# 数理モデル概論 レポート課題 (2020/1/6)

GPSによる位置決定は、高度20000kmを飛ぶ人工衛星までの距離を測ることで実現されている。この距離測定は、人工衛星に積んだ時計の時刻を信号に載せて地表で受信し、発信から受信までの時間差を計ることで行われる。ここで、GPS衛星に搭載された時計の刻みを地表から観測すると、相対論的効果によって通常の時計よりも1秒当たり $4.5 \times 10^{-10}$ 秒だけ速く進むように見えてしまう。この影響を取り除くために、GPS衛星の時計は通常と比べて上述の割合だけ遅く進むよう調整されているそうである。この時計の調整率を導出してみよう。

地球の自転の効果を無視すると、地球の周辺領域の時空計量はSchwarzschild計量

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \;, \quad \Phi(r) = -\frac{GM}{r} \tag{1}$$

で与えられる。ただし、$M$ は地球の質量、$G$ は重力定数、$r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$ は2次元球面 $r=$ (一定) 上の線素である。
ここで、時間座標 $t$ を地表面 $r = r_E$ で静止する時計に合わせた時間座標 $t'$ に取り直すためには

$$dt = \left(1 - \frac{\Phi(r_E)}{c^2}\right) dt' \tag{2}$$

とすればよい。$|\Phi/c^2| \ll 1$ であることから、$\Phi/c^2$ について一次の項までを残して計量 (1) を書き換えると

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} - \frac{2\Phi(r_E)}{c^2}\right)(c\,dt')^2 + \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \;. \tag{3}$$

ある観測者にとっての固有時間 $d\tau$ の2乗値は、その観測者の軌道に沿った世界間隔 $ds^2$ のマイナス倍で与えられる。すなわち

$$(c\,d\tau)^2 = -ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} - \frac{2\Phi(r_E)}{c^2}\right)(c\,dt')^2 - \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \;. \tag{4}$$

次に、GPS衛星の軌道上で固有時間 $d\tau$ を評価してみる。簡単のため、GPS衛星は半径 $r = r_{\rm GPS}$, 天頂角 $\theta = \pi/2$ の円軌道を運動しているものとする (図1参照)。

**問1**：GPS衛星の軌道 $(r, \theta) = (r_{\rm GPS}, \pi/2)$ については $dr = d\theta = 0$ となる。また、GPS衛星の速度は $v = r_{\rm GPS}\, d\phi/dt'$ で与えられる。これらの関係式を用いて、GPS衛星の固有時間 $d\tau$ と地表の時間 $dt'$ との関係式を $d\tau^2 = (1+\epsilon)\,dt'^2$ の形で求めよ。

**問2**：GPS衛星の運動はニュートン力学にほぼ従い、速度 $v$ と軌道半径 $r$ との関係は

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{2r} \tag{5}$$

で与えられる。この式を用いて、$\epsilon$ を $v$ を含まない式として表せ。

$|\epsilon| \ll 1$ なので、GPS衛星の時計が刻む時間 $d\tau$ と地表の時間 $dt'$ との関係式は $dt' \approx \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) d\tau$ と表せる。GPSの時計が $d\tau = 1$ 秒進むとき、それを地表の時計で計ると $dt' = 1 - \frac{1}{2}\epsilon$ 秒しか経過しておらず、そのためGPSの時計は通常のものより速く進むように見える。そこで、GPSの時計

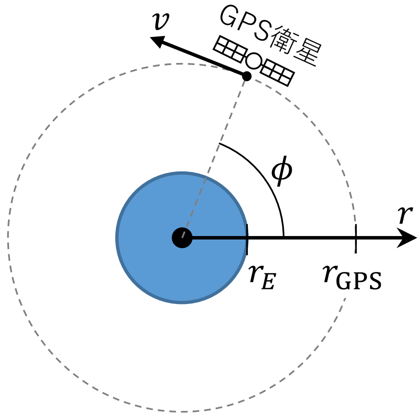


図 1: 地球を周回する GPS 衛星

を $1+\frac{1}{2}\epsilon$ 倍だけ遅く進むようにすると、地表で計った時にちょうど正しい時刻の進み方をするように見える。

**問３**：以下の物理定数を用いて、GPS の時計の補正量 $\frac{1}{2}\epsilon$ の値を求めよ。

$$c = 3.0\times10^5\,\mathrm{km/s},\quad G = 6.7\times10^{-20}\,\mathrm{km^3kg^{-1}s^{-2}},\quad M = 6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg},$$
$$r_E = 6.4\times10^3\,\mathrm{km},\quad r_{\mathrm{GPS}} = 2.7\times10^4\,\mathrm{km} \tag{6}$$

**問４**：相対論的効果による GPS の時計の補整を行わなかった場合、距離にして 1 秒あたり $c\times\frac{1}{2}\epsilon$ [km] だけ GPS による測定位置がずれてしまう。1 日 ($24\times60\times60$ 秒) 経過すると、このずれは累計何 km になるか。

★: 講義の感想や改善点等を自由に記述してください。今後の講義内容の改善に活用させていただきます。[評価には影響しません]

# 参考文献

[1] N. Ashby, "Relativity in the Global Positioning System," Living Rev. Rel. **6**, 1 (2003) [100 Years Of Relativity : space-time structure: Einstein and beyond, 257 (2005)]. https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2003-1

[2] 野村清英、"GPS と物理", http://maya.phys.kyushu-u.ac.jp/~knomura/museum/GPS/