$G_j' \subset \mathbb{R}^e$ を開集合列とする．開集合の有限共通部分は開集合であるから，

$$\left(\bigcap_{i=1}^\infty G_i\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^\infty G_j'\right) = \bigcap_{n=1}^\infty \left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^n G_j'\right) \in \mathcal{F}_0$$

であり，さらに単調収束なので任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\lambda^N\biggl((-k,k)^N \cap \biggl[\biggl(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\biggr) \times \biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} G'_j\biggr)\biggr]\biggr) \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \lambda^N\biggl((-k,k)^N \cap \biggl[\biggl(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\biggr) \times \biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} G^n_j\biggr)\biggr]\biggr) \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \lambda^d\biggl((-k,k)^d \cap \bigcap_{i=1}^{n} G_i\biggr)\lambda^e\biggl((-k,k)^e \cap \bigcap_{i=1}^{n} G'_i\biggr) \\
&\qquad = \lambda^d\biggl((-k,k)^d \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\biggr)\lambda^e\biggl((-k,k)^e \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G'_i\biggr).
\end{aligned}$$

$k \to \infty$ とすれば，

$$\lambda^N\biggl(\biggl[\biggl(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\biggr) \times \biggl(\bigcap_{j=1}^{\infty} G'_j\biggr)\biggr]\biggr) = \lambda^d\biggl(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\biggr)\lambda^e\biggl(\bigcap_{i=1}^{\infty} G'_i\biggr).$$

$E \subset \mathbb{R}^d$ は $\lambda^d(E) = 0$ を満たすとする．区間 $I_i^{(n)} \subset \mathbb{R}^d$ で

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^{(n)}| < 1/n, \quad n \in \mathbb{N},$$

となるものが取れる．このとき

$$E \times [-k,k)^e \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)} \times [-k,k)^e, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^{(n)} \times [-k,k)^e| < k^e/n, \quad n \in \mathbb{N},$$

である．よって $\lambda^N(E \times [-k,k)^e) = 0$．$k \to \infty$ として，$\lambda_0^N(E \times \mathbb{R}^e) = 0$ となる．したがって任意の $B \in \mathcal{F}^e$ に対し，$E \times B \in \mathcal{F}^N$ で $\lambda^N(E \times B) = 0$.

同様に $E' \subset \mathbb{R}^e$ は $\lambda^d(E') = 0$ ならば，任意の $A \in \mathcal{E}^d$ に対し，$A \times E' \in \mathcal{E}^N$ かつ $\lambda^N(A \times E') = 0$.

$A \in \mathcal{F}^d$，$B \in \mathcal{F}^e$ とする．開集合列 $G_n \in \mathbb{R}^d, \supset A$，$G'_n \in \mathbb{R}^e \supset B$ で $\lambda^d\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus A\bigr) = 0$，$\lambda^e\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n \setminus B\bigr) = 0$ なるものがとれる (Thm 3.8)．このとき，先の段落での考察より，

$$A \times B \subset \biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\biggr) \times \biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\biggr), \quad \lambda^N\biggl(\biggl[\biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\biggr) \times \biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\biggr)\biggr] \setminus (A \times B)\biggr) = 0.$$

したがって $A \times B \in \mathcal{F}^N$ かつ

$$\begin{aligned}
\lambda^N(A \times B) &= \lambda^N\biggl(\biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\biggr) \times \biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\biggr)\biggr) \\
&= \lambda^d\biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\biggr)\lambda^e\biggl(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\biggr) = \lambda^d(A)\lambda^e(B).
\end{aligned}$$

よって (8.6) が示せた.

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e \mid A \in \mathcal{F}^N, \lambda^N(A) = \lambda^d \times \lambda^e(A)\}$$

とおく. (8.6) より, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$. $A_j \in \mathcal{M}$ が $A_j \subset A_{j+1}$ を満たせば, 単調非減少収束であるから, $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$. もし, $A_j \supset A_{j+1}$ を満たせば, $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}^N$ は明らか. $A_j \cap (-k,k)^N$ に優収束定理を用いれば $\lambda^N(A) = \lambda^d \times \lambda^e(A)$ が得られる. よって Lem 8.6 より, $\mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e \subset \mathcal{M}$. すなわち主張が得られた. □

Lem 8.11. 任意の $A \in \mathcal{F}^N$ に対し, $f = \mathcal{X}_A$ は (FL1)–(FL3) を満たす.

Proof. 閉集合列 $H_n \subset A$ が取れ, $H = \bigcup_{n=1}^\infty H_n$, $E = A \backslash H$ とおけば $\lambda^N(E) = 0$ とできる (Thm 3.8). $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_H + \mathcal{X}_E$ より, $\mathcal{X}_E$, $\mathcal{X}_E$ がを満たすことを示せばよい.

$\mathbb{R}^N \setminus H_n$ は開集合であるから, 可算個の区間の和集合として表される. 区間は $\mathcal{F}_0$ (記号は Lem 8.10 参照) の元であるから, Lem 8.10 より, $\mathbb{R}^N \setminus H_n \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e$. よって $H_n \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e$, したがって $H \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e$ となる. Thm 8.4 より, $\mathcal{X}_H$ は (FL1)–(FL3) を (除外集合なしに) 満たす.

$\mathcal{X}_E$ が (FL1)–(FL3) を満たすことを示す. 開集合列 $G_n \supset E$ が取れ, $F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ とおけば, $\lambda^N(F) = 0$ とできる (Thm 3.8). 上で見たように $G_n \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e$ であるから, $F \in \mathcal{F}^d \times \mathcal{F}^e$. Thm 8.4 より, $\mathcal{X}_F$ は (FL1)–(FL3) を満たす. Lem 8.3 の記号を用いれば,

$$E_x^{\mathbb{R}^e} \subset F_x^{\mathbb{R}^e}, \quad E_y^{\mathbb{R}^d} \subset F_y^{\mathbb{R}^d} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^e. \tag{8.7}$$

$\mathcal{X}_F(x,y) = \mathcal{X}_{F_x^{\mathbb{R}^e}}(y) = \mathcal{X}_{F_y^{\mathbb{R}^d}}(x)$, $\lambda^N(F) = 0$ より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^e(F_x^{\mathbb{R}^e})\lambda^d(dx) = \int_{\mathbb{R}^e} \lambda^d(F_y^{\mathbb{R}^d})\lambda^e(dy) = 0$$

となる. したがって λ^d-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\lambda^e(F_x^{\mathbb{R}^e}) = 0$, λ^e-a.e. $y \in \mathbb{R}^e$ に対し $\lambda^d(F_y^{\mathbb{R}^d}) = 0$ となる. (8.7) より λ^d-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\lambda^e(E_x^{\mathbb{R}^e}) = 0$, λ^e-a.e. $y \in \mathbb{R}^e$ に対し $\lambda^d(E_y^{\mathbb{R}^d}) = 0$. とくに λ^d-a.e. $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $E_x^{\mathbb{R}^e} \in \mathcal{F}^e$, λ^d-a.e. $y \in \mathbb{R}^e$ に対し $E_y^{\mathbb{R}^d} \in \mathcal{F}^d$. 以上より $\mathcal{X}_E$ は (FL1)–(FL3) を満たす. □

Lem 8.12. Thm 8.9 の主張が成り立つ.

Proof. Lem 8.8 と同じ. □

演習問題

基本的に測度空間 $(X, \mathcal{E}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{E}_Y, \mu_Y)$ で考察する. $\mathbb{R}^N$ が現れたときは Lebesgue 測度空間を考えているものとする.

Q8.1. $f : X \to [-\infty, \infty]$, $g : Y \to [-\infty, \infty]$ は可積分であるとする. $h(x,y) = f(x)g(y)$ とおく. $h : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ は可積分であり, $\int_{X \times Y} h d(\mu_X \times \mu_Y) = \int_X f d\mu_X \int_Y g d\mu_Y$ となることを証明せよ.

Q8.2. 可測関数 $f : X \to [-\infty,\infty]$，$g : Y \to [-\infty,\infty]$ は，$\mu_X([f \neq 0]), \mu_Y([g \neq 0]) > 0$ を満たすとする．もし $h(x,y) = f(x)g(y)$ が $X \times Y$ 上可積分であれば，f, g はそれぞれ μ_X，μ_Y に関し可積分であることを証明せよ．

Q8.3. 可測関数 $f : X \to [-\infty,\infty]$，$g : Y \to [-\infty,\infty]$ に対し，$h(x,y) = f(x) + g(y)$ とおく．

(i) $\mu_X(X) < \infty$ とする．もし h が $\mu_X \times \mu_Y$ に関し可積分ならば，f は μ_X に関し可積分となることを証明せよ．

(ii) ある一点 $a \in Y$ に対し，$\mu_Y(A) = \mathcal{X}_A(a)$ を満たすような μ_Y を用いて，上の主張は $\mu_X(X) = \infty$ ならば一般には成立しないことを説明せよ．

Q8.4. 可測関数 $f : X \times Y \to [-\infty,\infty]$ は，$\mu_X \times \mu_Y$-a.e. に $f \geq 0$ を満たす．このとき，$\mu_Y(\{y \,|\, f(x,y) \geq 0\}) > 0$ を満たす $x \in X$ が少なくとも一つは存在することを証明せよ．

Q8.5. 可測関数 $f : X \times Y \to [-\infty,\infty]$ は，$\mu_X \times \mu_Y$-a.e. に $f \geq 0$ を満たす．$A \in \mathcal{E}_X$, $B \in \mathcal{E}_Y$ は，$\mu_X(A) > 0, \mu_Y(B) > 0$ を満たすとする．もし μ_X-a.e. $x \in A$ に対して $\mu_Y(\{y \in B \,|\, f(x,y) < 0\}) = 0$ が成り立つならば，μ_Y-a.e. $y \in B$ に対して $\mu_X(\{x \in X \,|\, f(x,y) < 0\}) = 0$ となることを示せ．

Q8.6. $d, e \in \mathbb{N}$，$N = d + e$ とする．$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^e)$ となることを示せ．

Q8.7. $N = 2d$，$d = e$ とし，$A \in \mathcal{F}^d$ とする．$f : \mathbb{R}^N \ni (x,y) \mapsto f(x,y) = \mathcal{X}_A(x+y)$ が可測関数となることをつぎの手順で証明せよ．

(i) 閉集合 F，開集合 G に対し，$\mathcal{X}_F(x+y), \mathcal{X}_G(x+y)$ はともに $\mathbb{R}^N$ 上可測となることを証明せよ．

(ii) 閉集合列 $F_n \subset \mathbb{R}^d$，$n = 1, 2, \ldots$，と開集合列 $G_n \subset \mathbb{R}^d$，$n = 1, 2, \ldots$，で，$F_n \subset F_{n+1} \subset A \subset G_{n+1} \subset G_n$，$\lambda^d(A \setminus F_\infty) = \lambda^d(G_\infty \setminus A) = 0$ (ただし $F_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty F_n, G_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$) となるものをとれば，$\mathcal{X}_{F_\infty}(x+y), \mathcal{X}_{G_\infty}(x+y)$ ともに $\mathbb{R}^N$ 上可測となることを示せ．

(iii) 上の $\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{X}_{F_\infty}(x+y) - \mathcal{X}_{G_\infty}(x+y)| d(\lambda^d \times \lambda^d)(x,y) = 0$ を示せ．

(iv) $\mathcal{X}_A(x+y)$ が可測であることを示せ．

Q8.8. $N = 2d$，$f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda^d)$ とし，$h(x,y) = f(x-y)g(y), k(x,y) = f(y)g(x-y)$ とおく．$h, g \in \mathcal{L}^1(\lambda^N)$ であること，$\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y) d\lambda^d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y) d\lambda^d(y)$ となること，さらに $\int_{\mathbb{R}^N} h d\lambda^N = \int_{\mathbb{R}^N} k d\lambda^N$ となることを示せ．

Q8.9. $N = 2d$，$p > 1$，$f \in \mathcal{L}^p(\lambda^d), g \in \mathcal{L}^1(\lambda^d)$ とし，$h(x,y) = f(x-y)g(y)$ とおく．$x = (x_1, \ldots, x_d)$ が $\max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\} > 1/2$ ならば $f(x) = 0$ を満たすと仮定する．$h \in \mathcal{L}^1(\lambda^N)$ であり，さらに

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h| d\lambda^N \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda^d \Big)^{1/p} \int_{\mathbb{R}^d} |g| d\lambda^d$$

が成り立つことを示せ．

Q8.10. $K \in \mathcal{L}^2(\mu_X \times \mu_Y)$ とする．$f \in \mathcal{L}^2(\mu_Y)$ に対し

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\mu_Y(dy), \quad x \in X$$

と定義する．

(i) $Tf(x)$ は定義でき $Tf \in \mathcal{L}^2(\mu_X)$ となることを示せ．

(ii) $f_n, f \in \mathcal{L}^2(\mu_Y)$ とし，任意の $g \in \mathcal{L}^2(\mu_Y)$ に対し $\lim_{n\to\infty} \int_Y g(f_n - f)d\mu_Y = 0$ を満たすと仮定する．このとき $\lim_{n\to\infty} \int_X |Tf_n - Tf|^2 d\mu_X = 0$ となることを証明せよ．

(注: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_Y |f_n|^2 d\mu_Y < \infty$ となることは証明なしに用いてよい．この事実の証明を発表できればそれは 1 題解答と見なす)

Q8.11. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はともに可積分とする．$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$，$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\lambda^1(dx)$ とおく．$h \in \mathcal{L}^1(\lambda^1)$ であり，さらに $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ $(\forall\xi)$ となることを示せ．

(複素数値関数の積分は実部と虚部の積分の和として定義する．)

Q8.12. $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|x|^k|f^{(m)}(x)|\} < \infty, \forall k, m \in \mathbb{Z}, \geq 0\}$ とおく．

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(\lambda^1)$ を示せ．

(ii) $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ を示せ．

(iii) $f, g \in \mathcal{S}$ とする．$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)g(\xi)e^{i\xi x}\lambda^1(d\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\widehat{g}(y)\lambda^1(dy)$ が成り立つことを示せ．

(iv) $\varepsilon > 0$ とし，$g(\xi) = e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}$ とおけば，$\widehat{g}(y) = (2\pi)^{1/2}\varepsilon^{-1}e^{-y^2/(2\varepsilon^2)}$ となることを示せ．

(v) $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\lambda^1(d\xi) = (2\pi)^{1/2}f(x)$ となることを示せ．

Q8.13. $X = Y = [0,1)$，$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y = \{A \subset [0,1) \mid A \in \mathcal{F}^1\}$，$\mu_X(A) = \mu_Y(A) = \lambda^1([0,1) \cap A)$ とおく．$f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ $((x,y) \in [0,1)^2)$ とする．

(i) $(X, \mathcal{E}_X, \mu_X)$ が測度空間であることを確かめよ．

(ii) $f^{\pm}$ を求めよ．

(iii) $\int_{X\times Y} f^{\pm} d(\mu_X \times \mu_Y) = \infty$ となることを示せ．

(iv) $\int_X \big(\int_Y f(x,y)\mu_Y(dy)\big)\mu_X(dx)$，$\int_Y \big(\int_X f(x,y)\mu_X(dx)\big)\mu_y(dy)$ を求め，Fubini の定理の主張が成立しないことを確かめよ．